

Università degli studi di Udine
Laboratorio di Fisica Generale I - Cds Ingegneria
Elettronica

Gruppo 15:
Vittorio Alzetta - 168352

8 Giugno 2024

Indice

1	Introduzione	2
2	Strumenti	2
3	Formule	2
4	Misure	4
4.1	Metodo I (Periodo di Oscillazione)	4
4.2	Metodo II (Teorema di Steiner)	5
4.3	Confronto Metodi	6
4.4	Stima della Massa del Disco	7
5	Conclusioni	8

1 Introduzione

Lo scopo di questa relazione è quello di presentare i risultati ottenuti in laboratorio dalla misura del momento di inerzia di un pendolo. Nella prima parte verranno descritti gli strumenti utilizzati durante l'esperimento, nella seconda le formule che sono servite al calcolo del momento di inerzia e nella terza ci sarà il riassunto dei risultati ottenuti. A concludere verrà fatto un breve commento sulla riuscita o meno dell'esperimento.

2 Strumenti

Durante l'esperimento mirato a misurare il momento di inerzia di un pendolo composto sono stati utilizzati i seguenti strumenti:

- **Pendolo di Kater:** Un pendolo composto da due dischi e una sbarra lungo la quale erano fissati.
- **Metro:** Utilizzato per misurare le lunghezze rilevanti del pendolo, come la distanza tra il punto di sospensione e il centro di massa.
- **Bilancia:** Utilizzata per determinare la massa del pendolo.
- **Equilibratore:** Utilizzato per mettere in equilibrio il pendolo e individuare con precisione il centro di massa.
- **Cronometro:** Utilizzato per misurare il periodo delle oscillazioni del pendolo.
- **Excel:** Utilizzato per l'analisi e l'elaborazione dei dati raccolti durante l'esperimento.

3 Formule

In questa sezione verranno brevemente descritte tutte le formule che sono state impiegate nel calcolo del momento di inerzia. Dal momento che in queste formule compaiono numerose lettere diventa facile confonderle o dimenticarne la grandezza descritta (mi riferisco in particolare alle distanze dal punto di sospensione). Pertanto in questo capitolo e in seguito farò sempre riferimento alla Figura 1

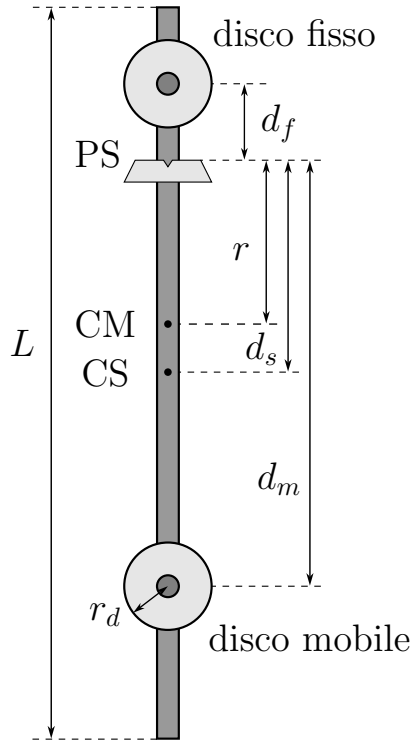


Figure 1: Schema di riferimento

CM rappresenta la posizione del centro di massa mentre CS rappresenta il baricentro della sbarra (per semplicità assumiamo che si trovi a metà della sua lunghezza).

Passiamo ora alle formule utilizzate per l'elaborazione dei dati. La seguente relazione ha permesso di calcolare il momento di inerzia del pendolo composto a partire dal periodo delle oscillazioni e dalla distanza r tra il centro di massa CM e il punto di sospensione PS

$$I = \frac{gM}{4\pi^2} T^2 r \quad [1]$$

dove con M si è indicata la massa totale del pendolo composto (sbarra + 2 dischi). In seguito è stato applicato il teorema di Steiner per calcolare il momento di inerzia della sbarra e dei due dischi in maniera tale da avere una seconda misura del momento d'inerzia totale. In particolare il calcolo è stato diviso in 3 parti, infatti sono stati ricavati separatamente i momenti d'inerzia della sbarra, del disco fisso e del disco mobile con le formule

$$I_s = \frac{1}{12} m_s L^2 + m_s d_s^2 \quad [2]$$

$$I_f = \frac{1}{2} m_d r_d^2 + m_d d_f^2 \quad [3]$$

$$I_m = \frac{1}{2} m_d r_d^2 + m_d d_m^2 \quad [4]$$

dove, aggiungo, m_s e m_d identificano rispettivamente la massa della sbarra e la massa di un singolo disco (il disco mobile e il disco fisso hanno la stessa massa), e il momento di inerzia totale è ricavato sommando i tre valori: $I_{tot} = I_s + I_f + I_m$.

A conclusione dell'esperimento verrà fatto un confronto tra il valore della massa del disco mobile reale (cioè il valore che viene riportato sulla massa stessa) e quello che si può ottenere dalle formule, in particolare si userà la relazione

$$r = \frac{m_s d_s + m_d d_f + m_d d_m}{M} = \frac{m_s d_s + m_d d_f}{M} + \frac{m_d}{M} d_m \quad [5]$$

dove viene messa in evidenza la dipendenza lineare tra r (distanza tra CM e PS) e d_m (distanza della massa mobile da PS).

4 Misure

In questa sezione si vedranno prima i momenti di inerzia ottenuti tramite la misura del periodo di oscillazione (formula [1]) e poi quelli ricavati grazie al teorema di Steiner (formula [2], formula [3], formula [4]). A seguire verrà fatto un confronto tra i risultati ottenuti con i 2 approcci e infine si calcolerà il valore della massa del disco atteso dalla teoria (formula [5]).

4.1 Metodo I (Periodo di Oscillazione)

Durante la prima parte dell'esperimento sono state anzitutto misurate le grandezze fisse, che troviamo riassunte nella tabella

Parametri fissi	Valore
Massa totale (M)	3,280 kg
Massa sbarra (m_s)	1,760 kg
Massa disco (m_d)	0,760 kg
Raggio del disco (r_d)	0,085 m
Lunghezza sbarra (L)	1,400 m
Disco fisso - PS (d_f)	0,198 m

Table 1: Parametri fissi del sistema

In seguito è stato individuato il centro di massa del pendolo composto tramite un piccolo cilindro di metallo, la seguente figura mostra come quest'ultimo è stato sfruttato

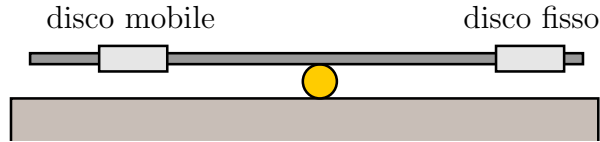


Figure 2: Sistema in equilibrio

facendo scorrere la sbarra sopra il cilindro è stato facile trovare il punto di equilibrio, che corrisponde al centro di massa. Dopo aver preso le opportune misure (r e d_m) è stato misurato il periodo di 5 oscillazioni del pendolo per 5 volte. In totale questo procedimento è stato ripetuto per 10 diverse posizioni del disco mobile, permettendo di registrare i seguenti valori

r (m)	0.379	0.367	0.355	0.344	0.333	0.321	0.309	0.298	0.287	0.275
d_m (m)	0.952	0.902	0.852	0.802	0.752	0.702	0.652	0.602	0.552	0.502
M (s)	10.20	10.02	9.90	9.80	9.70	9.59	9.48	9.38	9.30	9.26
	10.14	10.11	9.91	9.72	9.66	9.58	9.48	9.40	9.26	9.26
	10.18	10.05	9.95	9.76	9.66	9.58	9.51	9.45	9.31	9.27
	10.20	10.05	9.93	9.74	9.69	9.64	9.57	9.42	9.39	9.28
	10.15	10.07	9.91	9.80	9.73	9.60	9.49	9.44	9.44	9.25
$\bar{T}_5$ (s)	10.17	10.06	9.92	9.76	9.69	9.60	9.51	9.44	9.37	9.26
$\bar{T}_1$ (s)	2.04	2.01	1.98	1.95	1.94	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85

Table 2: Misure delle oscillazioni

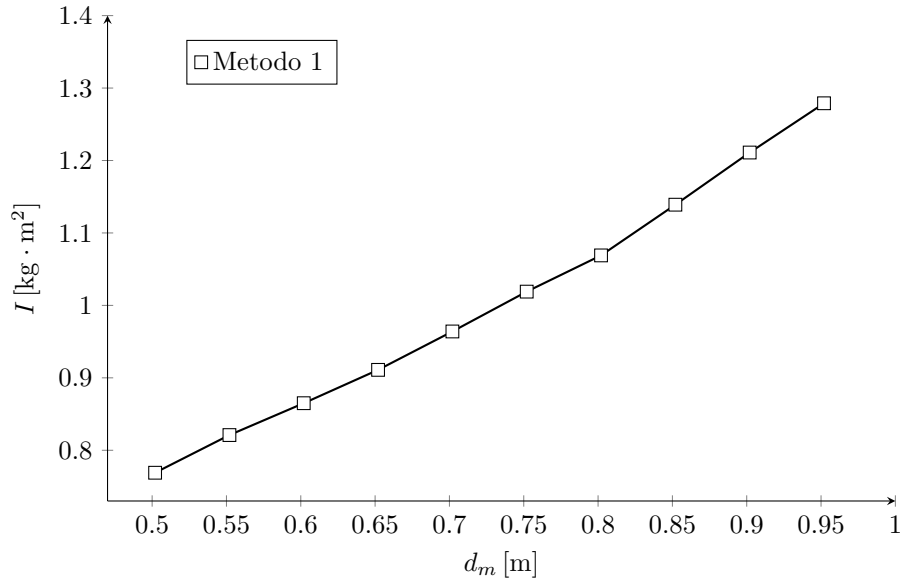
dove con $\bar{T}_5$ e $\bar{T}_1$ ho indicato rispettivamente la media del periodo di 5 oscillazioni

e di una singola oscillazione; con M sono invece state chiamate le singole misure del periodo di 5 oscillazioni. In seguito, utilizzando la formula [1], è stato possibile calcolare il momento di inerzia del sistema (si è sfruttata la proprietà del centro di massa secondo la quale un sistema si comporta come se tutta la sua massa fosse concentrata in tale punto) in funzione della distanza r

r (m)	0.379	0.367	0.355	0.344	0.333	0.321	0.309	0.298	0.287	0.275
$\bar{T}_1$ (s)	2.04	2.01	1.98	1.95	1.94	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85
I (kg · m ²)	1,28	1,21	1,14	1,07	1,02	0,96	0,91	0,87	0,82	0,77

Table 3: Momenti di inerzia totali (Metodo I)

da cui poi è stato possibile creare il grafico che mostra il valore del momento d'inerzia del pendolo composto al variare della distanza d_m



4.2 Metodo II (Teorema di Steiner)

In questa seconda fase, come indica il nome della sezione, si è calcolato il momento di inerzia del pendolo composto scomponendo il problema in 3 parti. Infatti, dal teorema di Steiner e dalla dinamica rotazionale abbiamo potuto ricavare con le formule [2], [3] e [4] rispettivamente il momento d'inerzia della sbarra, del disco fisso e del disco mobile. Di seguito è riportato il calcolo dei primi due (I_s e I_f)

Grandezza	Valore (kg·m ²)
I_s	0,544
I_f	0,033

Table 4: Momenti di inerzia non variabili

Tramite un foglio di calcolo è poi stato determinato il momento di inerzia del disco mobile, che, come suggerisce l'appellativo, varia sulla base della distanza d_m . Sono stati raccolti i seguenti dati

d_m (m)	0.952	0.902	0.852	0.802	0.752	0.702	0.652	0.602	0.552	0.502
I_m (kg·m ²)	0.692	0.621	0.554	0.492	0.433	0.377	0.326	0.278	0.234	0.194

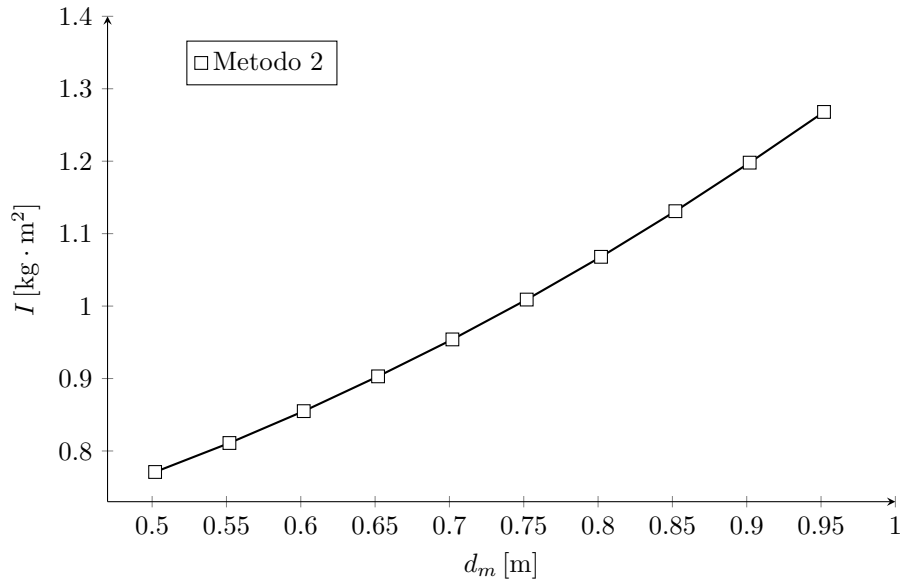
Table 5: Momenti di inerzia del disco mobile

grazie ai quali è stato possibile, infine, sommando i 3 valori I_s , I_f e I_m ottenere il momento di inerzia totale

I_s	I_f	I_m	I_{tot} (kg·m ²)
0,544	0,033	0,692	1,268
0,544	0,033	0,621	1,198
0,544	0,033	0,554	1,131
0,544	0,033	0,492	1,068
0,544	0,033	0,433	1,009
0,544	0,033	0,377	0,954
0,544	0,033	0,326	0,903
0,544	0,033	0,278	0,855
0,544	0,033	0,234	0,811
0,544	0,033	0,194	0,771

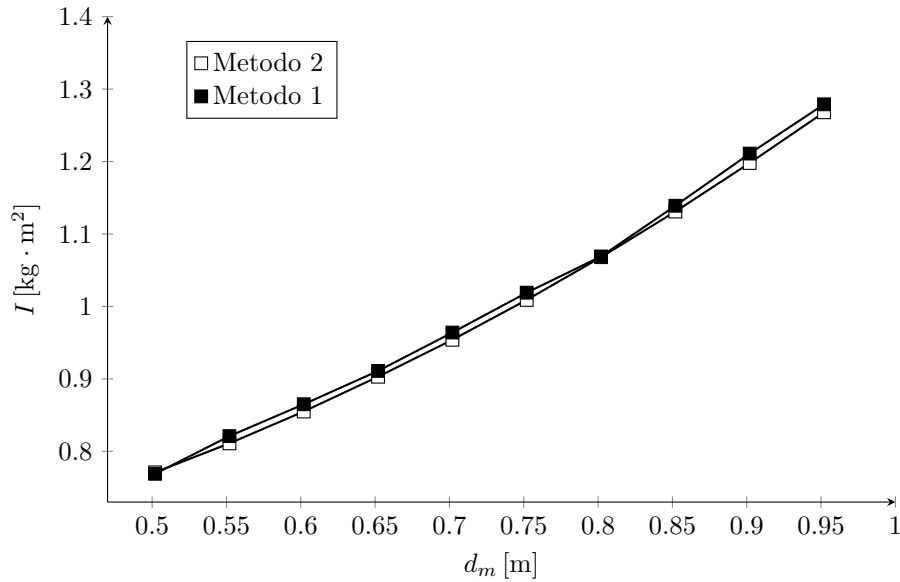
Table 6: Momenti di inerzia totali (metodo II)

Similmente a quanto fatto con il metodo I è proposto di seguito un grafico che mostra l'andamento del momento di inerzia totale, calcolato grazie al teorema di Steiner, in funzione della posizione del disco mobile



4.3 Confronto Metodi

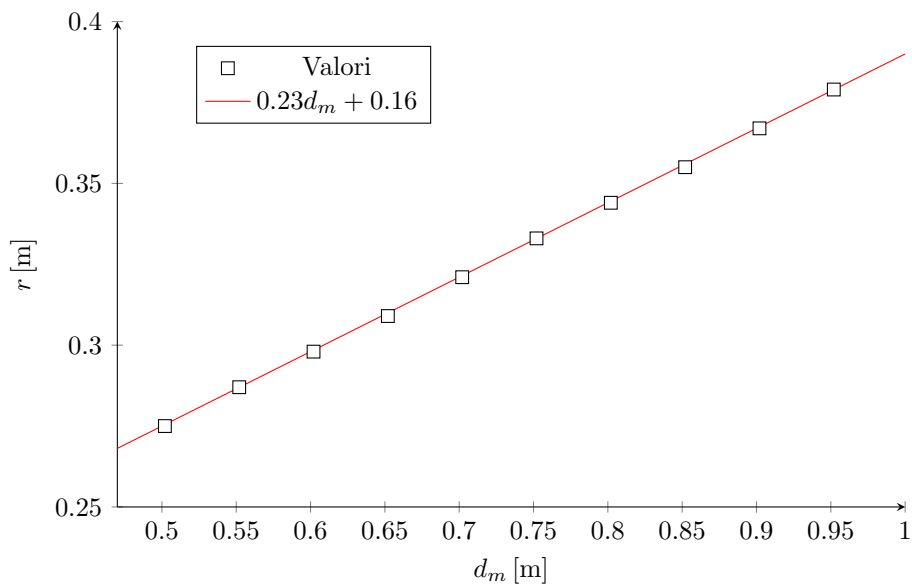
Di seguito è proposto il grafico che confronta i due metodi usati per determinare il momento di inerzia del pendolo composto rispetto all'asse passante per PS, variando la distanza del centro di massa CM rispetto al punto di sospensione PS



Analizzando il grafico, si osserva che entrambi i metodi producono risultati simili al variare della distanza del disco mobile dal punto di sospensione PS. Tuttavia, si possono notare delle lievi discrepanze, che possono essere attribuite a errori sperimentali, approssimazioni nelle misurazioni o alla complessità della distribuzione di massa del corpo rigido. Nonostante queste piccole differenze entrambi i metodi forniscono valori accettabili e tale coerenza sottolinea l'efficacia dei due approcci.

4.4 Stima della Massa del Disco

In questa breve sezione, come era già stato accennato nel capitolo 2, si stimerà la massa del disco mobile (è la stessa del disco fisso) a partire dalla formula [5], che mette in relazione la distanza r (PS - CM) e la distanza d_m (disco mobile - PS). Tramite una procedura di fit è stato possibile interpolare con una retta l'insieme di coppie ordinate $(r(d_m), d_m)$, il tutto è mostrato nel grafico che segue



una volta individuata la retta che meglio approssima l'insieme dei dati è stato immediato calcolare indirettamente la massa del disco mobile. Infatti, è bastato

eseguire la seguente moltiplicazione

$$\frac{m_d}{M} = m \iff m_d = M \cdot m \iff m_d = 3.280 \text{ kg} \cdot 0.23 = 0.754 \text{ kg}$$

Grazie a questa misurazione, si è ottenuto un risultato che differisce di poco da quello reale, cioè il valore della massa letto sul disco pari a 0,760 kg. Il fatto che il valore di m_d calcolato con le formule si discosti di poco più dello 0,7% dal valore reale dimostra l'accuratezza della misurazione, aumentando così l'affidabilità del valore del momento di inerzia ottenuto. Questo perché il valore della massa è stato derivato dagli stessi dati utilizzati per calcolare, inizialmente, il momento di inerzia.

5 Conclusioni

L'esperimento volto alla misura del momento di inerzia di un pendolo composto può dirsi, in conclusione, avvenuto con successo. I risultati ottenuti attraverso due metodi distinti (misura del periodo delle oscillazioni e applicazione del teorema di Steiner) sono stati confrontati e mostrano una buona coerenza, confermando la validità dei calcoli effettuati e l'affidabilità delle misurazioni. Tuttavia, sono state rilevate alcune discrepanze tra i valori ottenuti durante le due fasi dell'esperimento. Le differenze nelle misure possono essere attribuite a vari fattori, tra cui la precisione degli strumenti utilizzati, come il cronometro e il metro, che possono aver introdotto errori sistematici e casuali. Inoltre, le approssimazioni fatte durante il calcolo del centro di massa, dovute alla difficoltà nell'individuare, hanno potuto contribuire alle variazioni nei risultati. Nonostante queste limitazioni, l'esperimento ha fornito dati generalmente coerenti, dimostrando l'efficacia della metodologia adottata.