

Università degli studi di Udine
Laboratorio di Fisica Generale II - Cds Ingegneria
Elettronica

Gruppo 2:
Vittorio Alzetta - 168352
Stefano De Monte - 166688
Raul Marizza - mat.

16 Dicembre 2024

Indice

1	Introduzione	2
2	Materiali utilizzati	2
3	Analisi oscillazioni smorzate	2
3.1	Breve accenno teorico	2
3.2	Confronto con i dati sperimentali	5
4	Analisi smorzamento critico alla risonanza	6
4.1	Breve accenno teorico	6
4.2	Confronto con i dati sperimentali	7
5	Conclusioni	9

1 Introduzione

Lo scopo di questa relazione è quello di riassumere e analizzare i dati raccolti in laboratorio. L'esperimento è consistito nello studiare il comportamento di un circuito RLC in alcune particolari situazioni (per esempio alla frequenza di risonanza). Avendo trattato questo argomento anche nel corso di teoria delle reti elettriche, più avanti, nelle sezioni dedicate ai cenni teorici, è stata utilizzata una notazione in alcuni casi leggermente diversa, ma del tutto equivalente, a quella proposta durante la lezione introduttiva. Ad ogni modo, per chiarezza, è stata fornita la definizione di ogni grandezza, che sia stata introdotta a lezione o no.

2 Materiali utilizzati

Durante l'esperimento sono stati utilizzati diversi oggetti, è riportato di seguito un elenco di essi:

- **Oscilloscopio:** Strumento utilizzato per visualizzare e analizzare segnali elettrici in funzione del tempo. Permette di osservare l'ampiezza, la frequenza e la forma d'onda dei segnali.
- **Generatore di tensione:** Dispositivo che genera una tensione alternata a forma sinusoidale, quadrata o triangolare.
- **Condensatore:** Componente elettrico che immagazzina energia sotto forma di campo elettrico; ha una capacità di 10 nF.
- **Induttore:** Componente elettrico che immagazzina energia sotto forma di campo magnetico; ha un'induttanza di 10 mH.
- **Resistenza variabile:** Dispositivo utilizzato per regolare la resistenza in un circuito, con un intervallo variabile da 0 a 11100 Ω (10000 + 1000 + 100).

3 Analisi oscillazioni smorzate

Durante la prima parte dell'esperimento è stata studiata l'oscillazione smorzata della tensione ai capi della resistenza del circuito. Si vedranno anzitutto le aspettative teoriche, cioè le leggi che regolano il comportamento del circuito elettrico in esame. In secondo luogo verranno presentati i dati rilevati in laboratorio e alla fine se ne trarranno le conclusioni.

3.1 Breve accenno teorico

É opportuno, prima di tutto, considerare il circuito su cui dovremo lavorare. Di seguito ne riporto lo schema elettrico

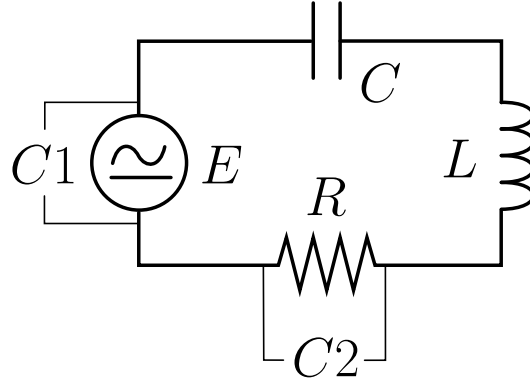


Figura 1: Schema elettrico del circuito RLC

dove con C1 e C2 sono stati indicati, rispettivamente, il canale 1 e il canale 2 dell'oscilloscopio. Una volta assemblato il circuito è stato opportunamente impostato il generatore in maniera tale che producesse delle onde quadre. Questo tipo di onda avrebbe dovuto infatti simulare l'apertura e la chiusura di un interruttore. In poche parole ci si trova a dover studiare una rete elettrica in regime variabile, in particolare ci si interessa al comportamento che assume durante la fase transitoria, cioè prima che il sistema si assesti.

Si scrive ora, in riferimento all'unica maglia della rete, la legge di Kirchhoff per le tensioni

$$E = u_c(t) + u_r(t) + u_l(t) \quad [1]$$

dove andremo a sostituire le 3 leggi costitutive dei componenti

$$u_r(t) = Ri(t) \quad [2]$$

$$u_l(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad [3]$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \quad [4]$$

ottenendo un'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = \frac{E}{LC} \quad [5]$$

Procediamo quindi calcolando l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea associata

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0 \implies s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad [6]$$

A seconda che le radici dell'omogenea associata siano reali distinte, reali coincidenti o complesse coniugate avremo a che fare con, rispettivamente, un sovrasmorzamento (o smorzamento semplice), uno smorzamento critico o un sottosmorzamento della tensione $u_c(t)$. Nel nostro caso, per ognuna delle 6 resistenze utilizzate, siamo rientrati nel caso di oscillazioni sottosmorzate, cioè radici complesse coniugate. La forma dell'integrale generale dell'omogenea associata alla [5] è

$$u_{c,omog}(t) = e^{-\alpha t} [k_1 \sin(w_s t) + k_2 \cos(w_s t)] \quad [7]$$

con $\alpha = \frac{R}{2L}$ che è detta **costante di smorzamento** e $w_s = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2}$, dove chiaramente $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ è la **pulsazione critica**. k_1 e k_2 sono 2 costanti che si calcoleranno sulla base delle condizioni iniziali della rete.

Il passo successivo consiste nel determinare l'integrale particolare dell'equazione [5]. Avendo a che fare con un sistema fisico, quest'operazione, che di solito può risultare notevolmente complicata, si riduce alla risoluzione della rete a transitorio esaurito.

Questo vuol dire che si dovrà trovare $u_c(t)$ per t molto grande. Si osservi che in tal caso il circuito si troverà in regime stazionario, di seguito ne è riportato lo schema

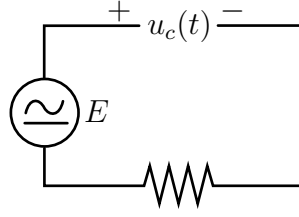


Figura 2: Schema elettrico del circuito a transitorio esaurito

Si sa infatti che in regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto mentre l'induttore si comporta come un corto circuito. La tensione $u_c(t)$, cioè l'integrale particolare dell'equazione [5], sarà

$$u_{c;part}(t) = E \quad [8]$$

Non resta ora che sommare le equazioni [7] e [8] per avere l'espressione della tensione $u_c(t)$ al variare di t

$$u_c(t) = u_{c;omog}(t) + u_{c;part}(t) = E + e^{-\alpha t}[k_1 \sin(w_s t) + k_2 \cos(w_s t)] \quad [9]$$

Imponendo le condizioni iniziali, cioè $u_c(0) = 0V$ e $i(0) = 0A$, si ricavano i valori delle 2 costanti k_1 e k_2 . Il risultato finale è

$$u_c(t) = E + e^{-\alpha t}[-\frac{\alpha E}{w_s} \sin(w_s t) - E \cos(w_s t)] \quad [10]$$

Dalla figura 1 si vede che tramite l'oscilloscopio è stata misurata la variazione di tensione ai capi della resistenza, non del condensatore. Per questo motivo l'ultimo passaggio da compiere consiste nel ricavare la quantità $u_r(t)$. Per fare ciò si sfrutteranno le equazioni [2], [4] e [10]

$$u_r(t) = RC \frac{du_c(t)}{dt} = RCE e^{\alpha t}[(\frac{\alpha^2 E}{w_s} + w_s) \sin(w_s t) - (E\alpha + \alpha) \cos(w_s t)] \quad [11]$$

Questa relazione permetterà in seguito di fare un utile confronto tra il valore assunto dalla variabile fisica e quello previsto dalla teoria. Prima di analizzare i dati sperimentali occorre considerare la quantità $\ln(\frac{u_r(t_1)}{u_r(t_2)})$, dove t_1 e t_2 rappresentano rispettivamente gli istanti in cui si verificano il primo e il secondo picco di tensione ai capi della resistenza. Sarà infatti anche tramite quella relazione che valuteremo il decremento logaritmico (causato dal sottosmorzamento) della variabile $u_r(t)$. Senza appesantire ulteriormente questa sezione con il calcolo della derivata dell'equazione [11], propongo direttamente il risultato della differenza $t_1 - t_2$ di seguito

$$t_1 - t_2 = -\frac{2\pi}{w_s} \quad [12]$$

Con la quale si può facilmente calcolare il logaritmo di cui si è parlato poco sopra

$$\ln(\frac{u_r(t_1)}{u_r(t_2)}) = \ln(\frac{e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_2}}) = -\alpha(t_1 - t_2) = \frac{2\pi\alpha}{w_s} \quad [13]$$

Il primo passaggio è giustificato dal fatto che sia per t_1 che per t_2 la quantità tra parentesi quadre (componente oscillatoria) della [11] assume lo stesso valore, a fare la differenza è il termine esponenziale $e^{-\alpha t}$, che decrementa con l'aumentare di t . Si capisce quindi che la frazione $\frac{u_r(t_1)}{u_r(t_2)}$ dà come risultato $\frac{e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_2}}$. Sviluppando l'ultimo termine dell'uguaglianza si ottiene

$$\frac{2\pi\alpha}{w_s} = \frac{2\pi \frac{R}{2L}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{2\pi R\sqrt{C}}{\sqrt{4L - R^2 C}} \quad [14]$$

pertanto, quando $R^2C \ll 4L \Rightarrow R \ll \sqrt{\frac{4L}{C}} = 2000\Omega$ (**resistenza critica**), potremo approssimare la [14] con

$$\frac{2\pi\alpha}{w_s} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad [15]$$

3.2 Confronto con i dati sperimentali

Durante l'esperimento sono state prese le misure relative alla tensione dei primi due picchi mostrati dall'oscilloscopio. In totale quest'operazione è stata svolta per 6 diversi valori della resistenza R . Si propone una tabella che riassume i dati raccolti

Resistenza (Ω)	Primo picco (V)	Secondo picco (V)
200	1,1	0,6
300	1,6	0,6
400	2,0	0,55
500	2,2	0,5
600	2,75	0,45
700	3,05	0,35

Tabella 1: Tabella dei valori di resistenza e relativi picchi di tensione.

Prima di valutare il decremento logaritmico nei 6 casi, si analizzerà in dettaglio il primo, cioè $R_1 = 200\Omega$. Dall'equazione [11] siamo in grado di prevedere l'intensità dei picchi di tensione in corrispondenza di t_1 e t_2 , tuttavia, per non complicare inutilmente la trattazione derivando tale formula e valutandola nei punti di massimo, ci si baserà sulla rappresentazione grafica della funzione. Si mostra ora l'output dell'oscilloscopio per R_1 e il relativo andamento della funzione $u_{R1}(t)$

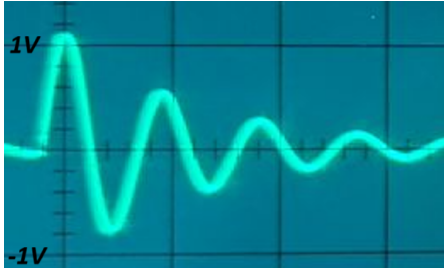


Figura 3: Segnale dell'oscilloscopio.

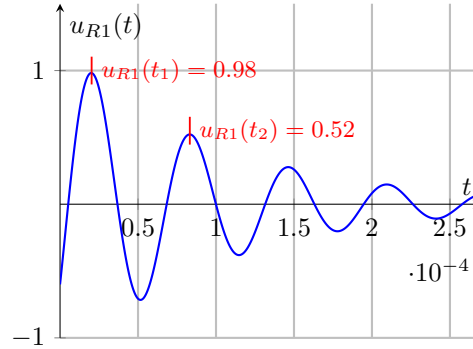


Figura 4: Grafico di $u_{R1}(t)$

Si nota subito la notevole somiglianza tra le due curve, che assumono, in buona approssimazione, gli stessi valori. Senza mostrare graficamente l'andamento della tensione ai capi della resistenza anche negli altri casi, si propone direttamente una tabella riassuntiva contenente il decremento logaritmico ricavato sperimentalmente confrontato con quello teorico (approssimato), ottenuto mediante l'equazione [15]

R (Ω)	$u_r(t_1)$	$u_r(t_2)$	Sperimentale	Teorico
200	1.10	0.60	0.61	0.63
300	1.60	0.60	0.98	0.94
400	2.00	0.55	1.29	1.26
500	2.20	0.50	1.48	1.57
600	2.75	0.45	1.81	1.88
700	3.05	0.35	2.16	2.20

Tabella 2: Tabella riassuntiva sui decrementi logaritmici

Di seguito è proposto un grafico che mette in evidenza l'andamento dei decrementi logaritmici al variare della resistenza R

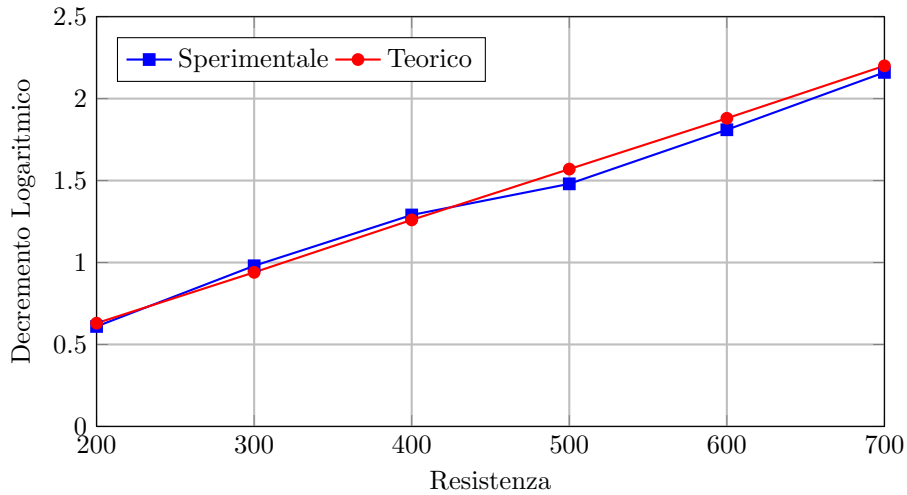


Figura 5: Confronto tra decremento logaritmico sperimentale e teorico in funzione di R .

4 Analisi smorzamento critico alla risonanza

Nella seconda parte dell'esperimento il circuito è stato alimentato con una tensione sinusoidale a 11 diverse frequenze: quella di risonanza, 5 più alte e 5 più basse. In seguito è stato calcolato il fattore di merito della rete basandosi sul grafico tensione-frequenza. Durante questa fase la resistenza è stata mantenuta costante a 1000Ω .

4.1 Breve accenno teorico

Di nuovo, per prima cosa, è utile visualizzare la rete elettrica su cui dovremo fare i calcoli

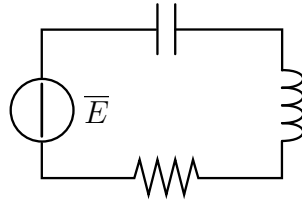


Figura 6: Schema elettrico del circuito alimentato con tensione sinusoidale

Quello che ci interessa in questo caso è poter prevedere numericamente l'intensità della tensione $u_r(t)$ applicata ai capi della resistenza R . Al contrario di quanto fatto nella prima parte dell'esperimento, ora abbiamo a che fare con un circuito in regime stazionario, cioè un particolare tipo di regime variabile (tipicamente più semplice da risolvere).

In genere il primo passaggio della risoluzione consiste nel ricavare l'**impedenza** $\dot{Z}$ equivalente del circuito, in questo caso ci sono 3 componenti in serie, pertanto si avrà

$$\dot{Z} = R + iwL - i \frac{1}{wC} \quad [16]$$

Dopodichè, sapendo che il fasore della corrente $\bar{I}$ e quello della tensione $\bar{E}$ sono legati dalla relazione

$$\bar{E} = \dot{Z} \cdot \bar{I} \quad [17]$$

sarà facile ricavarsi il fasore della tensione sulla resistenza

$$\overline{U_r} = \overline{I} \cdot R = \frac{\overline{E}R}{R + iwL - i\frac{1}{wC}} \quad [18]$$

Poichè si è interessati al modulo della tensione applicata ai capi della resistenza, è opportuno riarrangiare l'equazione [18] in modo da distinguere chiaramente la parte reale da quella complessa

$$\overline{U_r} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}} \cdot R = \frac{\overline{E}R^2}{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2} - i \frac{\overline{E}R(wL - \frac{1}{wC})}{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2} \quad [19]$$

A questo punto, il calcolo dell'ampiezza massima di $\overline{U_r}$ è banale

$$u_{r;max}(w) = \frac{ER}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \quad [20]$$

Per quanto riguarda il **fattore di merito** esso viene definito come il rapporto fra tensione ai capi di induttore o condensatore e tensione di alimentazione, il tutto alla risonanza (per questo è indifferente l'uso della tensione sull'induttore o sul condensatore)

$$Q = \frac{U_l}{U} = \frac{U_c}{U} = \frac{w_0L}{R} = \frac{1}{w_0CR} \quad [21]$$

In alternativa può essere ricavato sperimentalmente a partire dal grafico che mette in relazione il rapporto $\frac{u_{r;max}(w)}{E}$ in funzione della pulsazione w . In particolare si dovrà calcolare il rapporto

$$Q = \frac{w_0}{w_2 - w_1} \quad [22]$$

dove w_1 e w_2 sono le frequenze alle quali il rapporto $\frac{u_{r;max}(w)}{E}$ vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$ del suo valore massimo, cioè 1. È 1 perchè alla risonanza, la serie tra induttore e condensatore si comporterà come un corto circuito, lasciando come unico componente della rete la resistenza, pertanto la tensione ai capi di essa sarà la stessa erogata dal generatore, dunque il rapporto fra queste grandezze sarà 1.

4.2 Confronto con i dati sperimentali

Nella seguente tabella si trovano i dati raccolti in laboratorio

Frequenza (Hz)	$u_{r,max}$ (V)	$u_{r,max}/E$
200000	2.3	0.511
180000	2.7	0.600
160000	3.2	0.711
140000	3.8	0.844
120000	4.2	0.933
100000	4.4	0.978
80000	3.8	0.844
60000	2.8	0.622
40000	1.8	0.400
20000	0.8	0.178
10000	0.4	0.089

Tabella 3: Tabella dei valori di $u_{r,max}$ in funzione della frequenza.

Tramite un software per il fit dei dati è stato possibile rappresentare graficamente la Tabella 3 e approssimare l'andamento dei punti con un polinomio¹ di ordine 6 . Di seguito è riportato il risultato

¹ $-0.0214 + 1.27 \cdot 10^{-5}x - 2.43 \cdot 10^{-10}x^2 + 7.53 \cdot 10^{-15}x^3 - 8.89 \cdot 10^{-20}x^4 + 4.21 \cdot 10^{-25}x^5 - 7.01 \cdot 10^{-31}x^6$

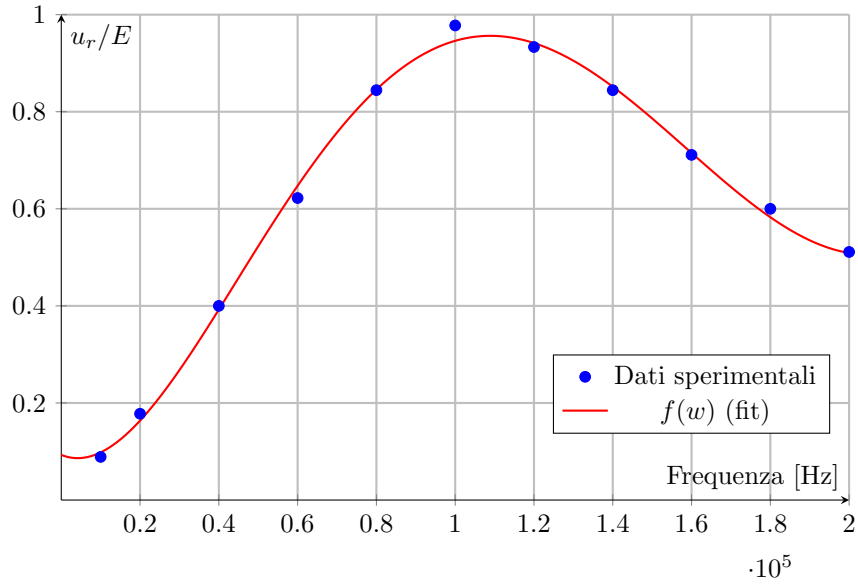


Figura 7: Confronto tra dati sperimentali e fit.

A questo punto è possibile, basandosi sul fit $f(w)$ dei dati sperimentali, calcolare il fattore di merito. Basterà ricavare w_1 e w_2 tali che

$$f(w_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(w_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad [23]$$

cioè $w_1 = 6,47 \cdot 10^4 Hz$ e $w_2 = 1,62 \cdot 10^5 Hz$. Il fattore di merito, ottenuto a partire dai dati sperimentali, sarà quindi

$$Q = \frac{w_0}{w_2 - w_1} = 1,031 \quad [24]$$

Tale valore è molto simile a quello previsto dalla teoria, infatti usando l'equazione [21] si sarebbe ottenuto $Q = 1$.

A titolo dimostrativo, si mostra ora il confronto tra l'andamento della tensione massima ai capi della resistenza previsto dall'equazione [20] e quello prodotto sperimentalmente

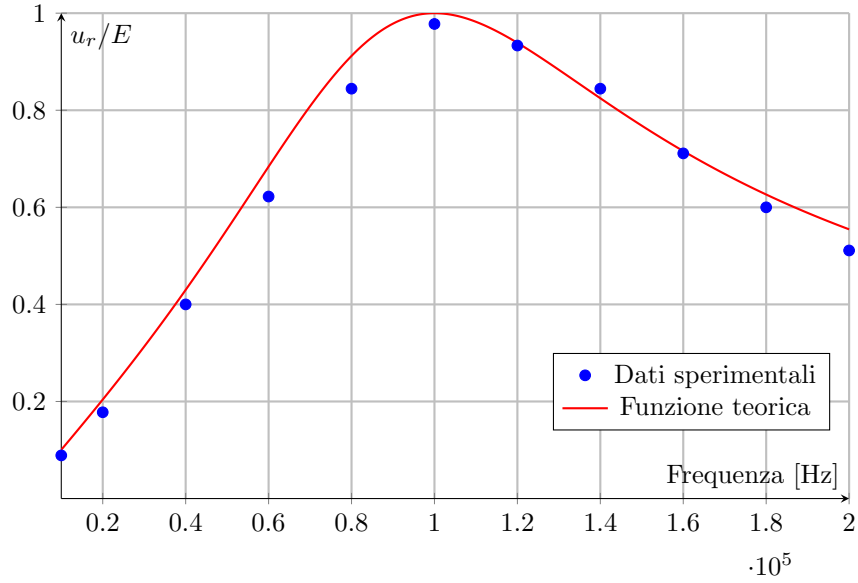


Figura 8: Confronto tra dati sperimentali e la funzione teorica.

5 Conclusioni

Dall'analisi svolta sull'oscillazione smorzata nel circuito RLC, si evidenzia una buona corrispondenza tra i risultati teorici e quelli sperimentali. In particolare, il decremento logaritmico della tensione ai capi della resistenza, calcolato sia attraverso l'analisi teorica sia misurato sperimentalmente, mostra un andamento coerente con il modello matematico. Questo dimostra che il comportamento oscillatorio del circuito, descritto dalle equazioni differenziali studiate, riflette accuratamente la realtà fisica.

Osservando i dati, si nota che all'aumentare della resistenza il decremento logaritmico cresce, confermando l'effetto di uno smorzamento maggiore, in linea con le previsioni teoriche.

Tuttavia, la stima dell'errore non è stata approfondita in modo rigoroso, e ciò rappresenta un aspetto che merita ulteriore considerazione. Gli scostamenti tra i valori teorici e quelli sperimentali, seppur contenuti, possono essere attribuiti a fattori come l'incertezza nella misura delle grandezze elettriche (tensione e corrente), le tolleranze dei componenti (resistenze, capacità e induttanze), e le approssimazioni nei modelli teorici.

Per fornire una stima dell'incertezza sui dati finali, si potrebbe considerare l'incertezza strumentale dichiarata dai dispositivi utilizzati (ad esempio il generatore o l'oscilloscopio). Un'analisi statistica più dettagliata, con più misure ripetute e una valutazione degli scostamenti, potrebbe migliorare la precisione dell'errore stimato, consentendo di assegnare intervalli di confidenza ai risultati ottenuti. L'inclusione di questa valutazione rafforzerebbe la validità delle conclusioni, fornendo un quadro più robusto della coerenza tra teoria e realtà.