

INSIEMI DEI NUMERI

$\mathbb{N}$ = NUMERI NATURALI $\mathbb{N}^+ = \text{NATURALI ESCLUSO } 0$ $\mathbb{Z}$ = INTERI $\mathbb{Q}$ = RAZIONALI $\mathbb{R}$ = REALI $\mathbb{C}$ = COMPLESSI

• UN INSIEME È COSTITUITO DA OGGETTI (NOTAZIONE BASE):

$a \in X$ o $X \ni a$ L'ELEMENTO a APPARTIENE A X

$a \notin X$ o $X \not\ni a$ L'ELEMENTO a NON APPARTIENE A X

$\emptyset$ = INSIEME VUOTO

ESEMPIO: $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = -1\}$

SOTTOINSIEMI

Y È SOTTOINSIEME DI X ($Y \subseteq X$) SE OGNI $a \in Y$ È ANCHE $a \in X$

Y È SOTTOINSIEME PROPRIO DI X ($Y \subset X$ o $Y \subsetneq X$) SE $Y \subseteq X$ $\wedge$ $X \neq Y$

OSS. 1 $X = Y \iff X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$

OSS. 2 $\emptyset \subseteq X \quad \forall X$

OSS. 3 $X \not\subseteq Y$ SE ESISTE UN $a \in X : a \notin Y$

INSIEME DELLE PARTI

• È UN INSIEME DI INSIEMI (TUTTI I POSSIBILI SOTTOINSIEMI DI UN INSIEME X):

$A = \{1, 2, 3\} \quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

UNIONE: $X \cup Y = \{a : a \in X \vee a \in Y\}$

INTERSEZIONE: $X \cap Y = \{a : a \in X \wedge a \in Y\}$

ESCLUSIONE: $X \setminus Y = \{a : a \in X \wedge a \notin Y\}$

PRODOTTO CARTESIANO: $X \times Y = \{(a, b) : a \in X, b \in Y\}$

↳ COPPIA ORDINATA:

È UN INSIEME FORMATO DA 2 ELEMENTI, IL PRIMO

APPARTIENE ALL'INSIEME A , IL SECONDO AL B → COORDINATE

ESEMPLI: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$

↳ $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$

SISTEMI LINEARI

- UN'EQUAZIONE LINEARE È DEFINITA IN n INCOLNITE $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ DI 1° GRADO CON COEFFICIENTI $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ E TERMINE NOTO $b \in \mathbb{R}$

ESEMPIO: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b \quad [1]$

$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ È SOLUZIONE DI $[1]$ SE $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + \dots + a_n s_n = b$

- DATA L'EQUAZIONE LINEARE $x + y = -1$ LA COPPIA ORDINATA $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ È SOLUZIONE

• SISTEMA LINEARE

m EQUAZIONI LINEARI IN n INCOLNITE

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

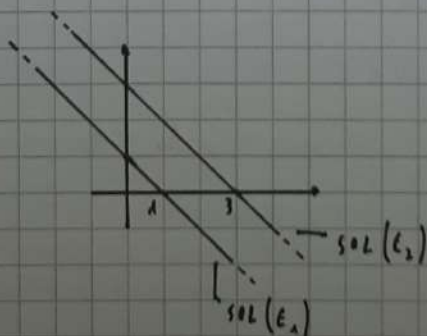
$a_{ij} \rightarrow i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ T. NOTO

$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ È SOLUZIONE DI S SE È SOLUZIONE DI OGNI EQUAZIONE DI S

$$\text{SOL}(S) = \text{SOL}(E_1) \cap \text{SOL}(E_2) \cap \text{SOL}(E_3) \dots \text{SOL}(E_m)$$

• SISTEMI INSOLVIBILI

$$S: \begin{cases} x = 1 - y \\ x = 3 - y \end{cases}$$



$$\text{SOL}(S) = \text{SOL}(E_1) \cap \text{SOL}(E_2) = \emptyset$$

MATRICE

• È UNA TABELLA DI QUESTO TIPO:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \text{ RIGHE} \\ n \text{ COLONNE} \end{matrix} \rightarrow \text{MATRICE } m \times n$$

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}) \text{ MATRICE RIGA } 1 \times n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \text{ MATRICE COLONNA } m \times 1$$

• DATA UNA MATRICE $A \ m \times n$ ABBIAMO:

$$A_{(i)} = (a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ \dots \ a_{in}) \text{ CON } i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$$

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ CON } j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \quad A_{(1)} = (1 \ 2) \quad A_{(2)} = (4 \ 8) \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

• MATRICE COMPLETA E DEI COEFFICIENTI

$$S: \begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \dots + v_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ v_{m1}x_1 + v_{m2}x_2 + \dots + v_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{1n} \\ v_{m1} & v_{m2} & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_m \end{vmatrix}}_{\text{MATRICE DEI COEFFICIENTI T. NOTO}} = \text{MATRICE COMPLETA DI } S \quad (A|b)$$

SISTEMI EQUIVALENTI

- 2 SISTEMI LINEARI CON LO STESSO NUMERO DI INCOGNITE SONO EQUIVALENTI SE:

$$\text{SOL}(S) = \text{SOL}(S')$$

- DUNQUE, PER RISOLVERE UN S. LINEARE, È UTILE RICONDURSI AD UN PIÙ SEMPLICE S. EQUIVALENTE

OPERAZIONI ELEMENTARI NEI SISTEMI LINEARI

- PER RICONDURSI A S. LINEARI PIÙ SEMPLICI SI POSSONO EFFETTUARE ALCUNE OPERAZIONI:

I. SCAMBIARE EQUAZIONI TRA LORO

II. MOLTIPLICARE I COEFFICIENTI DI UN'EQUAZIONE PER UN $r \in \mathbb{R}^*$ $\rightarrow$ ESCLUSO LO 0

III. SOMMARE IN UN'EQUAZIONE IL MULTIPLO DI UN'ALTRA EQUAZIONE

ESEMPIO:

$$S \begin{cases} x - 2y = 1 & (E_1) \\ 2x + y = 0 & (E_2) \end{cases} \xrightarrow[\text{I}]{E_1 \leftrightarrow E_2} S' \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{II}]{E_1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot E_1} S'' \begin{cases} 2x + y = 0 \\ \frac{1}{2}x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{III}]{E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1} S''' \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -\frac{7}{2}x - 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

TEOREMA: SE APPLICHIAMO OPERAZIONI LINEARI ELEMENTARI AD UN SISTEMA LINEARE S OTTENIAMO UN SISTEMA S' EQUIVALENTE A S .

PER DIMOSTRARE IL TEOREMA È UTILE PASSARE PER LA DIMOSTRAZIONE DI 2 LEMMI

LEMMA 1: SE $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ È SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE LINEARE $E = v_1 x_1 + v_2 x_2 \dots + v_n x_n = b$

ALLORA $\forall r \in \mathbb{R}^*$: $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ È SOLUZIONE DI $rE = r v_1 x_1 + r v_2 x_2 \dots + r v_n x_n = r b$

dim. SOSTITUISCO $v_1 s_1 + v_2 s_2 \dots + v_n s_n = b \rightarrow r(v_1 s_1 + \dots + v_n s_n) = r b \rightarrow r v_1 s_1 + \dots + r v_n s_n = r b$
È UN NUMERO REALE, NO INCOGNITE OP. TRA N. REALI, POSSO PARLARE PROP. DISTRIBUTIVA $\rightarrow (s_1, \dots, s_n)$ È SOLUZIONE

LEMMA 2: SIANO $E_1: v_1 x_1 + \dots + v_n x_n = b$

$$E_2: v'_1 x_1 + \dots + v'_n x_n = b'$$

SE $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ È SOLUZIONE DI E_1 E DI E_2 ALLORA LO È ANCHE DI $E_1 + E_2$

$$\text{DOVE } E_1 + E_2 = (v_1 + v'_1)x_1 + (v_2 + v'_2)x_2 + \dots + (v_n + v'_n)x_n = b + b'$$

dim. SOSTITUIAMO LE SOLUZIONI AL POSTO DELLE INCOGNITE x , COSÌ POSSIAMO LAVORARE COME FOSSEMO NUMERI REALI:

$$E_1: v_1 s_1 + \dots + v_n s_n = b \quad \text{E} \quad E_2: v'_1 s_1 + \dots + v'_n s_n = b'$$

INCHÉ $w = t$ E $x = y \rightarrow w + x = t + y$ ALLORA $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ È SOL. DI $E_1 + E_2$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA

- PER OPERAZIONI DEL I TIPO È OVVIO, NON MODIFICHIAMO L'INSIEME DELLE SOLUZIONI
- PER OPERAZIONI DEL II TIPO LE SOLUZIONI NON VARIANO, PER IL LEMMA 1
- PER OPERAZIONI DEL III TIPO AVREMO:

$$S \begin{cases} E_i \\ E_j \end{cases} \xrightarrow{\text{III}} S' \begin{cases} E_i + r E_j \\ E_j \end{cases}$$

PER VERIFICARE CHE $\text{sol}(S) = \text{sol}(S')$ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $\text{sol}(S) \subseteq \text{sol}(S')$ E $\text{sol}(S') \subseteq \text{sol}(S)$

1. $\text{sol}(S) \subseteq \text{sol}(S')$

$$\text{SIA } \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(S) \quad \text{ALLORA} \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(E_j) \rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(r E_j) \quad \text{LEMMA 1}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(E_i + r E_j) \quad \text{LEMMA 2}$$

2. $\text{sol}(S') \subseteq \text{sol}(S)$

$$\text{SIA } \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(S') \quad \text{ALLORA} \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(E_i + r E_j) \wedge \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(E_j) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(-r E_j) \quad \text{LEMMA 1} \rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(E_i) \quad \text{LEMMA 2} \quad \square$$

OPERAZIONI LINEARI NELLE RIGHE DI UNA MATRICE

I. SCAMBIARE TRA LORO RIGHE DISTINTE

II. MOLTIPLICARE I COEFFICIENTI DI UNA RIGA PER $\lambda \in \mathbb{R}^*$

III. SOMMARE ~~TRA LORO~~ AD UNA RIGA IL MULTIPLO DI UN'ALTRA

• NON UPOJO ESEMPI IN QUANTO SI TRATTA DELLE STESSÉ OPERAZIONI FATTE CON I SISTEMI LINEARI

MATRICE A SCALA E SCALA RIDOTTA

• UNA MATRICE A SCALA DEVE SODDISFARE LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1. LE RIGHE NULLE (CON COEFFICIENTI = 0) SI TROVANO IN BASSO

2. DATA UNA RIGA NON NULLA, IL PRIMO COEFFICIENTE NON NULO DEVE ESSERE 1 (1-DOMINANTE)

3. OGNI 1-DOMINANTE SI DEVE TROVARE A SINISTRA DEGLI 1-DOMINANTI DELLE RIGHE INFERIORI

• SE DOVESSE SODDISFARE, OLTRE A QUESTE, UN'ALTRA PROPRIETÀ SI CHIAMEREBBE "MAT. A SCALA RIDOTTA"

4. OGNI 1-DOMINANTE È L'UNICO COEFFICIENTE NON NULO DELLA COLONNA A CUI APPARTIENE

ALGORITMO DI GAUSS

• CONSISTE IN UNA SEQUE DI AZIONI DA COMPIERE PER TRASFORMARE OGNI MATRICE IN UNA A S. RIDOTTA

1. LA MATRICE NULLA È A SCALA RIDOTTA

2. SE LA MATRICE NON È NULLA CERCHIAMO LA PRIMA COLONNA DA SINISTRA CON COEFFICIENTE $k \neq 0$ E SCAMBIAMO LA PRIMA RIGA CON LA RIGA CHE CONTIENE k

3. MOLTIPLICHIAMO LA PRIMA RIGA PER $1/k$ OTTENENDO COSÌ IL PRIMO 1-DOMINANTE

4. TRASFORMIAMO IN 0 TUTTI I COEFFICIENTI DELLA COLONNA A CUI APPARTIENE L'1-DOMINANTE CON OPERAZIONI DEL III TIPO O SOMMANDO MULTIPLI OPPORTUNI DELLA PRIMA RIGA

5. RIPETIAMO PER LE ALTRE COLONNE I PASSAGGI 1, 2, 3, 4.

• È DIMOSTRABILE CHE LA FORMA A SCALA RIDOTTA DI UNA MATRICE A È UNIVOCAMENTE DETERMINATA DA A

INCOWNITE DOMINANTI

- DATO UN SISTEMA LINEARE S E LA SUA MATRICE DEI COEFFICIENTI A , LE INCOWNITE DOMINANTI DI S SONO QUELLE CHE CORRISPONDONO AGLI 1-DOMINANTI DELLA FORMA A SCALA RIDOTTA

$$S \begin{cases} y + 2z + 3w = 2 \\ z = 3 \\ x + w = -1 \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- IN QUESTO CASO LE INCOWNITE DOMINANTI SONO x, y E z

METODO DELL'ELIMINAZIONE DI GAUSS

- DATO UN SISTEMA LINEARE S CON MATRICE COMPLETA $(A|b)$ ESSO PUÒ ESSERE RISOLTO COSÌ:

- SI TRASFORMA $(A|b)$ A SCALA RIDOTTA U
- SE U PRESENTA RIGHE DEL TIPO $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 1)$ ALLORA S NON HA SOLUZIONI
- ALTRIMENTI, SE CI SONO, SI CONSIDERANO LE INCOWNITE NON DOMINANTI COME PARAMETRI
- SI USANO LE EQUAZIONI DI S' (CHE HA U COME MATRICE COMPLETA) PER OTTENERE LE SOLUZIONI DI S , SAPENDO CHE $SOL(S') = SOL(S)$

ESEMPIO:

$$S: \begin{cases} y + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) = U$$

$$S': \begin{cases} x - z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

z NON È
DOMINANTE

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$SOL(S') = SOL(S)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

SISTEMA LINEARE OMOGENEO

- DATO UN SISTEMA LINEARE S SE QUESTO HA TERMINE NOTO $= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ È DETTO OMOGENEO
- SI NOTI CHE UNA POSSIBILE SOLUZIONE È DATA DAL VETTORE NULLO $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

RANGO DI UNA MATRICE

- CONSISTE NEL NUMERO DI 1-DOMINANTI NELLA FORMA A SCALA RIDOTTA DI A

$$\text{RANGO DI } A = R_y(A)$$

$$R_y(A) \leq m \text{ (RIGHE MATRICE)}$$

$$R_y(A) \leq n \text{ (COLONNE MATRICE)}$$

PROPOSIZIONE:

- SIA S UN SISTEMA LINEARE IN m EQUAZIONI (RIGHE) E n INCOGNITE (COLONNE) E SUPPONIAMO CHE ABBA SOLUZIONI
- SIA A LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DI S E SIA $r = R_y(A)$
- INDICHIAMO CON r IL NUMERO DI INCOGNITE DOMINANTI (1 PER OGNI 1-DOMINANTE) E CON $n-r$ IL NUMERO DI INCOGNITE NON DOMINANTI

CI SARANNO 2 POSSIBILITÀ: ① $r = n \rightarrow S$ HA 1 SOLUZIONE

② $r < n \rightarrow S$ HA ∞ SOLUZIONI (CHE DIPENDONO DA $n-r$ PARAMETRI)

- UN SISTEMA LINEARE PUÒ AVERE 0, 1 O INFINITE SOLUZIONI

TEOREMA DI CRAMER

- SIA S UN SISTEMA LINEARE IN n EQUAZIONI E n INCOGNITE, SE $R_y(A) = n$ (DOVE A È LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DI S) ALLORA S HA UN'UNICA SOLUZIONE

dim.

SIA U LA FORMA A SCALA RIDOTTA DI A , SAPPIAMO CHE $R_y(U) = R_y(A) = n$ PER HP.

U È UNA MATRICE $n \times n$ CON n 1-DOMINANTI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

CHIAMIAMO $B = (A|b)$ LA MATRICE COMPLETA DI S , ALLORA LA FORMA A SCALA RIDOTTA DI B È:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{array} \right)$ OTTENUTA ACCOSTANDO LA COLONNA b (DEI TERMINI NOTI) ALLA U

→ L'UNICA SOLUZIONE DI $(U|b')$ È b' $\square$

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

• SIA S UN SISTEMA LINEARE CON m EQUAZIONI E n INCOLNITE, CHIAMIAMO $(A|b)$ LA MATRICE COMPLETA DI S

• S HA SOLUZIONI $\iff R_y(A) = R_y(A|b)$

dim.

È UTILE OSSERVARE CHE $0 \leq R_y(A) = R_y(A|b) \leq R_y(A) + 1 = R_y(A|b)$

• SIA U LA FORMA A SCALA RIDOTTA DI A CON $r = R_y(A) = R_y(U)$ [0]

$$U = \left(\begin{array}{c|c} * & \\ \hline 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} r \text{ RIGHE (CON 1-DOMINANTI)} \\ m-r \text{ RIGHE} \end{array}$$

• SIA $(U|b')$ LA MATRICE OTTENUTA DA $(A|b)$ MEDIANTE LE STESSA OPERAZIONI ELEMENTARI CHE HANNO PORTATO DA A AD U

$$(U|b') = \left(\begin{array}{c|c} * & b'_1 \\ \hline & b'_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array} \right) \quad R_y(A|b) = R_y(U|b') \quad [1]$$

• PER DIMOSTRARE LA VERIDICITÀ DELLA DOPPIA IMPLICAZIONE ISOLIAMO LE SINGOLE IMPLICAZIONI

($\Leftarrow$) SUPPONIAMO CHE $R_y(A) = R_y(A|b)$, ALLORA PER LA [1] E LA [0] SAPPIAMO CHE $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$ E $(U|b')$ È LA FORMA A SCALA RIDOTTA DI $(A|b)$

$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ HA SOLUZIONI PERCHÉ NON CI SONO RIGHE DEL TIPO } (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 1) \end{array} \right.$

($\Rightarrow$) PER DIMOSTRARE TALE IMPLICAZIONE SFRUTTIAMO IL TEOREMA DELLA CONTRONOMINALE (APP. ANALISI I)

$$P \rightarrow Q \iff (\neg Q) \rightarrow (\neg P) \quad \underbrace{S \text{ HA SOLUZIONE}}_P \quad \underbrace{R_y(A) = R_y(A|b)}_Q$$

• DIMOSTRIAMO CHE $R_y(A) \neq R_y(A|b) \rightarrow S$ NON HA SOLUZIONE

SE $R_y(A) \neq R_y(A|b)$ ALLORA $R_y(A) + 1 = R_y(A|b)$, PER LA [0] E LA [1] POSSIAMO SCRIVERE CHE:

$R_y(U|b) = R_y(U) + 1$, CIÒ SIGNIFICA CHE $\exists i \in \{r+1, \dots, m\} : b'_i \neq 0$, DUNQUE NELLA

FORMA A SCALA RIDOTTA DI $(A|b)$ C'È UNA RIGA DEL TIPO $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 1)$. S NON HA SOLUZIONI $\square$

MATRICI

CAMPO

• UN CAMPO È UN INSIEME NON VUOTO K DOTATO DI 2 OPERAZIONI (SONO FUNZIONI)

$$+ : K \times K \longrightarrow K$$
$$(a, b) \longmapsto a + b$$

$$\cdot : K \times K \longrightarrow K$$
$$(a, b) \longmapsto a \cdot b$$

• TALI FUNZIONI ~~SONO~~ DEVONO SODDISFARE LE SEGUENTI PROPRIETÀ :

① $\forall a, b, c \in K, (a + b) + c = a + (b + c)$

P. ASSOCIATIVA

② $\forall a, b \in K, a + b = b + a$

P. COMMUTATIVA

③ $\exists 0 \in K, : \forall a \in K : a + 0 = a$

EL. NEUTRO DELLA SOMMA

④ $\forall a \in K, \exists -a \in K : a + (-a) = 0$

EL. OPPOSTO

⑤ $\forall a, b, c \in K : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

P. ASSOCIATIVA

⑥ $\forall a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a$

P. COMMUTATIVA

⑦ $\exists 1 \in K : \forall a \in K : a \cdot 1 = a$

EL. NEUTRO DELLA MOLTIPLICAZIONE

⑧ $\forall a \in K^*, \exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = 1$

EL. INVERSO

ESEMPLI:

$\mathbb{R}$ È UN CAMPO, $\mathbb{Q}$ È UN CAMPO, $\mathbb{C}$ È UN CAMPO, $\mathbb{Z}$ NON È UN CAMPO (NO ⑧)

CARATTERISTICHE MATRICI

$$A = (v_{ij}) \begin{matrix} i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{1, \dots, n\} \end{matrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

$v_{ij} \in \mathbb{K}$ SONO I COEFFICIENTI DI A

$A_{(i)}$ È L' i -ESIMA RIGA DI A CON $i \in \{1, \dots, m\}$

$A_{(j)}$ È LA j -ESIMA COLONNA DI A CON $j \in \{1, \dots, n\}$

$m \times n$ È LA DIMENSIONE DELLA MATRICE

LE MATRICI 1×1 SONO IDENTIFICATE NEGLI ELEMENTI DI $\mathbb{K}$, PRENDONO IL NOME DI SCALARI:

$$M_{1 \times 1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$$

DUE MATRICI $A = (v_{ij})$ E $B = (b_{ij})$ SONO CONSIDERATE UGUALI SE:

HANNO LA STESSA DIMENSIONE $\wedge v_{ij} = b_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \wedge j \in \{1, \dots, n\}$

SOMMA DI MATRICI

DEFINIAMO SOMMA DI $A \in B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ LA MATRICE:

$$A+B := (v_{ij} + b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

SI NOTI CHE LA SOMMA DI MATRICI È UN'OPERAZIONE IN $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, OVVERO:

$$\begin{aligned} + : M_{m \times n}(\mathbb{K}) \times M_{m \times n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto A+B \end{aligned}$$

QUESTA OPERAZIONE SODDISFA ANCHE LE PROPRIETÀ: ①, ②, ③, ④

MATRICE NULLA = TUTTI I COEFFICIENTI = 0

MOLTIPLICAZIONE MATRICE PER SCALARE

• DATA UNA MATRICE $A = (v_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ DEFINIAMO IL PRODOTTO CON UNO SCALARE COSÌ:

$$K \times M_{m \times n}(K) \longrightarrow M_{m \times n}(K)$$

$$(c, A) \longmapsto cA := (cv_{ij})$$

ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = A \quad 2 = c \quad cA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ DI QUESTA MOLTIPLICAZIONE

• VALGA CHE $\forall A, B \in M_{m \times n}(K) \quad \forall c, d \in K$:

$$1) 1 \cdot A = A, \quad (-1) \cdot A = -A, \quad c \cdot 0_{m \times n} = 0_{m \times n} = 0 \cdot A$$

$$2) c(A+B) = cA + cB$$

$$3) (c+d)A = cA + dA$$

$$4) (cd)A = c(dA)$$

• DATI $A \in M_{m \times n}(K)$ E $c \in K$, $cA = 0_{m \times n} \iff \forall c = 0 \vee A = 0_{m \times n}$

dim:

$$(\leftarrow) \text{ SE } c = 0 \text{ ALLORA } 0 \cdot A = 0_{m \times n}$$

$$\text{SE } A = 0 \text{ ALLORA } c \cdot 0_{m \times n} = 0_{m \times n}$$

$$(\rightarrow) \text{ SE } cA = 0_{m \times n} \text{ VUOL DIRE CHE 1 DEI 2 FATTORI È PARIA 0, } c = 0 \vee A = 0_{m \times n}$$

DIAGONALE PRINCIPALE

• SIA $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$, LA DIAGONALE PRINCIPALE È FORMATA DALLI ELEMENTI DOVE:

$$i = j = (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots)$$

• SE $A \in M_{m \times n}(K)$ È QUADRATA ($n \times n$) ALLORA LA DIAGONALE PRINCIPALE È:

$$(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$$

TRASPOSTA

• LA TRASPOSTA DI $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ È LA MATRICE $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ TALE CHE:

$$a_{ij} \leftrightarrow a_{ji} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \\ \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

• LA TRASPOSTA SI OTTIENE MEDIANTE UNA RIFLESSIONE DEI COEFFICIENTI RISPETTO ALLA DIAGONALE PRINCIPALE

• SI OSSERVA CHE PER TALE TRASFORMAZIONE VALE:

$$M_{m \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n \times m}(\mathbb{K}) \\ A \longmapsto A^T$$

PROPRIETÀ DELLA TRASPOSTA

• SIANO $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $c \in \mathbb{K}$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

$$1) (A^T)^T = A$$

dim:

CONSIDERIAMO GLI ELEMENTI DI A :

$$(a_{ij}) = A \leftrightarrow (a_{ji}) = A^T \leftrightarrow (a_{ij}) = (A^T)^T$$

$$2) (cA)^T = cA^T$$

dim:

CONSIDERIAMO GLI ELEMENTI DI A :

$$(c \cdot a_{ij})^T = (ca_{ij})^T = ca_{ji} = c \cdot (a_{ji})^T = c \cdot A^T$$

$$3) (A+B)^T = A^T + B^T$$

dim:

CONSIDERIAMO GLI ELEMENTI DI A E B :

$$(a_{ij} + b_{ij})^T = [(a+b)_{ij}]^T = (a+b)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a_{ji}^T + b_{ji}^T = A^T + B^T$$

SIMMETRICA MATRICI (MATRICE SIMMETRICA)

• SE A È SIMMETRICA ALLORA VALE LA RELAZIONE:

$$A = A^T \iff A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$$

MATRICI IDENTITÀ

• SI DENOTANO CON IL SIMBOLO I_n E SONO MATRICI DEL TIPO:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICI DIAGONALI

• UNA MATRICE $D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ È DIAGONALE SE $\forall d_{ij} \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ CON $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO DI MATRICE

• SIANO $R = (r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_n) \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$ E

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

• DEFINIAMO IL PRODOTTO DI $C \cdot R$ IN QUESTO MODO:

$$R \cdot C = r_1 c_1 + r_2 c_2 + r_3 c_3 + r_4 c_4 + \dots + r_n c_n \in \mathbb{K}$$

ESEMPIO:

$$R = (1 \ 0 \ 3 \ 4) \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad R \cdot C = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 27$$

• IN GENERALE, SIANO $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ E $B = (b_{ij}) \in M_{n \times r}(\mathbb{K})$ IL PRODOTTO DI A E B È LA MATRICE C TALE CHE:

$$A \cdot B := C = (c_{ij}) \in M_{m \times r}(\mathbb{K}) \text{ DOVE}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

ESEMPIO:

$$\begin{matrix} A & & B \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad A \cdot B \text{ NON È DEFINITA}$$

$$\begin{matrix} 2 \times 3 & & 2 \times 2 \\ \text{-----} & & \\ & \neq & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A & & B \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad A \cdot B \text{ È DEFINITA}$$

$$\begin{matrix} 2 \times 2 & & 2 \times 3 \\ \text{-----} & & \\ & = & \end{matrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

VALLONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

$$\textcircled{1} \quad \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad A \cdot I_n = A$$

$$\forall B \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad B \cdot I_m = B$$

$$\textcircled{2} \quad \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n \times k}(\mathbb{K}), C \in M_{k \times h}(\mathbb{K})$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$\textcircled{3} \quad \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), \forall B, C \in M_{n \times k}(\mathbb{K}), \forall D \in M_{k \times h}(\mathbb{K})$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

$$\textcircled{4} \quad \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{n \times k}(\mathbb{K}), \forall c \in \mathbb{K}$$

$$c(AB) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$$

$$\textcircled{5} \quad \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{n \times k}(\mathbb{K})$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

• $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ COMMUTANO SE $A \cdot B = B \cdot A$

POTENZE DI MATRICI

• DATA $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ SI DÀ LA SEGUENTE DEFINIZIONE PER INDUZIONE:

$$A^0 := I_n, \quad A^1 := A, \quad A^{n+1} := A^n \cdot A$$

PROPRIETÀ MOLTIPLICAZIONI MATRICI

• SIANO DATI ~~MAI~~ $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$, VALE ALLORA:

$$\textcircled{1} \quad B \cdot A = (B \cdot A^{(1)} \quad B \cdot A^{(2)} \quad \dots \quad B \cdot A^{(n)})$$

$$C = B \cdot A \rightarrow C^{(n)} = B \cdot A^{(n)}$$

$$\textcircled{2} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \quad A \cdot b = b_1 \cdot A^{(1)} + b_2 \cdot A^{(2)} + \dots + b_n \cdot A^{(n)}$$

MATRICI E SISTEMI LINEARI

- SIA S UN SISTEMA LINEARE IN n INCOGNITE E m EQUAZIONI A COEFFICIENTI IN $\mathbb{K}$, SIA A LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DI S , b VETTORE DEL TERMINE NOTO

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- PER LA PROPRIETÀ ENUNCIATA IN (1) POSSIAMO SCRIVERE: $AX = b$. INFATTI:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

INVERSIONE MATRICI

- SIANO DATI $(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$, A CUI RISPONDE I_n , L'ELEMENTO NEUTRO (POICHÉ SI HA CHE $\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$)

- DATA LA MATRICE $A \in M_n(\mathbb{K})$, UNA MATRICE C È INVERSA DI A SE:

$$A \cdot C = C \cdot A = I_n$$

- IN TAL CASO A SI DIREBBE INVERTIBILE, E LA SUA INVERSA SI DENOTEREBBE CON A^{-1}
- È STATA INTRODOLTA UNA NOTAZIONE PER INDICARE L'INSIEME DELLE MATRICI INVERTIBILI A COEFFICIENTI IN $\mathbb{K}$:

$$\xrightarrow{\text{GRUPPO LINEARE}} GL_n(\mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A \text{ È INVERTIBILE}\}$$

- SI OSSERVA CHE SE $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ALLORA ANCHE $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$

DEFINIZIONE DI GRUPPO

- UN GRUPPO $(G, \cdot)$ È UN INSIEME NON VUOTO CON UN'OPERAZIONE BINARIA $\cdot: G \times G \rightarrow G$ CHE SODDISFA LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA. G HA ELEMENTO NEUTRO E OGNI $a \in G$ HA UN'UNICA INVERSA

PROPRIETÀ INVERSE

• SIANO $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, ALLORA:

1) SE A È INVERTIBILE ALLORA A^{-1} È INVERTIBILE E $(A^{-1})^{-1} = A$

2) SE A, B SONO INVERTIBILI ALLORA $A \cdot B$ È INVERTIBILE E $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3) SE A È INVERTIBILE E $k \in \mathbb{N}$ ALLORA A^k È INVERTIBILE E $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

4) SE A È INVERTIBILE ALLORA LA TRASPOSTA DI A È INVERTIBILE E $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

5) SE A È INVERTIBILE E c È UNO SCALARE ALLORA cA È INVERTIBILE E $(cA)^{-1} = c^{-1} A^{-1}$

• PER QUANTO RIGUARDA LE POTENZE DI MATRICI VALE:

$$- A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ E } k, m \in \mathbb{N} \quad A^k \cdot A^m = A^{k+m}$$

$$- A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ E } k, m \in \mathbb{N} \quad A^k \cdot A^m = A^{k+m}$$

$$- A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ E } k, m \in \mathbb{N} \quad A^k \cdot A^m = A^m \cdot A^k$$

• SI NOTI CHE SE $A \in M_n(\mathbb{K})$ E $\exists k \in \mathbb{Z}^+ : A^k = I_n$ ALLORA A È INVERTIBILE:

$$- \text{SE } k=1 \text{ ALLORA } A^1 = I_n \text{ E QUINDI } A = I_n$$

$$- \text{SE } k=-1 \text{ ALLORA } A^{-1} = I_n \text{ E QUINDI } A = I_n$$

$$- \text{SE } |k| > 1 \text{ ALLORA DA } A^k = I_n \text{ SEGRE } A^{k-1} \cdot A = I_n \text{ CIOÈ } A^{k-1} = A^{-1}$$

TEOREMA SULLE CONDIZIONI DI INVERTIBILITÀ

• DATA $A \in M_n(\mathbb{K})$ LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI:

1) A È INVERTIBILE

2) IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO $AX=0$ HA SOLO LA SOLUZIONE $X=0$

3) LA FORMA A SCALA RIDOTTA DI A È I_n

4) $\forall b \in \mathbb{K}^n$ IL SISTEMA LINEARE $AX=b$ HA UN'UNICA SOLUZIONE $X=A^{-1} \cdot b$

$$5) \exists C \in M_n(K) : A \cdot C = I_n$$

ALGORITMO DI INVERSIONE

• SIA $A \in M_n(K)$ INVERTIBILE, È DIMOSTRABILE CHE VALE IL SEGUENTE TEOREMA:

- LA FORMA A SCALA RIDOTTA DI A È I_n . SE I_n È OTTENUTA DA A CON UNA CERTA SUCCESSIONE DI OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE, ALLORA SE APPLICHIAMO LA STESSA SUCCESSIONE DI OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE A I_n TROVEREMO A^{-1}

• DEFINIAMO MATRICI ELEMENTARI QUELLE OTTENUTE DA I_n CON OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE, ESSE SONO INVERTIBILI

• NE CONSEGUE CHE :

$$\exists E_1, E_2, E_3, \dots, E_k \text{ MATRICI ELEMENTARI} : (E_k \dots E_3 E_2 E_1) A = I_n$$

CHIAMIAMO $E = E_k \dots E_3 E_2 E_1$ AVREMO QUINDI $EA = I_n$ CON $E = A^{-1}$

$$(A | I_n) \xrightarrow{\text{M.E.L.}} (I_n | A^{-1})$$

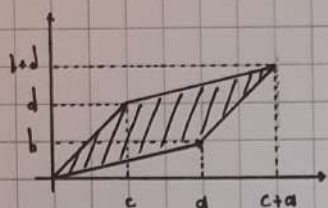
DETERMINANTE

• DEFINIAMO IL DETERMINANTE PER DUE CASI SEMPLICI:

$$n = 1 \quad M_n(\mathbb{K}) \quad \det(a) := a$$

$$n = 2 \quad M_n(\mathbb{K}) \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$$

• SI NOTI UN'INTERESSANTE APPLICAZIONE DEL DETERMINANTE



$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{AREA PARALLELOGRAMMA}$$

• DEFINIAMO IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE $A \in M_n(\mathbb{K})$ COSÌ:

$$\det(A) := a_{11} C_{11}(A) + a_{12} C_{12}(A) + \dots + a_{1n} C_{1n}(A)$$

↳ SVILUPPO ~~in forma~~
DI LAPLACE SULLA 1ª RIGA

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot C_{11}(A) + (-3) C_{12}(A) + 7 C_{13}(A)$$

• DOVE C_{ij} È IL COFATTORE DELLA MATRICE, COSÌ DEFINITO:

A_{ij} È LA MATRICE $(n-1) \times (n-1)$ OTTENUTA DA A TOLLENDO L' i -ESIMA RIGA E LA j -ESIMA COLONNA. L' (i, j) -ESIMO COFATTORE DI A È $C_{ij}(A) := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$

• PERCIÒ $\det(A) = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 16 + 7 \cdot (-4) = 36$

TEOREMA

• DATA $A \in M_n(\mathbb{K})$, IL $\det(A)$ COINCIDE CON LO SVILUPPO DI LAPLACE RISPETTO ALL' i -ESIMA RIGA
 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ E CON LO SVILUPPO DI LAPLACE RISPETTO ALLA j -ESIMA COLONNA
 $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$

COLLOLLARIO

• SE $A \in M_n(\mathbb{K})$ HA UNA RIGA O UNA COLONNA NULLA ALLORA HA $\det(A) = 0$

• VALE CHE DATA I_n , $\det I_n = 1$

• SE $A \in M_n(\mathbb{K})$ ALLORA $\det(A) = \det(A^T)$

SPIEGAZIONE: LO SVILUPPO DI LAPLACE RISPETTO ALLA PRIMA RIGA DI A CORRISPONDE ALLO SVILUPPO DI LAPLACE RISPETTO ALLA PRIMA COLONNA DI A^T

TEOREMA DEL PRODOTTO

• SIANO $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ VALE QUANTO SEGUE:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

• SEGUE DIRETTAMENTE CHE:

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$$

OPERAZIONI ELEMENTARI E DETERMINANTE

1. SE B È OTTENUTA DA A CON OPERAZIONI DEL I TIPO ALLORA $\det(B) = \det(A)$

2. SE B È OTTENUTA DA A CON OPERAZIONI DEL II TIPO ALLORA $\det(B) = k \cdot \det(A)$

3. SE B È OTTENUTA DA A CON OPERAZIONI DEL III TIPO ALLORA $\det(B) = \det(A)$

COLLOLLARIO

• SE $A \in M_n(\mathbb{K})$ HA 2 RIGHE O 2 COLONNE UGUALI ALLORA HA $\det(A) = 0$

• SE $A \in M_n(\mathbb{K})$ E $c \in \mathbb{K}$ ALLORA $\det(cA) = c^n (\det A)$ (APPLICANDO n VOLTE 2.)

COROLLARIO TEOREMA DEL PRODOTTO

• $A \in M_n(K)$ $\wedge$ A È INVERTIBILE. SE $\det(A) \neq 0$ ALLORA VALE:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det A)^{-1}$$

dim: ($\Rightarrow$) SE A È INVERTIBILE PER DEFINIZIONE $\exists A^{-1} \in M_n(K) : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$
ALLORA $1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ DOVE I FATTORI SONO $\neq 0$

($\Leftarrow$) SUPPONIAMO $\det(A) \neq 0$, CHIAMIAMO U LA FORMA A SCALA RIDOTTA DI A
PER 1., 2., 3. $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(U) \neq 0$. DUNQUE U NON PUÒ AVERE
RIGHE NULLE E QUINDI $rk(U) = n$, PERCIÒ $U = I_n$. ORA SI PUÒ APPLICARE IL
TEOREMA DELLE CONDIZIONI DI INVERTIBILITÀ. (PUNTO 3)

AGGIUNTA DI UNA MATRICE

• DATA $A \in M_n(K)$, L'AGGIUNTA DI A È LA MATRICE TRASPOSTA DELLA MATRICE DEI
COFATTORI DI A , CIOÈ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 3 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AGG(A) = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 7 \\ -26 & 13 & -13 \\ 46 & -24 & 21 \end{pmatrix}$$

$$C_{11}(A) = \det \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = 11$$

$$C_{21}(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = -8$$

$$C_{12}(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = -26$$

$$C_{22}(A) = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 13$$

$$C_{13}(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 46$$

$$C_{23}(A) = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = -24$$

$$C_{31}(A) = 7 \quad C_{32}(A) = -13 \quad C_{33}(A) = 21$$

FORMULA DI AGGIUNZIONE

• DATA $A \in M_n(K)$ VALE:

$$A \cdot AGG(A) = AGG(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

REGOLA DI CRAMER

• SIA $A \in M_n(\mathbb{K})$ INVERTIBILE E $b \in \mathbb{K}^n$, ALLORA IL SISTEMA LINEARE

$S: AX = b$ HA UN'UNICA SOLUZIONE:

$$\text{sol} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = S; = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$$

• CON $i \in \{1, \dots, n\}$, $A_i(b)$ OTTENUTA DA A SOSTITUENDO LA i -ESIMA COLONNA CON b

$$\text{dim: } \text{sol}(s) = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det A} \cdot (A^{-1}A) \cdot b = \frac{1}{\det A} \cdot (C_{ji}(A)) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\det A} \cdot (b_1 C_{11}(A) + b_2 C_{21}(A) + \dots + b_n C_{n1}(A)) \\ \vdots \\ \frac{1}{\det A} \cdot (b_1 C_{1n}(A) + b_2 C_{2n}(A) + \dots + b_n C_{nn}(A)) \end{pmatrix}$$

$$\text{CON } \det(A_i(b)) = \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = b_1 C_{11}(A) + b_2 C_{21}(A) + \dots + b_n C_{n1}(A)$$

= SVILUPPO DI LAPLACE RISPETTO ALLA 1ª COLONNA

GEOMETRIA NELLO SPAZIO

GEOMETRIA EUCLIDEA NELLO SPAZIO

- 1) PER 2 PUNTI DISTINTI PASSA UNA E UNA SOLA RETTA
- 2) PER 3 PUNTI NON ALLINEATI PASSA UNO ED UN SOLO PIANO
- 3) SE UNA RETTA E UN PIANO SI INTERSECANO IN ALMENO 2 PUNTI ALLORA LA RETTA È CONTENUTA NEL PIANO
- 4) SE 2 PIANI DISTINTI HANNO UN PUNTO IN COMUNE ALLORA LA LORO INTERSEZIONE È UNA RETTA

POSIZIONI RECIPROCHE DI 2 RETTE

- **SKHEMBE** : SE NON SONO COMPLANARI (NON APPARTENGONO ALLO STESSO PIANO)
- **PARALLELE** : SE SONO COMPLANARI E NON SI INTERSECANO
- **INCIDENTI** : SE HANNO UN PUNTO IN COMUNE (SONO ANCHE COMPLANARI)

POSIZIONI RECIPROCHE DI 2 PIANI

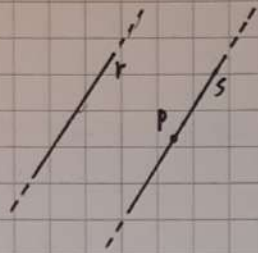
- **PARALLELI** : SE NON SI INTERSECANO
- **INCIDENTI** : SE SI INTERSECANO (IN UNA RETTA)

POSIZIONI RECIPROCHE DI PIANO E RETTA

- **PARALLELI** : SE NON SI INTERSECANO
- **INCIDENTI** : SE SI INTERSECANO IN UN PUNTO
- OPPURE LA RETTA È CONTENUTA NEL PIANO

ASSIOMA DELLE PARALLELE

- DATI UNA RETTA r E UN PUNTO P NELLO SPAZIO, ESISTE UN'UNICA RETTA s PASSANTE PER P E PARALLELA A r



- LA RELAZIONE DI PARALLELISMO TRA RETTE È RETTA DI EQUIVALENZA, PERTANTO GODRE DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $a R a$ (RIFLESSIVA)

- $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$ (TRANSITIVA)

- $a R b \Rightarrow b R a$ (SIMMETRICA)

- DATA R UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA, SE $X \neq \emptyset$ CHIAMIAMO CLASSE DI EQUIVALENZA DI $a \in X$:

$$[a]_R = \{b \in X : a R b\} \quad \text{E} \quad X/R = \{[a]_R : a \in X\}$$

- SI OSSERVA CHE L'INSIEME X È UGUALE ALL'UNIONE DI TUTTE LE CLASSI DI EQUIVALENZA PRESENTI IN X :

$$X = \bigcup_{a \in X} [a]_R$$

- NEL CASO IN CUI $a, b \in X$ E $[a]_R \neq [b]_R$ OVVERO $a \not R b$ ALLORA SAPIAMO CHE:

$$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$$

DEF: CHIAMIAMO DIREZIONE NELLO SPAZIO UNA CLASSE DI EQUIVALENZA DI RETTE PARALLELE

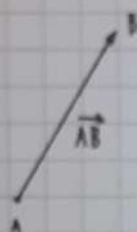
OSS: L'ASSIOMA DELLE PARALLELE EQUIVALE A DIRE CHE DATA UNA DIREZIONE, PER UN PUNTO DELLO SPAZIO

PASSA UN'UNICA RETTA IN QUELLA CLASSE DI EQUIVALENZA

DEF. DUE RETTE COMPLANARI SI RICONO **PERPENDICOLARI** O **ORTOGONALI** SE SONO INCIDENTI IN UN PUNTO IN CUI FORTANO 4 ANGOLI UGUALI. ANALOGAMENTE SONO PERPENDICOLARI NELLO SPAZIO LE RETTE r_1 E r_2 SE LE RETTE s_1 E s_2 , OTTENUTE TRASLANDO r_1 E r_2 IN UNO STESSO PUNTO P , SONO PERPENDICOLARI.

VETTORI NELLO SPAZIO

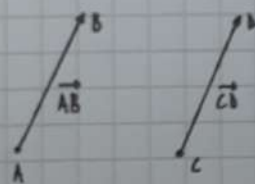
- DETERMINIAMO UN **VETTORE APPLICATO** $\overrightarrow{AB}$ DAL PUNTO DI APPLICAZIONE A , DALLA LUNGHEZZA $\|\overrightarrow{AB}\|$, DALLA DIREZIONE E DAL VERSO



- TRA I PUNTI DI UNA RETTA E I NUMERI REALI $\mathbb{R}$ ESISTE UNA CORRISPONDENZA BIUNIVUCA, PERCIÒ I PUNTI POSSONO ESSERE ORDINATI SECONDO 2 **VERSI** DI PERCORRERE.

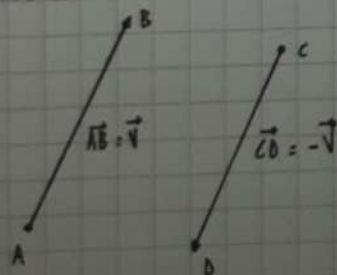
- DEFINIAMO **VETTORE GEOMETRICO** $\vec{v}$ UNA CLASSE DI EQUIVALENZA DI VETTORI APPLICATI RISPETTO ALLA RELAZIONE DI EQUIVALENZA $\sim$ DEFINITA SULL'INSIEME $\{\text{VETTORI APPLICATI NELLO SPAZIO}\}$ PONENDO $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ SE HANNO STESSA LUNGHEZZA, DIREZIONE E VERSO

$$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]_{\sim} = [\overrightarrow{CD}]_{\sim}$$

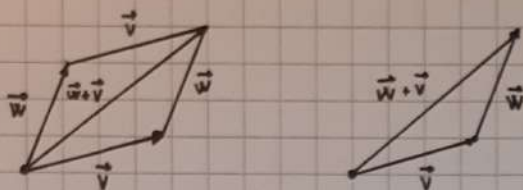


- DEFINIAMO **VETTORE NULLO** $\vec{0}$, CHE NON HA DIREZIONE O VERSO E HA LUNGHEZZA 0

- DATO IL VETTORE $\vec{v}$, CHIAMIAMO **OPPOSTO** DI $\vec{v}$ IL VETTORE $-\vec{v}$ CHE HA STESSA DIREZIONE E LUNGHEZZA DI $\vec{v}$ MA VERSO OPPOSTO



• DATI $\vec{v}$ E $\vec{w}$ VETTORI GEOMETRICI, LA SOMMA $\vec{v} + \vec{w}$ È DATA DALLA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA O DALLA REGOLA PUNTA-CODA:



• VALGONO QUINDI LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- 1) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ (VETTORE NULO)
- 2) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ (VETTORE OPPOSTO)
- 3) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ (COMMUTATIVA)
- 4) $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{z}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z}$ (ASSOCIATIVA)

• SIANO $\vec{v}$ E α RISPETTIVAMENTE UN VETTORE E UN NUMERO REALE DEFINIAMO COSÌ IL PRODOTTO:

$\alpha \cdot \vec{v}$ HA: LUNGHEZZA $\|\alpha \cdot \vec{v}\|$

DIREZIONE UVALE A $\vec{v}$

VERSO UVALE A $\vec{v}$ SE $\alpha > 0$

OPPOSTO A $\vec{v}$ SE $\alpha < 0$

• DATI I VETTORI GEOMETRICI $\vec{v}$ E $\vec{w}$, CON $\alpha, b \in \mathbb{R}$ VALGONO:

- 1) $\alpha (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{w}$ (DISTRIBUTIVA)
- 2) $\vec{v} (\alpha + b) = \alpha \vec{v} + b \vec{v}$ (DISTRIBUTIVA)
- 3) $(\alpha b) \vec{v} = \alpha \cdot (b \vec{v})$ (ASSOCIATIVA)
- 4) $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v} \wedge (1) \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (VETTORE NEUTRO)

• TALI PROPRIETÀ PERMETTONO DI DEFINIRE UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ COME:

$$V = \{ \text{VETTORI GEOMETRICI NELLO SPAZIO} \}$$

CON $+$: $V \times V \rightarrow V$

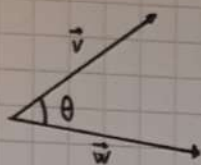
$$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$$

E

$\cdot$: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

$$(\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \vec{v}$$

• DATI 2 VETTORI $\vec{v}$ E $\vec{w}$ NON NULLI, L'ANGOLO θ TRA $\vec{v}$ E $\vec{w}$ APPARTIENE A $[0, \pi]$:



• NEL CASO IN CUI $\frac{\theta}{\pi} = \frac{\pi}{2}$ I VETTORI SI DICONO PERPENDICOLARI

• SIANO $\vec{v}$ E $\vec{w}$ DUE VETTORI NON NULLI, CON θ L'ANGOLO TRA $\vec{v}$ E $\vec{w}$, IL PRODOTTO SCALARE DI $\vec{v}$, $\vec{w}$ È:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \theta$$

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$$

• È DIMOSTRABILE LA SEGUENTE PROPOSIZIONE: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

dim: ($\Rightarrow$) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta = 0$ PERCHÉ $\|\vec{v}\| \neq 0$ E $\|\vec{w}\| \neq 0$ PER LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO SI HA $\cos \theta = 0$, CIÒ È $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$(\Leftarrow) \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ AVINDI } \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

• DUE VETTORI NON NULLI $\vec{v}$, $\vec{w}$ SONO PARALLELI SE HANNO LA STESSA DIREZIONE, CIÒ È SE θ È 0 O π

LEMMA: SIANO $\vec{v}$, $\vec{w}$ VETTORI NON NULLI ALLORA VALE:

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* : \vec{v} = t \cdot \vec{w}$$

dim: ($\Rightarrow$) SUPPONIAMO CHE $\vec{v}$ E $\vec{w}$ SIANO PARALLELI, ALLORA $\vec{v} \parallel t \cdot \vec{w} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$. ~~MA~~ (STESSA DIR.)

$$\text{SIA } t_0 = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{w}\|} > 0 \quad \|\vec{v}\| = \|t_0 \cdot \vec{w}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{w}\|} \cdot \|\vec{w}\| = \|\vec{v}\| \quad (\text{STESSO MODULO})$$

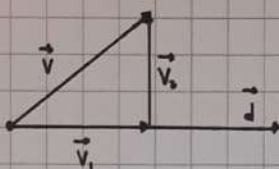
$$\text{SE } \vec{w} \text{ HA STESSO VERSO DI } \vec{v}, \text{ ALLORA } \vec{v} = t_0 \cdot \vec{w} \quad (\text{STESSO VERSO})$$

$$\text{SE } \vec{w} \text{ HA VERSO OPPOSTO A } \vec{v}, \text{ ALLORA } \vec{v} = -t_0 \cdot \vec{w} \quad (\text{STESSO VERSO})$$

(*) se $t\vec{w} = \vec{v}$ per $t \in \mathbb{R}^*$, per definizione si ha $t\vec{w} \parallel \vec{v}$ e quindi $\vec{w} \parallel \vec{v}$

TEOREMA DELLA PROIEZIONE

• SIANO $\vec{v}, \vec{d}$ VETTORI, CON $\vec{d} \neq \vec{0}$. DEFINIAMO LA PROIEZIONE DI $\vec{v}$ SU $\vec{d}$ COME:

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$$


$$\vec{v}_1 = \text{PROJ}_{\vec{d}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}$$

dim: $\vec{v}_1 \parallel \vec{d} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* : \vec{v}_1 = t \cdot \vec{d}$

$$\vec{v}_2 \perp \vec{d} \Rightarrow \vec{v}_2 \cdot \vec{d} = 0$$

$$0 = \vec{v}_2 \cdot \vec{d} = (\vec{v} - \vec{v}_1) \cdot \vec{d} = \vec{v} \cdot \vec{d} - \vec{v}_1 \cdot \vec{d} = \vec{v} \cdot \vec{d} - t \cdot \vec{d} \cdot \vec{d} = \vec{v} \cdot \vec{d} - t \cdot \|\vec{d}\|^2$$

$$t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \quad \frac{\vec{v}_1}{\vec{d}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \quad \vec{v}_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d} = \text{PROJ}_{\vec{d}}(\vec{v})$$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

• SIANO $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ VETTORI GEOMETRICI, VALGONO LE PROPRIETÀ:

1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ (COMMUTATIVA)

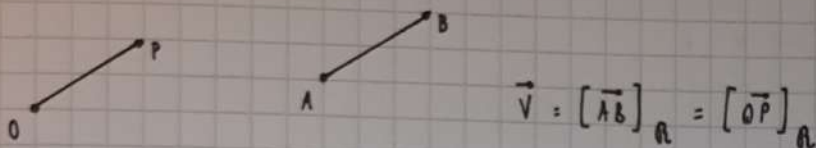
2) $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$ (DISTRIBUTIVA)

3) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \quad \forall \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

4) se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \alpha \cdot \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \alpha \cdot \vec{w}$ (ASSOCIATIVA)

SISTEMI DI RIFERIMENTO

- SCEGLIAMO O PUNTO DI ORIGINE, PER OGNI VETTORE APPLICATO $\overrightarrow{AB}$ ESISTE UN UNICO PUNTO P TALE CHE $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{OP}$:



- SI HA CHE SCELTO O , $\forall \vec{v}$ VETTORE GEOMETRICO ESISTE UN UNICO VETTORE APPLICATO RAPPRESENTANTE DI $\vec{v}$ CON PUNTO DI APPLICAZIONE IN O . C'È UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA:

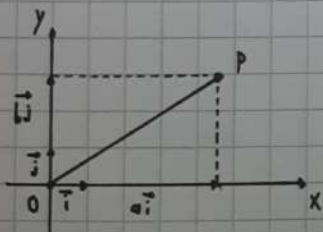
$$\{\text{VETTORI GEOMETRICI}\} \leftrightarrow \{\text{VETTORI APPLICATI CON PUNTO DI APP. IN } O\}$$

- CHIAMIAMO DUNQUE SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO LA QUATERNA $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ DOVE O È L'ORIGINE E $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ SONO DETTI VERSORI (L'È VETTORI DI LUNGHEZZA 1) A DUE A DUE PERPENDICOLARI, CHE FORMANO UNA TERNA DESTROSSA (IL VERSORE $\vec{i}$ NEL SOVRAPPORSI AL VERSORE $\vec{j}$, COMPIE UNA ROTAZIONE IN SENSO ORARIO ATTORNO AL VERSORE $\vec{k}$)

- PER OGNI VETTORE $\vec{v}$ ESISTONO E SONO UNICI $a, b, c \in \mathbb{R}$: $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ DOVE $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ CON $P = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. VALE PERCIÒ:

$$\{\text{VETTORI GEOMETRICI}\} \leftrightarrow \{\text{VETTORI APPLICATI CON CODA IN } O\} \leftrightarrow \{\text{PUNTI DELLO SPAZIO}\}$$

ESEMPIO:



- P HA COORDINATE (a, b)

$$\vec{OP} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$$

- AD OGNI PUNTO P CORRISPONDE UN VETTORE $\overrightarrow{OP}$

- VEDIAMO CHE $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{v}$, MENTRE NELLO SPAZIO AVREMO $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, CON $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ COORDINATE DI $\vec{v}$ RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

• SE $\vec{v}$ È UN VETTORE GEOMETRICO CON $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ E $\vec{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ VARRANNO:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}$$

$$k \in \mathbb{R} \quad \vec{v} \cdot k = \begin{pmatrix} k a \\ k b \\ k c \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = (a \ b \ c) \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'$$

• DATI $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ E $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ AVREMO CHE:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1 P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2 = \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

PRODOTTO VETTORIALE

• SIANO $\vec{v}, \vec{w}$ VETTORI CON $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ DEFINIAMO **PRODOTTO VETTORIALE**:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \text{DET} \begin{pmatrix} \vec{i} & x_1 & x_2 \\ \vec{j} & y_1 & y_2 \\ \vec{k} & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \text{DET} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \vec{i} - \text{DET} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \vec{j} + \text{DET} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \vec{k}$$

• DEFINIAMO **PRODOTTO MISTO** DI $\vec{v}, \vec{z}, \vec{w}$ QUESTO: $\vec{v} \cdot (\vec{z} \times \vec{w}) \in \mathbb{R} \quad (= \text{DET}(\vec{v} \ \vec{z} \ \vec{w}))$

• NE CONSEGUE CHE $\vec{v} \times \vec{w}$ È PERPENDICOLARE A $\vec{v}$ E $\vec{w}$, INFATTI:

$$- \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \text{DET} \begin{pmatrix} \vec{v} & \vec{v} & \vec{w} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{DUE COLONNE UGUALI}$$

$$- \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \text{DET} \begin{pmatrix} \vec{w} & \vec{v} & \vec{w} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{DUE COLONNE UGUALI}$$

PROPRIETÀ PRODOTTO VETTORIALE

$$1) \vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}$$

$$2) \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} \quad \text{IL DETERMINANTE AVREBBE 2 O PIÙ COLONNE UGUALI}$$

$$3) \vec{w} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{w}) \quad \text{DET} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -(y_1 x_2 - x_1 y_2) = -\text{DET} \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

$$4) a \in \mathbb{R}, \quad a(\vec{v} \times \vec{w}) = (a\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (a\vec{w})$$

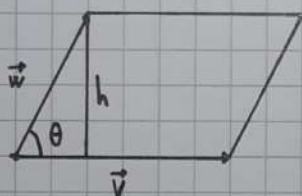
$$5) \vec{v} \times (\vec{z} + \vec{w}) = \vec{v} \times \vec{z} + \vec{v} \times \vec{w}$$

IDENTITÀ DI LAGRANGE

• DATI $\vec{v}, \vec{w}$ VETTORI NON NULLI, θ ANGOLO TRA $\vec{v}, \vec{w}$ L'IDENTITÀ DI LAGRANGE AFFERMA CHE:

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \theta$$

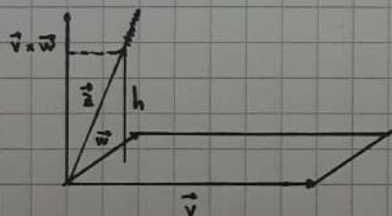
• NE CONSEGUO IL SEGUENTE SIGNIFICATO GEOMETRICO



$$h = \|\vec{w}\| \cdot \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v} \times \vec{w}\| &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \theta = \|\vec{v}\| \cdot h \\ &= \text{AREA DEL PARALLELOGRAMMA COSTRUITO SU } \vec{v} \text{ E } \vec{w} \end{aligned}$$

• È DIMOSTRABILE CHE $|\vec{z} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ È PARI AL VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO COSTRUITO A PARTIRE DA $\vec{z}, \vec{w}$ E $\vec{v}$:



$$h = \|\text{PROJ}_{\vec{v} \times \vec{w}}(\vec{z})\| \quad \text{AREA} = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$$

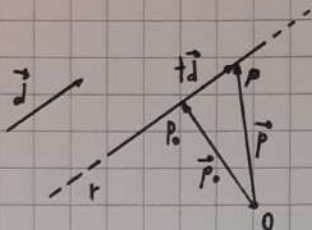
$$\text{VOLUME} = \text{AREA} \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \|\text{PROJ}_{\vec{v} \times \vec{w}}(\vec{z})\|$$

• AVREMO QUINDI CHE L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA SARÀ 0 ($\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$) SE E SOLO SE

$\vec{v} \parallel \vec{w}$. IL VOLUME SARÀ 0 QUANDO $\vec{v} \parallel \vec{w}$ O AVANDO $\vec{z} \perp \vec{v} \wedge \vec{w}$, CIOÈ QUANDO $\vec{z}$ APPARTIENGA ALLO STESSO PIANO DI $\vec{v}$ E $\vec{w}$

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

SIANO P_0 O $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ PUNTO E $\vec{d}$ VETTORE NON NULLO. ESISTE UNA SOLA RETTA r PASSANTE PER P_0 E CON DIREZIONE PARI A QUELLA DI $\vec{d}$



$$\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_0 = \vec{OP}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \exists P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ s.t. } \vec{p} = \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$* \Leftrightarrow \vec{p} - \vec{p}_0 = t \cdot \vec{d} \quad \text{PERCIÒ:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
 $\exists t \in \mathbb{R}$

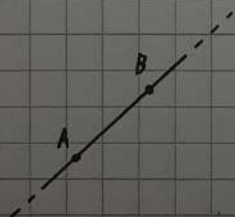
DUNQUE L'EQUAZIONE PARAMETRICA DI r È:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

CIÒ SIGNIFICA CHE TUTTI E SOLI I PUNTI DELLA RETTA r SONO:

$$\{ (x_0 + t \cdot a, y_0 + t \cdot b, z_0 + t \cdot c); t \in \mathbb{R} \}$$

ESERCIZIO: DETERMINARE LA RETTA r PER $A = (2, 0, -3)$ E $B = (1, 1, -5)$



$$P_0 = A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_r = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-0 \\ -5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$r: \begin{cases} 2 + t \cdot (-1) \\ 0 + t \cdot (1) \\ -3 + t \cdot (-2) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2 - t \\ t \\ -3 - 2t \end{cases}$$

ESERCIZIO: STABILIRE SE r E s SONO PARALLELE O PERPENDICOLARI.

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

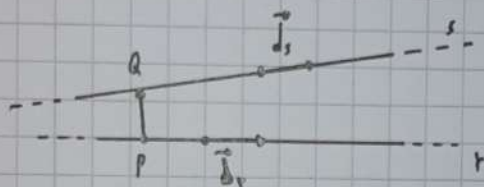
$$s: \begin{cases} x = k \\ y = -3 + 2k \\ z = 5 + k \end{cases}$$

$$\vec{d}_r = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow r \perp s$$

IN GENERALE AVREMO CHE DATE $r: \vec{OP} + t\vec{d}_r$ E $s: \vec{OQ} + k\vec{d}_s$ E $\vec{M} = \vec{PQ}$



$$\bullet r \perp s \Leftrightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 0$$

$$\bullet r \parallel s \Leftrightarrow \vec{d}_r \times \vec{d}_s = 0 \quad (0 \text{ SE } \vec{d}_r = \lambda \vec{d}_s)$$

$$\bullet r \text{ E } s \text{ INCIDENTI} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{M} \cdot (\vec{d}_r \times \vec{d}_s)}_{\text{COMPLANARI}} \text{ E } \underbrace{\vec{d}_r \times \vec{d}_s \neq 0}_{\text{NON PARALLELE}}$$

$$\bullet r \text{ E } s \text{ SONO SKEW} \Leftrightarrow \vec{M} \cdot (\vec{d}_r \times \vec{d}_s) \neq 0 \text{ - NON SONO COMPLANARI}$$

PIANO NELLO SPAZIO

DIAMO CHE UN VETTORE NON NULLO È VETTORE NORMALE DI UN PIANO π SE $\vec{n}$ È PERPENDICOLARE AD OGNI VETTORE IN π



NOTAZIONE:

$$\vec{n}_\pi$$

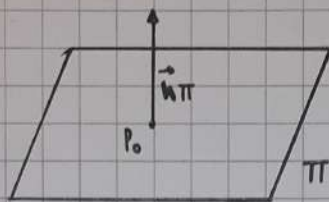
OSSERVIAMO CHE SE $\vec{d}$ È IL VETTORE DIREZIONE DI UNA RETTA r ALLORA

$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad t\vec{d}$ È VETTORE DIREZIONE DI r .

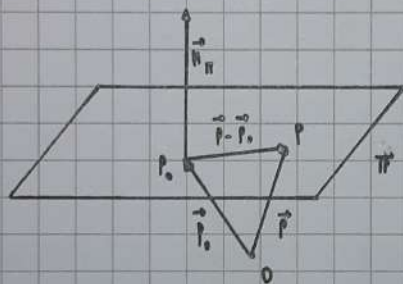
LA STESSA OSSERVAZIONE VALE ANCHE PER $\vec{n}$ VETTORE NORMALE AD UN PIANO π ,

$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad t\vec{n}$ È VETTORE NORMALE DI π .

SIA $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ E SIA $\vec{n}_\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ALLORA ESISTE UN UNICO PIANO π ORTOGONALE A $\vec{n}_\pi$ E PASSANTE PER P_0 .



EQUAZIONE CARTESIANA DI UN PIANO



$$P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \vec{P} - \vec{P}_0 \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot (\vec{P} - \vec{P}_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz = d \quad \text{CON } d = ax_0 + by_0 + cz_0 \quad \text{EQ. CARTESIANA DI } \pi$$

ESERCIZIO: TROVARE LA RETTA $r: \pi_1 \cap \pi_2$ (DATA ALL'INTERSEZIONE DI 2 PIANI)

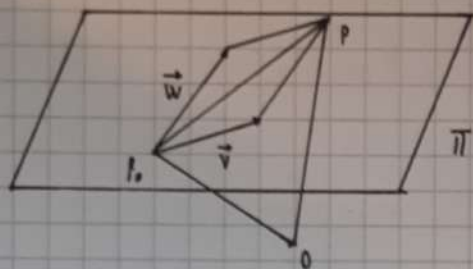
$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \rightarrow \pi_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \rightarrow \pi_2 \end{cases}$$

PER TROVARE $\vec{d}_r$ È SUFFICIENTE EFFETTUARE $\vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$. INFATTI COSÌ TROVEREMO UN VETTORE PERPENDICOLARE SIA A $\vec{n}_{\pi_1}$ CHE A $\vec{n}_{\pi_2}$.

EQUAZIONI PARAMETRICHE PER UN PIANO

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Il piano π è generato da $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e da $\vec{v}, \vec{w}$ vettori non nulli e non paralleli, dunque avremo:

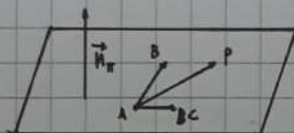
$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P} = \vec{OP_0} + t_1 \vec{v} + t_2 \vec{w}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Scrivendo i risultati in un sistema otteniamo le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 \\ y = y_0 + t_1 b_1 + t_2 b_2 \\ z = z_0 + t_1 c_1 + t_2 c_2 \end{cases}$$

ESERCIZIO: PIANO PER 3 PUNTI NON DISTINTI NON ALLINEATI



$$A = (x_A, y_A, z_A) \quad B = (x_B, y_B, z_B) \quad C = (x_C, y_C, z_C)$$

$$P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \vec{AP} \perp \vec{n}_\pi, \text{ cioè } \vec{AP} \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

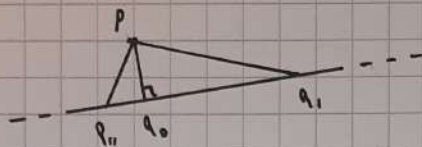
$$\text{dove } \vec{n}_\pi = \vec{AB} \times \vec{AC} \text{ e poiché } \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}, \vec{AP} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$$

$$\pi: \det \begin{pmatrix} x - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = 0$$

DISTANZE

LA DISTANZA TRA UN PUNTO ED UNA RETTA È DEFINITA COME:

$$d(P, r) := \min \{ d(P, Q) : Q \in r \}$$



$$d(P, r) = d(P, Q_0) \text{ dove } \vec{PQ_0} \perp r$$

$$\text{POSSIAMO SCRIVERE CHE } d(P, r) = d(P, Q_0) = \|\vec{PQ_0}\|$$

$$\Rightarrow \vec{PQ_0} = \vec{PQ} - \text{PROJ}_{\vec{r}}(\vec{PQ})$$

SPAZI VETTORIALI

SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO, DIREMO CHE V È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$ SE V NON È VUOTO
EA È MUNITO DI 2 OPERAZIONI:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(v, w) \mapsto v + w$$

↑
GLI ELEMENTI DELLO
SPAZIO VETTORIALE SONO
CHIAMATI VETTORI

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

$$(k, v) \mapsto kv$$

↑
MOLTIPLICAZIONE
PER UNO SCALARE

DEVONO VALERE LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

① $\forall v, w \in V : v + w = w + v$ (COMMUTATIVA)

② $\forall v, w, k \in V : (v + w) + k = v + (w + k)$ (ASSOCIATIVA)

③ $\exists 0 \in V : \forall v \in V : v + 0 = v$ (VETTORE NULLO)

④ $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = 0$ (VETTORE OPPOSTO)

⑤ $\forall k \in \mathbb{K}, \forall v, w \in V : k(v + w) = kv + kw$ (DISTRIBUTIVA) A DX

⑥ $\forall k, t \in \mathbb{K}, \forall v \in V : (k + t)v = kv + tv$ (DISTRIBUTIVA) A SX

⑦ $\forall k, t \in \mathbb{K}, \forall v \in V : (kt)v = k(tv)$ (ASSOCIATIVA)

⑧ $\exists 1 \in \mathbb{K} : \forall v \in V : 1 \cdot v = v$ (ELEMENTO NEUTRO PRODOTTO SCALARE)

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

- $\mathbb{K}$ CAMPO È SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$

- $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ FUNZIONE}\}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$

DEFINIAMO SOMMA: $\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (f + g)(n) := f(n) + g(n)$

PRODOTTO: $\forall r \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (r \cdot f)(n) := r \cdot f(n)$

- $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ FUNZIONE CONTINUA}\}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$

DATI V SPAZIO VETTORIALE SU K E $v, w \in V$ DEFINIAMO LA DIFFERENZA COME:

$$v - w := v + (-w)$$

SI OSSERVA CHE QUINDI $(-1)v = -v \quad \forall v \in V$

LEGE DI CANCELLAZIONE DELLA SOMMA

SIA V SPAZIO VETTORIALE SU K , $\forall v, w_1, w_2 \in V : v + w_1 = v + w_2 \Rightarrow w_1 = w_2$

LEGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

SIA V SPAZIO VETTORIALE SU K , $\forall k \in K, v \in V : kv = 0 \Leftrightarrow k=0 \vee v=0$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

SIA V SPAZIO VETTORIALE SU K , UN SOTTOINSIEME W DI V È CHIAMATO SOTTOSPAZIO ~~DE~~ DI V

SE VALGONO:

- $0_V \in W$
- $\forall v, w \in W : v + w \in W$
- $\forall t \in K, \forall w \in W : tw \in W$

SONO ESEMPI DI SOTTOSPAZI:

- $\mathbb{R}$ È SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{C}$
- $\{0\}$ E V SONO SOTTOSPAZI DELLO SPAZIO VETTORIALE V (DETTI SOTTOSPAZI IMPROPRI O BANALI)

PER INDICARE CHE UN INSIEME È SOTTOSPAZIO DI UN ALTRO SCRIVEREMO: $W \leq V$ (W SOTTOSPAZIO DI V). PER INDICARE UN SOTTOSPAZIO PROPRIO SCRIVEREMO $W < V$ O $W \subsetneq V$. IN SOSTANZA DEVE VALERE CHE $W \leq V \wedge W \neq V$.

SI OSSERVA CHE SE $W \leq V \wedge U \leq W \Rightarrow U \leq V$

OLTREGLI ESEMPLI DI SOTTO SPAZI VETTORIALI SONO:

$$- M_n(\mathbb{R}) \supseteq U = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ è simmetrica} \}$$

INFATTI VALGONO LE 3 PROPRIETÀ:

① $0_n \in U$, si tratta della matrice nulla (che è simmetrica)

② siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simmetriche, allora $A+B$ è simmetrica

③ sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, $k \in \mathbb{R}$ allora kA è simmetrica

$$- \mathbb{R}^2 \supseteq U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = y \right\}$$

$$- \mathbb{R}^2 \not\supseteq U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x+1=y \right\} \text{ poiché } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1$$

$$- \mathbb{R}^2 \not\supseteq U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0 \right\} \text{ poiché } -2 \cdot (1, 1) = (-2, -2) \notin U_2$$

$$- \mathbb{R}^2 \not\supseteq U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : xy = 0 \right\} \text{ poiché } (0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin U_3$$

DEFINIAMO ORA IL **NUCLEO** DI UNA MATRICE A (IN INGLESE **KERNEL**) COME:

$$\text{Ker}(A) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ con } A \in M_n(\mathbb{K})$$

SIMILMENTE POSSIAMO DEFINIRE L'**IMMAGINE** DI A COME TUTTI I POSSIBILI TERMINI NOTI PER

CUI IL SISTEMA LINEARE $Ax = y$ HA SOLUZIONI:

$$\text{Im}(A) := \left\{ y \in \mathbb{K}^m : \exists x \in \mathbb{K}^n : Ax = y \right\} \subseteq \mathbb{K}^m$$

COMBINAZIONI LINEARI

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$ E SIANO $v, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$.

DIREMO CHE v È **COMBINAZIONE LINEARE** DI $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ SE ESISTE

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ TALI PER CUI:

$$v = v_1 t_1 + v_2 t_2 + \dots + v_n t_n$$

UN ESEMPIO DI COMBINAZIONE LINEARE DI $v \in V$ È $t v$ CON $t \in \mathbb{K}$

ESEMPIO: SIANO $\text{SOL}(s)$ LE SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE, ESSE RAPPRESENTANO UNA COMBINAZIONE LINEARE

$$\begin{cases} x = s+t \\ y = s \\ z = 1-t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R} \quad \text{SOL}(s) = \left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ s \\ 1-t \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ con } s, t \in \mathbb{R}$$

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$ E $v \in V$, DENOTEREMO COSÌ:

$$\langle v \rangle := \{tv : t \in \mathbb{K}\}$$

IL SOTTOSPAZIO GENERATO DA v , CIOÉ IL PIÙ PICCOLO SOTTOSPAZIO DI V CHE CONTIENE v . SE $W \leq V$ E $v \in W$ ALLORA $\langle v \rangle \subseteq W$.

$$\langle v \rangle \leq V : 0_v \in \langle v \rangle$$

$$tv, kv \in \langle v \rangle \Rightarrow tv + kv = (t+k)v \in \langle v \rangle$$

$$tv \in \langle v \rangle, k \in \mathbb{K} \Rightarrow k(tv) = (kt)v \in \langle v \rangle$$

ESEMPIO: IL VETTORE $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v \in \mathbb{R}^3$ GENERA IL SOTTOSPAZIO $\langle v \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \text{ASSE } x$

SIA V SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$ E SIANO $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DA $v_1, v_2, \dots, v_n$ IN V È:

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \left\{ t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n : t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K} \right\} \leq V$$

ESEMPIO: $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

SIA V SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$, SIANO $v \neq 0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$. DIREMO CHE

v È COMBINAZIONE DI $v_1, \dots, v_n \Leftrightarrow v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

IN TAL CASO VARrà LA RELAZIONE:

$$\langle v_1, \dots, v_n, v \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

DIPENDENZE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$. UN INSIEME $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ È LINEARMENTE DIPENDENTE SE $\exists t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ NON TUTTI NULLI TALI CHE:

$$v_1 t_1 + v_2 t_2 + \dots + v_n t_n = 0$$

ESEMPIO:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ È LIN. DIP. INFATTI } 1v_1 + 1v_2 - 1v_3 = 0$$

SIMILMENTE DIREMO CHE L'INSIEME $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE SE
 $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K};$

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_n = 0$$

ESEMPIO

$\{k_1, k_2\} \in \mathbb{R}^3$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE, INFATTI:

$$t_1, t_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow t_1 k_1 + t_2 k_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t_1 = t_2 = 0$$

SI OSSERVI CHE SE $v \in V$ SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$ E $v \neq 0$ ALLORA $\{v\}$ È L.I.

POICHE SI HA $t v = 0$ SOLO PER $t = 0$.

AVENDO CHE $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ SARANNO L.D. $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{K} : v_1 = t v_2$, COSÌ DA

OTTENERE $\sqrt{v_1} \neq \sqrt{v_2}$ $\neq 0$ $\neq \sqrt{v_1} \neq 1 (NO) *$

SIANO $\vec{v}$ E $\vec{w}$ VETTORI GEOMETRICI NON NULLI, $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ È LINEARMENTE DIPENDENTE SE E

SOLO SE $\vec{v}$ E $\vec{w}$ SONO PARALLELI. CE LO SI POTEVA ASPETTARE, NELLI ALTRI CASI È IMPOSSIBILE

TROVARE DUE $t \in \mathbb{K}^*$ CHE PORTINO A 0 LA SOMMA DEI VETTORI.

* SE $v_1 = t v_2$ CON $t \in \mathbb{K}$ ALLORA $v_1 - t v_2 = 0_v$ E QUINDI $\{v_1, v_2\}$ È L.D.

SE $\{v_1, v_2\}$ È LIN. DIP. ALLORA $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{K}$ NON ENTRAMBI NULLI TALI CHE $t_1 v_1 + t_2 v_2 = 0$

SE $t_1 = 0$ ALLORA $t_2 v_2 = 0$ E QUINDI $t_2 = 0$

SE $t_2 = 0$ ALLORA $t_1 v_1 = 0$ E QUINDI $t_1 = 0$

SE LUE CHE $v_1 = -\frac{t_2}{t_1} v_2$

ESEMPIO: SIA $\mathbb{P}$ L'INSIEME DEI POLINOMI A COEFFICIENTI IN $\mathbb{R}$ TALE CHE:

$$p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}[x] = \mathbb{P}, \deg(p_i) = i$$

SEGUIRÀ CHE $\{p_1, \dots, p_n\}$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE (IL GRADO AUMENTA)

SI OSSERVI CHE DATO $\{v_1, \dots, v_n\}$ ~~L.I.~~ L.I. IN V S.V. SU $\mathbb{K}$ ALLORA QUALSIASI
 $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ SI SCRIVE IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1, \dots, v_n$.

AD ESEMPIO PRESI $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (CHIAMATI l_1 E l_2) IN $\mathbb{R}^3$ QUALSI VETTORE $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$
 PUÒ ESSERE SCRITTO IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE: $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = al_1 + bl_2 = v$

dim: SUPPONIAMO CHE v POSSA ESSERE SCRITTO COME COMBINAZIONE LINEARE DI:

$$v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$$

$$v = s_1 v_1 + \dots + s_n v_n$$

MA QUINDI POSSIAMO SCRIVERE $v = (t_1 - s_1)v_1 + \dots + (t_n - s_n)v_n$, E PER LA LINEARE
 INDIPENDENZA AVREMO $t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n$. CHE DIMOSTRA L'ESISTENZA DI UNA UNICA
 POSSIBILE COMBINAZIONE LINEARE.

PROPRIETÀ: SIANO $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ E SIA $A = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ MATRICE DEI COEFFICIENTI.

ALLORA $\{v_1, \dots, v_n\}$ È L.I. $\Leftrightarrow \ker = \{0\}$, OGGIÒ SE E SOLO SE A È INVERTIBILE,
 QUINDI $\det A \neq 0$.

SIGNIFICA CHE L'UNICA SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

OMogeneo $AX = 0$ È $X = 0$, UGGIÒ A È INVERTIBILE

dim: SIA $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{K}^n$ L.D. $\Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ NON TUTTI NULLI TALI CHE:

$$A \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = 0_v$$

CIÒ È STANDO CHIEDENDO CHE $AX = 0$ ABBA SOLUZIONI NON NULLE, CIÒ È CHE A NON SIA INVERTIBILE $\square$

SI SAPPRA CHE $\mathbb{K}[x]$, L'INSIEME DEI POLINOMI IN $\mathbb{K}$ (A COEFFICIENTI REALI), NON È FINITAMENTE
 GENERATO. DA DIMOSTRARE PERCHÉ POTREBBE CHIEDERLO ALL'ESAME. BASTA DIMOSTRARE CHE PRESI n
 POLINOMI CE NE SÀ SEMPRE UNO FUORI.

TEOREMA FONDAMENTALE

SIA V SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$ TALE CHE $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ SE $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE ALLORA $m \leq n$.

dim. PER ASSURDO SUPPONIAMO $m > n$

POICHÉ $u_1 \in V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ALLORA ESISTONO $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ TALI CHE $u_1 = v_1 t_1 + \dots + v_n t_n$

POICHÉ $u_1 \neq 0_v$ (PERCHÉ APPARTIENE AD UN INSIEME L.I.) $\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} : t_i \neq 0$.

SUPPONIAMO CHE i SIA 1, NON PERDENDO DI GENERALITÀ. DIVIDIAMO PER t_1 E ISOLIAMO v_1 :

$$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{t_1} u_1 - \frac{t_2}{t_1} v_2 - \dots - \frac{t_n}{t_1} v_n \in \langle u_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

MA QUINDI $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle u_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ POICHÉ v_1 APPARTIENE AD ENTRAMBI I SOTTOSPAZI

ORA RIPETIAMO LO STESSO PROCEDIMENTO CON u_2 :

$$u_2 \in V = \langle u_1, v_2, \dots, v_n \rangle \Rightarrow \exists s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K} \text{ TALI CHE } u_2 = s_1 u_1 + s_2 v_2 + \dots + s_n v_n$$

• SI PROVI CHE IL SOTTOINSIEME DI UN INSIEME LINEARMENTE INDIPENDENTE È LINEARMENTE INDIPENDENTE

SAPPIAMO CHE $u_2 \neq 0_v$ E CHE $\{u_1, v_2\}$ È L.I. $\Rightarrow s_1 \neq 0$ (PER LO STESSO MOTIVO DI PRIMA CON t_i) E $s_2, \dots, s_n$ NON SONO TUTTI NULLI.

SUPPONIAMO ORA CHE s_2 SIA DIVERSO DA 0 E ESPlicitIAMO v_2

$$\Rightarrow v_2 = \frac{1}{s_2} u_2 - \frac{s_1}{s_2} u_1 - \frac{s_3}{s_2} v_3 - \dots - \frac{s_n}{s_2} v_n \in \langle u_1, u_2, v_3, \dots, v_n \rangle$$

$$\text{CIÒ IMPLICA } V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle u_1, \dots, v_n \rangle = \langle u_1, u_2, v_3, \dots, v_n \rangle$$

SI PROCEDE COSÌ FINO AD ARRIVARE A $V = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, MA POICHÉ $m > n$ AVREMO

$$u_{n+1} \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle = V \quad (\text{QUESTO PERCHÉ } \{u_1, \dots, u_m\} \subseteq V)$$

MA QUINDI $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ È LINEARMENTE DIPENDENTE (DATO CHE u_{n+1} È GENERATO DALLI ALTRI $u_1, \dots, u_n$ BASTA SOTTRARLO ALLA PROPRIA COMBINAZIONE LINEARE). QUESTO VA CONTRO

LE IPOTESI DI INDIPENDENZA. $\Rightarrow m \leq n$

□

SEGRE DAL TEOREMA FONDAMENTALE CHE DATO V S.V. SU $\mathbb{K}$, $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
E SIA $\{u_1, \dots, u_m\} \subseteq V$:

- SE $m > n$ ALLORA $\{u_1, \dots, u_m\}$ È L.D.

- SE $\{v_1, \dots, v_n\}$ È L.I. E $\{u_1, \dots, u_m\}$ È L.D. ALLORA
 $V = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$

LEMMA DI INDIPENDENZA

SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$, SIA $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ L.I. E SIA $v \in V$.

SE $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ALLORA $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ È L.I.

ESEMPIO: $V = \mathbb{R}^4$, $\{l_1, l_2\} \subseteq V$ È L.I.

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ SIA $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ AVREMO CHE $v \notin \left\langle \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\rangle$

$\Rightarrow \{l_1, l_2, v\}$ È L.I. (IN SOSTANZA SE AGGIUNGI AD UN INSIEME L.I. UN QUALCOSA NON GENERABILE
DA ESSO L'INSIEME RIMANE L.I.)

LEMMA DI DIPENDENZA

SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$ E SIA $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ L.D., CIO' VARrà SE E SOLO SE,

$\exists i \in \{1, \dots, n\} : v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$

BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$ FINITAMENTE GENERATO. CHIAMEREMO **BASE** DI V SU $\mathbb{K}$ UN INSIEME

ORDINATO $B = (v_1, \dots, v_n)$ DI VETTORI $v_1, \dots, v_n \in V$ TALI CHE

$\{v_1, \dots, v_n\}$ È L.I. E $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

ESEMPIO: $\mathbb{R}^n$ HA **BASE CANONICA** $(l_1, \dots, l_n)$

$\mathbb{P}_n$ HA **BASE CANONICA** $(1, x, \dots, x^n)$

TEOREMA DI COMPLETAMENTO DELLA BASE

SIA V S.V. NON BANALE ($\neq \{0\}$) SU $\mathbb{K}$ FINITAMENTE GENERATO.

DAI SOTTOINSIEME L.I. DI V SI PUÒ COMPLETARE AD UNA BASE, E RUINVI V HA BASE.

POSSO IMMAGINARE DI PRENDERE UN ~~PER~~ VETTORE SINGOLARMENTE, QUESTO RAPPRESENTERÀ UN INSIEME L.I., POI POSSO PROCEDERE CON GLI ALTRI, SE VADO AVANTI FINCHÉ L'INSIEME CONSIDERATO È LINDIPENDENTE (FINO AD UN MASSIMO DI n ELEMENTI, ~~MA~~ CON n VETTORI DI V), A QUEL PUNTO AVRÒ TROVATO UNA BASE.

TEOREMA DI INVARIANZA

SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$ F.G., SE $(v_1, \dots, v_n)$ È BASE DI V E $(b_1, \dots, b_k)$ È BASE DI V ALLORA $n = k$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{dim: } (v_1, \dots, v_n) \text{ BASE} \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\} \text{ L.I.} & & \\
 (b_1, \dots, b_k) \text{ BASE} \Rightarrow V = \langle b_1, \dots, b_k \rangle & \left. \begin{array}{l} \text{T.FOND.} \\ \Rightarrow \end{array} \right\} & n \leq k \\
 (v_1, \dots, v_n) \text{ BASE} \Rightarrow V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle & & \\
 (b_1, \dots, b_k) \text{ BASE} \Rightarrow \{b_1, \dots, b_k\} \text{ L.I.} & \left. \begin{array}{l} \text{T.FOND.} \\ \Rightarrow \end{array} \right\} & k \leq n
 \end{array}$$

$n \leq k$
 $\searrow$
 $n = k$
 $\nearrow$
 $k \leq n$

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$ F.G. LA DIMENSIONE DI V SU $\mathbb{K}$ È IL NUMERO DI ELEMENTI DI UNA BASE DI V E SI DENOTA CON $\dim_{\mathbb{K}}(V)$

SI OSSERVI CHE SE $W \leq V$ ~~INVECE~~ E W È S.V. SU $\mathbb{K}$ SAPPIAMO CHE:

- È POSSIBILE CALCOARE $\dim_{\mathbb{K}}(W)$
- $\dim_{\mathbb{K}}(W) \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$, INOLTRE SE $\dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$ AVREMO $W = V$

ESEMPLI: IN GENERALE VALE $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$ $B = (1)$

$\mathbb{C}$ È S.V. SU $\mathbb{R}$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ $B = (1, i)$

UNA PROPRIETÀ DELLA DIMENSIONE È QUESTA:

SIA V S.V. SU $\mathbb{K} \neq \{0\}$ CON $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$

$\{v_1, \dots, v_n\} \in V$ È L.I. $\Leftrightarrow V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

OPERAZIONI TRA SOTTOSPAZI

SIA V S.V., SE U E W SONO SOTTOSPAZI DI V ALLORA $U \cap W$ È ANCORA

SOTTOSPACIO DI V . PIÙ IN GENERALE SE $\{U_i : i \in I\}$ È UNA FAMIGLIA NON VUOTA

DI SOTTOSPAZI DI V ALLORA $\bigcap_{i \in I} U_i$ È SOTTOSPACIO DI V .

SI OSSERVI CHE SE V È S.V. SU $\mathbb{K}$ E $U = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \leq V$ ALLORA

$$U = \bigcap \{W \leq V : \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq W\}$$

ESEMPIO: SIA $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ E $U = \ker A \leq \mathbb{R}^n$, CON $\ker A = \text{sol}(S)$, $S: AX=0$

$$S: \begin{cases} A_{(1)} X = 0 & (E_1) \\ \vdots \\ A_{(m)} X = 0 & (E_m) \end{cases}$$

$$\ker(A_{(1)}) = \text{sol}(E_1) \leq \mathbb{R}^n$$

$$\vdots$$

$$\ker(A_{(m)}) = \text{sol}(E_m) \leq \mathbb{R}^n$$

$$\text{sol}(S) = \text{sol}(E_1) \cap \dots \cap \text{sol}(E_m)$$

SI OSSERVI CHE SE $U, W \leq V$, $U \cup W \leq V \Leftrightarrow$ O $U \subseteq W$ OPPURE $W \subseteq U$

SE U, W SONO SOTTOSPAZI DI V S.V. DEFINIAMO:

$$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\} \leq V$$

$$U + W \supseteq U \cup W$$

ESEMPIO:

$\mathbb{R}^3$ $U = \text{ASSE } x$ $W = \text{ASSE } y \Rightarrow U + W = \text{PIANO GENERATO DALL'ASSE } x \text{ E DALL'ASSE } y$

SE V È S.V. SU $\mathbb{K}$ E $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle \leq V$ E $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \leq V$

ALLORA $U + W = \langle u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_k \rangle$.

FORMULA DI GRASSMAN

SIA V S.V. SU K F.G. E SIANO $U \leq V, W \leq V$ ALLORA:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

DIAMO CHE V È SOMMA DIRETTA DI U E W SE $V = U+W$ E $U \cap W = \{0\}$

ESEMPIO: $\mathbb{R}^3 = U \oplus W \oplus Z$ DOVE $U = \langle b_1 \rangle$ (ASSE X) $W = \langle b_2 \rangle$ (ASSE Y) $Z = \langle b_3 \rangle$ (ASSE Z)

↑
SOMMA DIRETTA, I TRE ASSI SI INTERSECANO SOLO IN $\{0\}$.

COROLLARIO DI GRASSMAN

SIA V S.V. SU K E SIANO $U \leq V, W \leq V$ ALLORA:

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$$

PROPRIETÀ SPAZI VETTORIALI

SIA V S.V. SU K F.G. E SIA $U \leq V$, ALLORA $\exists W \leq V$ TALE CHE:

$$V = U \oplus W$$

↳ SOTTOSPAZIO COMPLEMENTARE
DI U IN V .

dim: SIA $(b_1, \dots, b_k)$ BASE DI U

SI COMPLETA AD UNA BASE $(b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_h)$ DI V E SI PONE:

$$W = \langle c_1, \dots, c_h \rangle$$

AVREMO QUINDI CHE $V = U \oplus W$ □

ESEMPIO: DETERMINARE $W \leq \mathbb{R}^3$ TALE CHE $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è l.i. } U' = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U' \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

SI OSSERVA CHE CON V S.V. E $w \in V - \{0\}$ AVREMO CHE $\{w\}$ É L.M.

QUINDI PER $U = \langle w \rangle \subseteq V$ (W) SÌ UNA BASE DI U , E QUINDI $\dim(U) = 1$

COORDINATE

51A V s.v. su $\mathbb{K}$ e 51A $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base di V su $\mathbb{K}$.

ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B

$(b_1, \dots, b_n)$, cioè $\exists t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}$ UNICI TALI CHE $v = t_1 b_1 + \dots + t_n b_n$

$\begin{bmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ - CI RICONDUCEMO A QUESTO POICHÉ ABBIAMO PIÙ FACILITÀ CON I NUMERI.

LE COORDINATE DI V ESPRESSE CON LA BASE B

$$V \xrightarrow{C_B} \mathbb{K}^n \quad n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$$

$V \xrightarrow{\quad} [v]_B$ ASSOCIA AL VETTORE UNA n -UPLA DI NUMERI

TALE FUNZIONE È BIETTIVA:

QUIZ QUESTIONE: dato $\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, $\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ è l'immagine di $(t_1, b_1, + \dots + t_n, b_n) \in V$

- INIETTIVA: SIANO $v, w \in V$ CON $[v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ ALLORA

$$v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = w$$

↑
↑
 BASE COORDINATE

ESEMPIO. $W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ $B = (b_1, b_2)$ è una base di W

PRESO $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ LE SUE COORDINATE ESPRESSE CON B SONO $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

INFATTI $V = \boxed{1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

PROPRIETÀ DELLE COORDINATE

sia V s.v. su U f.g. con B base di V

① $\forall v, w \in V, [v+w]_B = [v]_B + [w]_B$

$$\textcircled{2} \forall v \in V, \forall t \in \mathbb{K}, [tv]_B = t[v]_B$$

LE DUE PROPRIETÀ ~~VALGONO SE E SOLO SE~~ SONO EQUIVALENTI A:

$$\forall v_1, \dots, v_n \in V \text{ e } \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K} \text{ si ha}$$

$$[t_1 v_1 + \dots + t_n v_n]_B = t_1 [v_1]_B + \dots + t_n [v_n]_B$$

SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$ F.L., B BASE DI V

$v_1, \dots, v_m \in V$ SONO L.I. $\Leftrightarrow [v_1]_B, \dots, [v_m]_B$ SONO L.I.

ESEMPIO: SIA V S.V. SU $\mathbb{R}$ E $B = (v, v, w)$ BASE DI V SU $\mathbb{R}$ ALLORA $(u+v, u-v, u-2v+w)$ È UNA BASE DI V SU $\mathbb{R}$.

$$[u+v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [u-v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, [u-2v+w]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{E DET} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{È LINEARMENTE INDIPENDENTE}$$

SIAMO PARTITI DA UNA BASE (INSIEME L.I.) E SIAMO ARRIVATI ALLE COORDINATE L.I.

TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI BASE

SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$ CON $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, SIANO $B = (b_1, \dots, b_n)$ E $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ DUE BASI DI V . ALLORA $\forall v \in V, [v]_B = M_B^{\mathcal{C}} [v]_{\mathcal{C}}$.

DOVE $M_B^{\mathcal{C}} = ([c_1]_B, [c_2]_B, \dots, [c_n]_B) \in M_n(\mathbb{K})$ È UNA MATRICE INVERTIBILE

$$\text{• SI OSSERVI CHE } M_B^{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{C}}^B)^{-1}$$

• SE $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ALLORA LE COLONNE SONO UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE NUCHE E LE NUCHE SONO COMBINAZIONI LINEARI DELLE COLONNE. $(\text{rky}(A)) := \langle A_{(1)}, \dots, A_{(m)} \rangle \subseteq \mathbb{K}^n$

OSS 1 - LE NUCHE NON NULLE DI UNA MATRICE A SCALA SONO VETTORI L.I., ALTRIMENTI SI POTREBBERO SEMPLIFICARE

OSS 2 - $\text{rky}(A)$ È LO S.V. DETERMINATO DAI VALORI DELLE NUCHE DI A . $\text{rky}(A)$ NON VARIA A SECONDA SE VENISSANO CANGIATE AP. GLI ELEMENTI NUCHE. LO STESSO VALE PER $\text{col}(A)$.

TEOREMA DEL RANGO

SIA $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. ALLORA $\text{rang}(A) = \dim(\text{col}(A)) = \dim(\text{rig}(A))$

dim: SIA R LA FORMA A SCALA NORMALE DI A . ALLORA $\text{rang}(A) = \{1\text{-dom di } R\} =$
 $= \{ \text{COLONNE DI } R \text{ CON } 1\text{-dom} \} = \{ \text{RIGHE DI } R \text{ CON } 1\text{-dom} \} = \{ \text{RIGHE NON NULLE DI } R \}$
 $= \{ \text{COLONNE NON NULLE DI } R \} = \dim(\text{rig } A) = \dim(\text{col } A)$
 $= \dim(\text{rig } R) =$

QUESTO PERCHÉ $\text{rig } R$ CONTIENE SOLO VETTORI NON NULLI, QUELLI CHE CONTANO VERAMENTE

CONSEGUENZE UTILI

SIA $U = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq \mathbb{K}^n$, PER TROVARE UNA BASE DI U BASTERÀ:

- 1 - SCRIVERE I VETTORI $v_1, \dots, v_n$ COME RIGHE DI UNA MATRICE
- 2 - TRASFORMARE A IN FORMA A SCALA R
- 3 - LE RIGHE NON NULLE SARANNO UNA BASE DI U

TRASFORMAZIONI LINEARI

SIANO V, W S.V. SU K . UNA FUNZIONE $T: V \rightarrow W$ È UNA TRASFORMAZIONE

LINEARE SE $\forall v_1, v_2 \in V \quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

SE $\forall v \in V, \forall t \in K \quad T(tv) = tT(v)$

$T(v)$ SI CHIAMA **IMMAGINE** DI v TRAMITE T

PER $A \subseteq V$, $T(A) = \{T(v) : v \in A\}$ IMMAGINE DI A TRAMITE T

UNA TRASFORMAZIONE LINEARE BIETTIVA È DETTA **ISOMORFISMO**. SE VALE LA RELAZIONE

$T: V \rightarrow W$ BASTA CHE, SE T È UN ISOMORFISMO, ALLORA V E W SONO **ISOMORFI**.

SI OSSERVI CHE:

- COMPOSIZIONE DI T.L. SONO ANCORA T.L.
- L'INVERSA DI UN ISOMORFISMO È UN ISOMORFISMO
- LA RELAZIONE DI ISOMORFISMO TRA S.V. È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA (I LORO ELEMENTI SONO IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCAMENTE)

PROPRIETÀ

SIA $T: V \rightarrow W$ UNA TRASFORMAZIONE LINEARE

- $\forall v \in V, T(-v) = -T(v)$
- $\forall v_1, \dots, v_n \in V, \forall t_1, \dots, t_n \in K \quad T(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n) = t_1 T(v_1) + \dots + t_n T(v_n)$

SI OSSERVI CHE SE $S, T: V \rightarrow W$ SONO T.L. ALLORA:

- SE $v = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ E $T(v_i) = S(v_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

ALLORA $S = T$ (DI FATTO È COME DIRE CHE DUE FUNZIONI HANNO GLI STESSI ELEMENTI)

$$\begin{aligned} \text{dim: } v \in V &\Rightarrow \exists t_1, \dots, t_n \in K : v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \Rightarrow T(v) = T(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n) = \\ &= t_1 T(v_1) + \dots + t_n T(v_n) = t_1 S(v_1) + \dots + t_n S(v_n) = S(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n) = S(v) \end{aligned}$$

- $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ BASE DI V E $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W \Rightarrow \exists! T: V \rightarrow W$ T.L. : $T(b_i) = w_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

TRASFORMAZIONI MATRICIALI

SIA $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. DEFINIAMO LA T.L. $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ COME:

$$L_A(v) := Av \quad \forall v \in \mathbb{K}^n$$

PROPRIETÀ

- $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$, $L_A(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = L_A(v_1) + L_A(v_2)$
- $\forall v \in \mathbb{K}^n$, $\forall t \in \mathbb{K}$, $L_A(tv) = A(tv) = t(Av) = tL_A(v)$

ESEMPIO

SIA $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, TALE MATRICE INDUCE $L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 0x + y \end{pmatrix}$$

TEOREMA SULLE TRASFORMAZIONI LINEARI

SE $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ È UNA T.L. ALLORA $\exists!$ $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ TALE CHE $T = L_A$

CON $A = (T(e_1) \ T(e_2) \ \dots \ T(e_n))$ DOVE $(e_1, \dots, e_n)$ È UNA BASE CANONICA DI $\mathbb{K}^n$.

dim: VEDIAMO CHE $\forall v \in \mathbb{K}^n$, $T(v) = Av$, PER FARLO DOVREMO OSSERVARE CHE:

SIA $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, E QUINDI $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

$$T(v) = T(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = a_1 T(e_1) + \dots + a_n T(e_n)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} T(e_1) & \dots & T(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = Av \end{aligned}$$

ESEMPIO

LA T.L. R_θ RUOTA DELL'ANGOLO θ ATTORNO ALL'ORIGINE IN SENSO ANTICLOCKWISE:

- $\forall v, w \in \mathbb{R}^2$ $R_\theta(v + w) = R_\theta(v) + R_\theta(w)$
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$ $R_\theta(tv) = tR_\theta(v)$

E QUINDI $\exists! A_\theta \in M_2(\mathbb{R})$ TALI CHE $R_\theta = L_{A_\theta}$, CIO' $\forall v \in \mathbb{R}^2 R_\theta(v) = A_\theta v$
↑
PRODUCE UN
VETTORE IN $\mathbb{R}^2$

E QUESTA MATRICE A_θ E' :
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

SI OSSERVI CHE IL DETERMINANTE DI A_θ E' : $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

ESEMPLI

• SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ BASE DI V .

$$V \xrightarrow{C_B} \mathbb{K}^n$$

$$v \mapsto [v]_B$$

↳ COORDINATE IN BASE B

C_B E' UN ISOMORFISMO E $V \cong \mathbb{K}^n$ (E ISOMORFA)

• $D : \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ DERIVABILE IN OGNI PUNTO} \} \rightarrow \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ FUNZIONE} \}$
 $f \mapsto f'$

IN QUESTO CASO D E' UNA T.L.

IMMAGINE E NUCLEO DI UNA TRASFORMAZIONE LINEARE

SIANO V, W S.V. SU $\mathbb{K}$ E SIA $T : V \rightarrow W$ T.L., CHIAMEREMO **IMMAGINE** DI T L'INSIEME

$$T(V) = \{ T(v) : v \in V \}$$

OVVERO

$$T(V) = \{ w \in W : \exists v \in V, T(v) = w \}$$

LA STESSA DEFINIZIONE DI INSIEME IMMAGINE CHE ABBIAMO DATO IN ANALISI I. CHIAMEREMO INVECE **NUCLEO** DI T L'INSIEME :

$$\ker T = \{ v \in V : T(v) = 0_v \}$$

↑ v CHE HANNO T.L. PARIA 0

SI OSSERVI CHE $\ker T \leq V$ E $\text{Im } T \leq W$

ESEMPIO

SIA $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

IN QUESTO CASO AVREMO CHE $\text{Im}(A) = \text{col}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ CHE È UNA BASE

AVRÀ INVECE NUCLEO $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

SIA $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ DEFINITA PONENDO $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ z \\ x+y+z \end{pmatrix}$

ORA DETERMINIAMO $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$ TALE CHE $T = L_A$

$$T(l_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(l_2) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(l_3) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{E QUINDI } A = (T(l_1) \ T(l_2) \ T(l_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONI

SI OSSERVI, CHE, COME PER LE FUNZIONI, UNA T.L. $T: V \rightarrow W$ È **SURGETTIVA** SE E SOLO SE $\text{Im}(T) = W$.

CRITERIO DI INIETTIVITÀ

SIANO V, W S.V. SU $\mathbb{K}$ E SIA $T: V \rightarrow W$ T.L. ALLORA È **INIETTIVA** $\Leftrightarrow \ker T = \{0_V\}$

dim: $(\Rightarrow)$ SUPPONIAMO CHE T SIA INIETTIVA. SIA $v \in \ker T$, CIOÈ $T(v) = 0_W$.

POICHÉ $T(0_V) = 0_W$ AVREMO CHE $T(v) = T(0_V)$, MA POICHÉ T È INIETTIVA VARRÀ CHE $v = 0_V$.

$(\Leftarrow)$ SUPPONIAMO CHE $\ker T = \{0_V\}$. SIANO $v_1, v_2 \in V$ CON $T(v_1) = T(v_2)$.

SELVE CHE $T(v_1) - T(v_2) = 0_W \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0_W \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker T = \{0_V\}$

$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2$. QUESTO VERIFICA L'INIETTIVITÀ, INFATTI $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$ $\square$

TEOREMA DELLE DIMENSIONI

SIANO V, W s.v. su $\mathbb{K}$ E SIA $T: V \rightarrow W$ UNA T.L. . SUPPONIAMO V, W FINITAMENTE GENERATI ALLORA $\dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T) = \dim V$

dim: SIA $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ BASE DI $\operatorname{Ker} T$ E SIA $\mathcal{D} = (T(d_1), \dots, T(d_k))$ BASE DI $\operatorname{Im}(T)$.

AVREMO CHE $\dim(\operatorname{Ker} T) = n$ E $\dim(\operatorname{Im}(T)) = k$, PER VERIFICARE CHE $\dim V = n + k$ NOTIAMO CHE $(b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_k)$ È UNA BASE DI V

• $V = \langle b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_k \rangle$:

SIA $v \in V$. POICHÉ $T(v) \in \operatorname{Im} T = \langle T(d_1), \dots, T(d_k) \rangle$

↑
PENSA LA COME UNA FUNZIONE E L'INSIEME IMMAGINE

$\exists t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$, $T(v) = t_1 T(d_1) + \dots + t_k T(d_k)$

DA CUI SEGUO CHE: $T(v - t_1 d_1 - \dots - t_k d_k) = 0_W$

E CHE QUINDI $v - t_1 d_1 - \dots - t_k d_k \in \operatorname{Ker} T = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$

MA QUINDI ESISTONO $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{K}$ TALI CHE $v - t_1 d_1 - \dots - t_k d_k = h_1 b_1 + \dots + h_n b_n$

È CIÒ CI PORTA A QUANTO AFFERMATO INIZIALMENTE, E CIÒ È $v = t_1 d_1 + \dots + t_k d_k + h_1 b_1 + \dots + h_n b_n$

• ORA NON CI RESTA CHE DIMOSTRARE CHE $\{b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_k\}$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE (CIÒ HA VALORI CHE CONTANO, NON POSSONO ESSERE SEMPLICI).

SIANO $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$, TALI CHE $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n + c_1 d_1 + \dots + c_k d_k = 0_V$

PER DIMOSTRARE LA LINEARE INDIPENDENZA BASTA MOSTRARE CHE $a_1 = \dots = a_n = c_1 = \dots = c_k = 0$

OSSERVIAMO CHE $T(a_1 b_1 + \dots + c_k d_k) = T(0_V) = 0_W$

MA (0_V) È CONTENUTO ANCHE $\operatorname{Ker} T$, CHE PER DEFINIZIONE È 0_W , QUINDI RIAVIAMO, ESCLUDENDO:

$T(c_1 d_1 + \dots + c_k d_k) = 0_W \Rightarrow c_1 T(d_1) + \dots + c_k T(d_k) = 0_W$

MA POICHÉ $\{T(d_1), \dots, T(d_k)\}$ È L.I. (È UNA BASE) SEGUO $c_1 = \dots = c_k = 0$

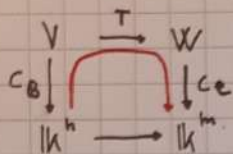
E ALLO STESSO MODO, CON $\{b_1, \dots, b_n\}$ L.I. SEGUO $a_1 = \dots = a_n = 0$ □

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI UNA TRASFORMAZIONE LINEARE

SIANO V, W S.V. SU K E SIA $T: V \rightarrow W$ UNA T.L.

SIANO B BASE DI V E C BASE DI W ($\dim V = n$, $\dim W = m$)

ALLORA $\exists!$ $M = M_C^B(T) := ([T(b_1)]_C [T(b_2)]_C \dots [T(b_n)]_C)$



$$L_M = C_C \circ T \circ C_B^{-1} \quad \text{con } M \in M_{m \times n}(K)$$

TALE CHE $\forall v \in V$, $[T(v)]_C = M_C^B(T) [v]_B$

dim: SIA $v \in V$, $[v]_B = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, $v = r_1 b_1 + \dots + r_n b_n$

$$\begin{aligned} M_C^B(T) [v]_B &= ([T(b_1)]_C [T(b_2)]_C \dots [T(b_n)]_C) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \\ &= r_1 [T(b_1)]_C + r_2 [T(b_2)]_C + \dots + r_n [T(b_n)]_C = \\ &= [r_1 T(b_1) + r_2 T(b_2) + \dots + r_n T(b_n)]_C = \\ &= [T(r_1 b_1 + \dots + r_n b_n)]_C = [T(v)]_C \end{aligned}$$

PER IL TEOREMA SULLE TRASFORMAZIONI MATRICIALI $M_C^B(T)$ È L'UNICA TALE CHE

$$L_{M_C^B(T)} = C_C \circ T \circ C_B^{-1}$$

$$L_{M_C^B(T)}: K^n \rightarrow K^m$$

ESEMPIO

$$V \xrightarrow{\text{id}_V} V \quad B = (b_1, \dots, b_n) \text{ BASE DI } V$$

$$x \mapsto x$$

$$M_B^B(\text{id}_V) = ([\text{id}_V(b_1)]_B [\text{id}_V(b_2)]_B \dots [\text{id}_V(b_n)]_B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

OSSERVAZIONE

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

$$L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$$

$$\begin{aligned} M_E^E(L_A) &= ([L_A(l_1)]_E \dots [L_A(l_n)]_E) \\ &= (L_A(l_1) \dots L_A(l_n)) \\ &= (A l_1 \dots A l_n) = (A^{(1)} \dots A^{(n)}) = A \end{aligned}$$

PROPRIETÀ

$$\begin{array}{c} V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} U \\ \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad S \circ T \end{array} \quad \text{TRASFORMAZIONI LINEARI}$$

SIANO $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ BASI DI V, W, U . AVREMO CHE:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T), M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(S), M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(S \circ T) \rightarrow M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(S \circ T) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(S) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T)$$

• $T: V \rightarrow W$ ISOMORFISMO, CON $\mathcal{B}$ E $\mathcal{C}$ BASI DI V E W

$$V \xrightleftharpoons[T^{-1}]{T} W \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T) \text{ È INVERTIBILE, } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T^{-1}) = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T))^{-1}$$

FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE

SIA $T: V \rightarrow W$ UNA TRASFORMAZIONE LINEARE E $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ BASI DI V E $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ BASI DI W . IL TEOREMA Afferma CHE:

$$M_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{B}_2}(T) = M_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{D}_1} \cdot M_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{B}_1}(T) \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$

dim: $M_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{B}_2}(T)$ È L'UNICA MATRICE TALE CHE $\forall v \in V, [T(v)]_{\mathcal{D}_2} = M_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{B}_2}(T) [v]_{\mathcal{B}_2}$

PER IL TEOREMA VISTO PRIMA.

$$\begin{aligned} \text{SIA } v \in V, \quad M_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{D}_1} M_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{B}_1}(T) M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} [v]_{\mathcal{B}_2} &= M_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{D}_1} M_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{B}_1}(T) [v]_{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{D}_1} [T(v)]_{\mathcal{D}_1} = \\ &= [T(v)]_{\mathcal{D}_2} \end{aligned} \quad \square$$

COLLOQUIO

SIA $T: V \rightarrow V$ TRASFORMAZIONE LINEARE E SIANO B, C BASI DI V .

$$\text{ALLORA } M_C^C(T) = M_C^B M_B^B(T) M_B^C = (M_B^C)^{-1} M_B^B(T) M_B^C$$

DIAZIONALIZZAZIONE

SIA V UNO S.V. (FIN. GEN.) E SIA $T: V \rightarrow V$ T.L.

DIREMO CHE T È **DIAZIONALIZZABILE** SE $\exists B$ BASE DI V TALE CHE $M_B^B(T)$ SIA DIAZIONALE

ESEMPIO

SE $A \in M_n(\mathbb{R})$ È DIAZIONALE ALLORA L_A È DIAZIONALIZZABILE POICHÉ $M_B^B(L_A) = A$ CHE È DIAZIONALE, CON B BASE CANONICA IN $\mathbb{R}^n$

OSSERVAZIONE

SIA V S.V., B BASE DI V E $T: V \rightarrow V$ T.L.

$$\text{SUPPONIAMO CHE } M_B^B(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \left([T(j_1)]_B \right)_0 \left([T(j_2)]_B \right)_0 \dots \left([T(j_n)]_B \right)_0$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

SIA $T: V \rightarrow V$ T.L. E SIA V UNO S.V. F.G.

$\lambda \in \mathbb{K}$ È **AUTOVALORE** DI T SE $\exists v \in V - \{0_v\}$ TALE CHE $T(v) = \lambda v$

v SI CHIAMA **AUTOVETTORE** DI T RISPETTO ALL'AUTOVALORE λ .

DIREMO ANCHE CHE $E_\lambda(T) := \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$, OVERO L'INSIEME DEGLI AUTOVETTORI,

SI CHIAMERÀ **AUTOSPAZIO** DI V RELATIVO A λ

QUI È COMPRESO ANCHE 0_v

SI OSSERVI CHE SE $\lambda = 0$ È AUTOVALORE DI T ALLORA $E_0(T) = \ker T$, INFATTI:

$$E_0(T) = \{v \in V : T(v) = 0_v\} = \ker T$$

È UNA DIREZIONE, AVANZA' CHE
T CI DÀ UN VETTORE ^{L'UNICO CH'È STAZIONARIO?} PARALLELO

SI OSSERVA ANCHE CHE SE $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ SONO AUTOVALORI DI T ALLORA $E_\lambda(T) \cap E_\mu(T) = \{0_V\}$
 INFATTI SE $T(v) = \lambda v$ E $T(v) = \mu v$ ALLORA $\lambda v = \mu v$ E CIOE' $(\lambda - \mu)v = 0_V$
 POICHE' ASSUMIAMO $\lambda \neq \mu$ CONSEGUENTE CHE $v = 0_V$

TEOREMA DI DIAGONALIZZAZIONE

SIA V S.V. F.L. E SIA $T: V \rightarrow V$ UNA T.L.

ALLORA T E' DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow \exists$ BASE DI V FORMATA DA AUTOVETTORI DI T

dim: $(\Rightarrow)$ SE $\mathcal{B} = (d_1, \dots, d_n)$ E' BASE DI V TALE CHE $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ALLORA
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}, T(d_i) = \lambda_i d_i$ (CONSIDERA LE COLONNE SEPARATAMENTE E MOLTIPLICA
 PER d_i) E CIOE' d_i E' UN AUTOVETTORE DI T

$(\Leftarrow)$ SIA $\mathcal{B} = (d_1, \dots, d_n)$ BASE DI V FORMATA DA AUTOVETTORI DI T

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, T(d_i) = \lambda_i d_i$ PER $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

ALLORA $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = ([T(d_1)]_{\mathcal{B}} \dots [T(d_n)]_{\mathcal{B}}) = (\boxed{[\lambda_1 d_1]_{\mathcal{B}}} \dots [\lambda_n d_n]_{\mathcal{B}})$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ABBIAMO MOLTIPLICATO PER LA BASE $\mathcal{B}$
 I VALORI DELLA MATRICE, CARIAMO COSI'
 CHE QUELLA DIAGONALE E' L'UNICA POSSIBILE,
 INFATTI L'ENTITA' ROSSA DEVE ESSERE RICAVATA
 COSI':

$$\lambda_1 \cdot d_1 + 0 \cdot d_1 + \dots + 0 \cdot d_n$$

↑
 QUESTI DEVONO PER FORZA
 ESSERE 0 SE VOGLIAMO OTTENERE
 $\lambda_1 d_1$

□

TEOREMA

SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$ F.G., SIA $T: V \rightarrow V$ UNA T.L.. SIANO $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ AUTOVALORI DI T A DUE A DUE DISTINTI, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ SIA v_i AUTOETTORE RELATIVO A λ_i .
 ALLORA $\{v_1, \dots, v_k\}$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE (HA SENSO, GLI AUTOVALORI SONO DIVERSI FRA LORO)

dim: NEL CASO $k=2$ AVREMO,

SIA $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ AUTOVALORI DI T , $\lambda \neq \mu$

SIANO v, w AUTOVETTORI RELATIVI A λ, μ RISPETTIVAMENTE.

SIANO $a, b \in \mathbb{K}$ TALI CHE $a v + b w = 0$ [1]

$$0 = T(0) = T(a v + b w) = a T(v) + b T(w) = a \lambda v + b \mu w$$

MOLTIPLICANDO INNA PER λ E POI PER μ LA [1] OTTENIAMO

$$\begin{cases} a \lambda v + b \mu w = 0 \\ a \lambda v + b \lambda w = 0 \\ a \mu v + b \mu w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda w - \mu w = 0 \\ b(\lambda - \mu) w = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} \lambda v - \mu v = 0 \\ a(\lambda - \mu) v = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

COROLLARIO

SIA V S.V. SU $\mathbb{K}$ DI $\dim V = n$. SIA $T: V \rightarrow V$ T.L.

SE T HA IN $\mathbb{K}$ n AUTOVALORI A DUE A DUE DISTINTI, ALLORA T È DIAGONALIZZABILE.

dim: SIANO $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ AUTOVALORI DIVERSI FRA LORO DI T .

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ SIA $v_i \in V$ AUTOETTORE DI T RELATIVO A λ_i .

PER IL TEOREMA APPENA DIMOSTRATO SAPPIAMO CHE $\{v_1, \dots, v_n\}$ È L.I.

POICHÉ $\dim V = n$ ABBIAMO CHE $\{v_1, \dots, v_n\}$ È UNA BASE DI V .

PER IL TEOREMA DI DIAGONALIZZAZIONE T È DIAGONALIZZABILE

POLINOMIO CARATTERISTICO

DEFINIAMO $A \in M_n(\mathbb{K})$, CHIAMEREMO POLINOMIO CARATTERISTICO DI A IL POLINOMIO COSÌ DEFINITO:

$$C_A(x) := \det(xI_n - A) \in \mathbb{K}[x]$$

↳ NOME DEL POLINOMIO

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad C_A(x) = \det(xI_3 - A) = \det \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 3 & x \end{pmatrix} = (x-1)(x-3)(x+1)$$

TEOREMA

SIA $A \in M_n(\mathbb{K})$, AVREMO CHE:

- GLI AUTOVALORI DI A IN $\mathbb{K}$ SONO ESATTAMENTE LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO
- PER $\lambda \in \mathbb{K}$ AUTOVALORE DI A , $E_\lambda(A) = \ker(\lambda I_n - A)$

dim: $\lambda \in \mathbb{K}$, λ È AUTOVALORE DI A $\Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^n - \{0\}$, $AX = \lambda X$ (È LA DEFINIZIONE)

$\Leftrightarrow$ IL S.L. $(\lambda I_n - A)X = 0$ HA SOL. NON NULLE $\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda$ È SOLUZIONE DEL POLINOMIO $C_A(x)$ □

OSSERVAZIONE

SIA $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

• IN QUESTO CASO $C_A(x) = \det(xI_2 - A) = \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$ (NON HA RADICI IN $\mathbb{R}$)

QUINDI A NON HA AUTOVALORI E NON È DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{R}$. (NESSUNA LR NEMICA INVARIATA)

• $C_A(x)$ HA SOLUZIONI, INVECE, IN $\mathbb{C} : \pm i$, QUINDI:

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, $L_A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ COSÌ A HA 2 AUTOVALORI DISTINTI IN

$\mathbb{C}$ E È QUINDI DIAGONALIZZABILE.

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA E ALGEBRICA

SIA $A \in M_n(\mathbb{K})$ E SIA $\lambda \in \mathbb{K}$ AUTOVALORE DI A .

DEFINIAMO MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI λ :

$$m_{\text{geo}}(\lambda) := \dim(E_\lambda(A))$$

IN SOSTANZA È IL NUMERO DI VOLTE CHE UN AUTOVALORE COMPARE NELL'AUTO SPAZIO.

CONSIDERANDO PER ESEMPIO $C_A(x) = (x-2)^2(x-3)^4(x-1)$, AVREMO:

$$m_{\text{geo}}(2) = 2, \quad m_{\text{geo}}(3) = 4, \quad m_{\text{geo}}(1) = 1$$

DEFINIAMO INVECE LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI λ COME:

$$m_{\text{alg}}(\lambda) := \max \{ m \in \mathbb{N}_+ : \exists p(x) \in \mathbb{K}[x] : C_A(x) = (x-\lambda)^m p(x) \}$$

SI OSSERVA CHE $1 \leq m_{\text{geo}}(\lambda) \leq m_{\text{alg}}(\lambda)$, PERCHÉ $m_{\text{alg}}(\lambda) = n - \chi_\lambda(2I_n - A)$

TEOREMA

UNA MATRICE $A \in M_n(\mathbb{K})$ È DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$

- $C_A(x)$ HA TUTTE LE RADICI IN $\mathbb{K}$
- $\forall \lambda$ AUTOVALORE DI A VALE $m_{\text{geo}}(\lambda) = m_{\text{alg}}(\lambda)$

ESEMPIO CON:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2$$

$$m_{\text{alg}}(1) = 2$$

$$m_{\text{geo}}(1) = \dim(E_1(A)) = \dim(\ker(I_2 - A)) = \dim(\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \dim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

$m_{\text{alg}} \neq m_{\text{geo}} \Rightarrow A$ NON È DIAGONALIZZABILE

UN ULTERIORE ESEMPIO CON $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$C_A(x) = \det(xI_3 - A) = (x-2)(x+1)^2$$

GLI AUTOVALORI DI A SONO TUTTI IN $\mathbb{R}$ E SONO 2 CON $m_{alg}(2) = 1$
 $m_{alg}(-1) = 2$

DOBBIAMO ORA CALCOLARE $\dim(E_2(A))$ MA POSSIAMO NOTARE CHE $1 \leq m_{geo} \leq m_{alg}$ E PERCIÒ SARÀ PER FORZA 1.

A DARE PROBLEMI POTREBBE ESSERE L'AUTOVALORE -1:

$$E_{-1}(A) = \ker(-I_3 - A) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

DA CIÒ CAPIAMO CHE $m_{geo}(-1)$ È 2 ED ESSENDO $m_{alg} = m_{geo}$ A È DIAGONALIZZABILE.

LA MATRICE RAPPRESENTATIVA DI L_A RISPETTO A $\mathcal{B}$ È $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$

OSSERVAZIONE

SIA V S.V. DI DIMENSIONE n E $\mathcal{B}$ BASE DI V . $T: V \rightarrow V$ T.L.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ C_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow C_{\mathcal{B}} \end{array}$$

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) \rightarrow \text{TRASFORMAZIONE LINEARE INDOTTA DALLA MATRICE RAPPRESENTATIVA DI T RISPETTO A B}$$

• T È DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ È DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ È DIAGONALIZZABILE

• $\lambda \in \mathbb{K}$ È AUTOVALORE DI T $\Leftrightarrow \lambda$ È AUTOVALORE DI $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$

• v È AUTOVETTORE DI T RELATIVO A λ $\Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}}$ È AUTOVETTORE DI $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ RELATIVO A λ

SPAZI EUCLIDEI

SIA V UNO S.V. SU $\mathbb{R}$.

IL ~~PRODOTTO~~ **PRODOTTI SCALARE** È UNA FUNZIONE $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$

TALE DA SODDISFARE LE PROPRIETÀ:

- ① $\forall v, w \in V, \langle v | w \rangle = \langle w | v \rangle$
- ② $\forall u, v, w \in V, \langle v | u + w \rangle = \langle v | u \rangle + \langle v | w \rangle$
 $\langle u + w | v \rangle = \langle u | v \rangle + \langle w | v \rangle$
- ③ $\forall t \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V, \langle v | tw \rangle = t \langle v | w \rangle = \langle tv | w \rangle$
- ④ $\forall v \in V, \langle v | v \rangle \geq 0 \wedge \langle v | v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ESEMPIO

SIA V LO S.V. SU $\mathbb{R}$ DEI VETTORI GEOMETRICI NELLO SPAZIO.

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta$, CON θ ANGOLO TRA $\vec{v}$ E $\vec{w}$, È UN PRODOTTI SCALARE SU V

CONSIDERIAMO $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

IL P.S. STANDARD È $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$

SPAZIO EUCLIDEO

UNO **SPAZIO EUCLIDEO** È UNO S.V. SU $\mathbb{R}$ MUNITO DI PRODOTTI SCALARE

SI OSSERVA CHE MUOVI S.E. ~~VALGONO~~ VALGONO:

- $\forall v \in V, \langle v | 0 \rangle = \langle 0 | v \rangle = 0$
- $\forall v, v_1, \dots, v_k \in V, \forall r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ ABBIAMO:
 $\langle v | r_1 v_1 + \dots + r_k v_k \rangle = r_1 \langle v | v_1 \rangle + \dots + r_k \langle v | v_k \rangle$

NORMA (O LUNGHEZZA)

SIA V UNO S.E., DEFINIAMO $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ LA **NORMA** DI $v \in V$, OVVERO LA SUA LUNGHEZZA

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad v \cdot v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \quad \|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

VERSORE

DEFINIAMO VERSORE IL VETTORE DI LUNGHEZZA UNITARIA.

AD ESEMPIO SE $v \in V$ S.E. E $v \neq 0$ ALLORA $w = \frac{v}{\|v\|}$ È UN VERSORE

PROPRIETÀ DERIVANTI DALLA NORMA

SIANO v S.E., $v \in V$ E $\gamma \in \mathbb{R}$, VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $\|v\| \geq 0$ $\wedge$ $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\|\gamma v\| = |\gamma| \cdot \|v\|$

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARTZ

SIA v S.E., ALLORA PER OGNI $v, w \in V$ VALE:

$$|\langle v | w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

dim: SE $v = 0$ O $w = 0$ ALLORA $|\langle v | w \rangle| = 0$ $\wedge$ $\|v\| \cdot \|w\| = 0$

SUPPONIAMO ORA CHE $v \neq 0$ E $w \neq 0$, SIANO $a = \|v\| > 0$ E $b = \|w\| > 0$

OSSERVIAMO CHE $0 \leq \|bv - aw\|^2 = \langle bv - aw | bv - aw \rangle$ (PER DEFINIZIONE DI NORMA)

ORA SVOLGIAMO I CALCOLI:

$$\begin{aligned} \langle bv - aw | bv - aw \rangle &= \langle bv | bv - aw \rangle + \langle -aw | bv - aw \rangle = \\ &= \langle bv | bv \rangle + \langle bv | -aw \rangle + \langle -aw | bv \rangle + \langle -aw | -aw \rangle = \\ &= b^2 \langle v | v \rangle - ab \langle v | w \rangle - ab \langle w | v \rangle + a^2 \langle w | w \rangle = \\ &= b^2 a^2 + a^2 b^2 - 2ab \langle v | w \rangle = 2ab \left(ab - \langle v | w \rangle \right) = \\ &= ab - \langle v | w \rangle \geq 0 \Rightarrow ab \geq \langle v | w \rangle \text{ con } ab = \|v\| \cdot \|w\| \end{aligned}$$

E POICHÉ $\langle v | w \rangle \leq |\langle v | w \rangle|$ ABBIAMO $\|v\| \cdot \|w\| \geq |\langle v | w \rangle|$
 $\langle v | w \rangle \geq -ab$

□

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

SIA V UNO S.E., ALLORA $\forall v, w \in V$ VALE:

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

dim: $\|w + v\|^2 = \langle v + w | v + w \rangle = \langle v | v + w \rangle + \langle w | v + w \rangle =$
 $= \langle v | v \rangle + 2\langle v | w \rangle + \langle w | w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v | w \rangle \leq$

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2 \quad \text{FACENDO LA RADICE ABBIAMO FINITO} \quad \square$$

ANGOLO FRA DUE VETTORI

SIANO $v, w \in V \setminus \{0\}$, CON V S.E.

L'ANGOLO FORMATO DA v E w È $\angle(v, w) = \arccos \left(\frac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right)$

SI SEMPLIFICANO I MODULI E RIMANE IL COSENO.

SI OSSERVI CHE BANALMENTE $-1 \leq \frac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$ (perché È IL CODOMINIO DEL COSENO)

CONSIDERAMO AD ESEMPIO $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ E $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ IN $\mathbb{R}^3$

$$\angle(v, w) = \arccos \left(\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{2}} \right) = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 45^\circ$$

DISTANZA FRA VETTORI

SIA V UNO S.E., LA DISTANZA TRA $v, w \in V$ È $d(v, w) := \|v - w\|$

SIANO $v, w, u \in V$, VARIAMO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $d(v, w) \geq 0 \wedge d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$
- $d(v, w) = d(w, v)$
- $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$

dim: $d(v, w) = \|v - w\| = \|v - u + u - w\| \leq \|v - u\| + \|u - w\| = d(v, u) + d(u, w) \quad \square$

ORTOGONALITÀ E ORTONORMALITÀ

SIANO V S.E. E $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ È ORTOGONALE SE $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j, \langle v_i | v_j \rangle = 0$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ È ORTONORMALE SE È ORTOGONALE E $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \|v_i\| = 1$

AD ESEMPIO IN $\mathbb{R}^n$ LA BASE CANONICA $\{e_1, \dots, e_n\}$ È ORTONORMALE

DIAMO QUESTE ULTERIORI DEFINIZIONI:

B , BASE DI V , È UNA BASE ORTOGONALE SE $\{b_1, \dots, b_n\}$ È ORTOGONALE

B , BASE DI V , È UNA BASE ORTONORMALE SE $\{b_1, \dots, b_n\}$ È ORTONORMALE

ESEMPIO

CONSIDERIAMO IN $\mathbb{R}^4$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$

LA BASE $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ È UNA BASE ORTOGONALE, POICHÉ:

$$v_1 \cdot v_2 = 0, \quad v_1 \cdot v_3 = 0, \quad v_1 \cdot v_4 = 0, \quad v_2 \cdot v_3 = 0, \quad v_2 \cdot v_4 = 0, \quad v_3 \cdot v_4 = 0$$

PROPRIETÀ

SIA V S.E., VALGONO:

• SE $v \in V - \{0\}$ ALLORA $\{v\}$ È ORTOGONALE

• $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ È ORTOGONALE, ALLORA $\{\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n\}$ È ORTOGONALE

CON $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, ALLORA ~~$\{v_1, \dots, v_n\}$ È ORTOGONALE~~

• $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V - \{0\}$ È ORTOGONALE, ALLORA $\{v_1, \dots, v_n\}$ È L.I.

INFATTI $\langle \alpha_i v_i | \alpha_j v_j \rangle = \alpha_i \alpha_j \langle v_i | v_j \rangle$

• $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V - \{0\}$ È ORTOGONALE, $\Rightarrow \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$ È ORTONORMALE

TEOREMA DELLO SVILUPPO DI FOURIER

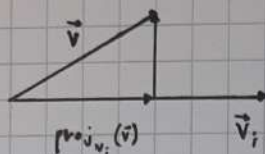
SIA V S.E. E SIA $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE ORTOGONALE DI V .

ALLORA $\forall v \in V$ VALE:

$$v = \frac{\langle v | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v | v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle v | v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

SI OSSERVA CHE:

$$\frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i =: \text{proj}_{v_i}(v)$$



dim: $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ UNICI TALI CHE $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ ($\{v_1, \dots, v_n\}$ È UNA BASE)

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \langle v | v_i \rangle = \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n | v_i \rangle =$$

$$= a_1 \langle v_1 | v_i \rangle + a_2 \langle v_2 | v_i \rangle + \dots + a_i \langle v_i | v_i \rangle + \dots + a_n \langle v_n | v_i \rangle$$

POICHÉ B È UNA BASE ORTOGONALE TUTTI I PRODOTTI SCALARI SONO PARI A 0, TRanne 1:

$$\langle v | v_i \rangle = a_i \langle v_i | v_i \rangle = a_i \|v_i\|^2 \Rightarrow$$

$$a_i = \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

□

LEMMA (PREPARAZIONE ALL'ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT)

SIA V S.E. E SIANO $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ ORTOGONALE CON $v \in V$

$$\text{PONIAMO } v_{n+1} = v - \left(\frac{\langle v | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle v | v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \right)$$

ALLORA $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ È ORTOGONALE

dim: PER $i \in \{1, \dots, n\}$ $\langle v_{n+1} | v_i \rangle = \langle v - \frac{\langle v | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \dots - \frac{\langle v | v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n | v_i \rangle =$

$$= \langle v | v_i \rangle - \frac{\langle v | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \langle v_1 | v_i \rangle - \dots - \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \langle v_i | v_i \rangle - \dots - \frac{\langle v | v_n \rangle}{\|v_n\|^2} \langle v_n | v_i \rangle$$

ALLO STESSO MODO DI TUTTA, SI ANNULLANO TUTTI TRanne 1:

$$\langle v_{n+1} | v_i \rangle = \langle v | v_i \rangle - \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \|v_i\|^2 = 0 \text{ QUINDI } v_{n+1} \text{ FA PARTE DELLA BASE} \quad \square$$

ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT

SIA V UNO S.E. E SIA $U \subseteq V$ CON $(b_1, \dots, b_m)$ BASE DI U .

QUESTO ALGORITMO PERMETTE DI TROVARE UNA BASE ORTOGONALE A PARTIRE DA UNA BASE QUALSIASI.

ALLORA ESISTE $(v_1, \dots, v_m)$ BASE DI U

$$v_1 = b_1$$

$$v_2 = b_2 - \frac{\langle b_2 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = b_3 - \frac{\langle b_3 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle b_3 | v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$v_m = b_m - \frac{\langle b_m | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \dots - \frac{\langle b_m | v_{m-1} \rangle}{\|v_{m-1}\|^2} v_{m-1}$$

VALE INOLTRE $\forall k \in \{1, \dots, m\}, \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$

dim: $v_1 = b_1 \neq 0 \quad \langle v_1 \rangle = \langle b_1 \rangle \quad \{v_1\}$ È ORTOGONALE

$v_2 \notin \langle v_1 \rangle$ PERCHÉ $\{b_1, b_2\}$ È L.I., PER IL LEMMA $\{v_1, v_2\}$ È ORTOGONALE
E $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$ E v_2 È DEFINITO A PARTIRE
PROPRIO DA b_1 E b_2

PROCEDEMO COSÌ FINO A m ...

$\{v_1, \dots, v_m\}$ È ORTOGONALE E $V = \langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ È UNA BASE DI U $\square$

COMPLEMENTO ORTOGONALE

SIA U S.E. E SIA $U \subseteq V$.

CHIAMAMO COMPLEMENTO ORTOGONALE DI U IN V L'INSIEME COSÌ DEFINITO:

$$U^\perp := \{v \in V : \forall u \in U : \langle v | u \rangle = 0\}$$

IN ALTRE PAROLE L'INSIEME DEI VETTORI V PERPENDICOLARI AI VETTORI DI U

SI OSSERVI CHE:

$$V = U \oplus U^\perp$$