Vittorio Alzetta

LINGUAGGIO MATEMATICO E INSIEMI

- PER POTER PARLARE DI QUALCOSA BISOGNA FORNIRE DELLE DEFINIZIONI, ALLA BASE DELLA MATEMATICA TROVIAMO ALCUNI CONCETTI PRIMITIVI:

- INSIEME ← ELEMENTO
  APPARTENENZA DI UN ELEMENTO ALL'INSIEME
  QUESTI ELEMENTI SODDISFANO L'ASSIOMA O PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO
  - DATO UN INSIEME A, PER OGNI ELEMENTO V SI VERIFICA 1 SOLA CONDIZIONE: $V \in A$, $V \notin A$

-

ESEMPI: - NUMERI INTERI POSITIVI DIVISIBILI PER 2 (PARI)

- NUMERI INTERI CHE COMPAIONO NELL'ALLINEAMENTO DECIMALE DI π

- VALORI DI VERITÁ ← VERO / FALSO
  PROPOSIZIONE
  É UNA FRASE A CUI SI ATTRIBUISCE 1 SOLO VALORE DI VERITÁ

ESEMPI: - $1 < 2$, É UNA PROPOSIZIONE (VERA)

- $3+5=2$, É UNA PROPOSIZIONE (FALSA)

- QUESTA FRASE É FALSA, NON É UNA PROPOSIZIONE

PROPOSIZIONI

- NE ESISTONO DI VARI TIPI: DEFINIZIONI (PER NUOVI CONCETTI), ASSIOMI, POSTULATI, PRINCIPI (VERI A PRIORI), TEOREMI, LEMMI, COROLLARI (DA DIMOSTRARE)

CONNETTIVI

- USATI PER CONNETTERE PIÚ PROPOSIZIONI CON LO SCOPO DI FORMARNE PIÚ COMPLESSE

CONNETTIVO	SIMBOLO	TIPO
E	$\wedge$	CONGIUNZIONE
O, OPPURE	$\vee$	DISGIUNZIONE DEBOLE
NON	$\neg$	NEGAZIONE
IMPLICA	$\Rightarrow$	IMPLICAZIONE

TABELLE DI VERITÁ

- STABILISCONO COME UN CONNETTIVO OPERA SULLE PROPOSIZIONI

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	$P \wedge Q$
V	F	F
V	V	V
F	V	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

IMPLICAZIONE:

- SE SI PARTE DA IPOTESI VERE LA TESI DEVE ESSERE VERA, SE SI PARTE DA IPOTESI FALSE TUTTO É POSSIBILE

Vittorio Alzetta

LA DOPPIA IMPLICAZIONE

- IN SIMBOLI QUESTO CONNETTIVO SI RAPPRESENTA COSÍ:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

- CONSISTE NELL'UNIONE DI PIÚ CONNETTIVI SEMPLICI:

$$= (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

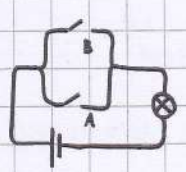
- COSTRUISCO LA TABELLA DI VERITÁ PER STUDIARLA:

P	Q	P→Q	Q→P	(P→Q) ∧ (Q→P)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

- SI NOTI CHE LA DOPPIA IMPLICAZIONE É VERA SOLO QUANDO LE PROPOSIZIONI INIZIALI SONO ENTRAMBE VERE O ENTRAMBE FALSE
  - IN BREVE QUANDO SONO EQUIVALENTI (STESSO VALORE)

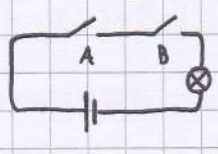
LOGICA DEI CIRCUITI

[1]



A	B	LAMP.
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

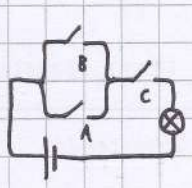
[2]



A	B	LAMP
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

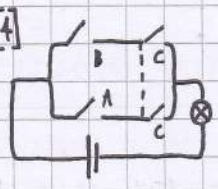
- QUESTI CIRCUITI CORRISPONDONO A:
  - [1] - CONNETTIVO V (O)
  - [2] - CONNETTIVO ∧ (E)

[3]



A	B	C	LAMP
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

[4]



A	B	C	LAMP
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

- NONOSTANTE I CIRCUITI DIVERSI LE TABELLE DI VERITÁ SONO UGUALI
  - ⇒ SI NOTI CHE LA PROPOSIZIONE:

$$[3] \longleftrightarrow [4]$$

É SEMPRE VERA (SONO EQUIVALENTI)

PROPOSIZIONI EQUIVALENTI

- POSSONO ESISTERE, COME NEL CASO DEI CIRCUITI [3] E [4], DUE PROPOSIZIONI EQUIVALENTI (T. DI V. UGUALI)

ESEMPI:

[1] - SE n É DIVISIBILE PER 4 ALLORA É DIVISIBILE PER 2

[2] - n NON É DIVISIBILE PER 4 O n É DIVISIBILE PER 2

[1]

P	Q	P→Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

[2]

P	Q	¬P	(¬P) ∨ Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

- LA T. DI VERITÁ É UGUALE → SONO EQUIVALENTI
- POSSIAMO SCRIVERE:

$$[P \rightarrow Q] \longleftrightarrow [(\neg P) \vee Q]$$

Vittorio Alzetta

TEOREMA DELLA CONTRONOMINALE

- CONSISTE NELLA SEGUENTE PROPOSIZIONE:

$$[P \to Q] \leftrightarrow [(\neg Q) \to (\neg P)]$$

- PER DIMOSTRARLO SCRIVO LA TABELLA DI VERITÁ DEL PRIMO E DEL SECONDO ELEMENTO

P	Q	P→Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	¬Q	¬P	(¬Q)→(¬P)
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

- POICHÉ LE 2 TABELLE COINCIDONO POSSIAMO DIRE CHE I 2 ELEMENTI SONO EQUIVALENTI E PERCIÓ LA DOPPIA IMPLICAZIONE É SEMPRE VERA

ESEMPIO DI UTILIZZO DEL TEOREMA

- PROPOSIZIONE: n É PARI $\leftrightarrow$ n^2 É PARI (CON n INTERO)
- PER DIMOSTRARLA CONVIENE DIVIDERE IN 2 SOTTO-PROPOSIZIONI: $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

n PARI $\to$ n^2 PARI — dim. n PARI $\leftrightarrow \exists\, k : n = 2k \to n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \to n^2$ PARI

$P \to Q$

n^2 PARI $\to$ n PARI — dim. n^2 PARI $\leftrightarrow \exists\, k : n^2 = 2k \to n = \sqrt{2k}$ DIFFICILE DIRE SE SIA PARI O NO

$Q \to P$

dim'. T. DELLA CONTRONOMINALE (DIM. PER ASSURDO): $[Q \to P] \leftrightarrow [(\neg P) \to (\neg Q)]$

NON n^2 PARI $\to$ NON n^2 PARI = n^2 DISPARI $\to n^2$ DISPARI

n^2 DISPARI $\leftrightarrow \exists\, k : n^2 = 2k + 1 \to n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \to n^2$ DISPARI

IL T. DELLA C. ASSICURA QUINDI CHE $Q \to P$ É SEMPRE VERA

QUANTIFICATORI

$\exists$ - ESISTE $\quad \forall$ - PER OGNI

$\exists\, x : x^2 \geq 1$ (ESISTE UN X TALE CHE $x^2 \geq 1$) (VERA)

$\exists\, x : x^2 < 0$ (ESISTE UN X TALE CHE $x^2 < 0$) (FALSA)

$\forall\, x : x^2 \geq 0$ (PER OGNI X SI HA CHE $x^2 \geq 0$) (VERA)

$\forall\, x : x^2 \geq 1$ (PER OGNI X SI HA CHE $x^2 \geq 1$) (FALSA)

$\forall\, x : P(x)$ NEGATO DIVENTA $\exists\, x : \neg P(x)$ PERCIÓ AVREMO CHE $\neg \forall\, x : P(x) \leftrightarrow \exists\, x : \neg P(x)$

Vittorio Alzetta

OSSERVAZIONI

- POSSIAMO COLLOCARE $\forall$ ALLA FINE DELLA PROPOSIZIONE $\left(\forall x : P(x) = P(x) \forall x \right)$
- $\exists!$ = ESISTE ESATTAMENTE UNO
- $\nexists$ = NON ESISTE

RAPPRESENTAZIONE DEGLI INSIEMI

- RAPPRESENTAZIONE ~~ESTENSIVA~~ GRAFICA

ESEMPIO:

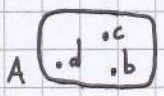


DIAGRAMMA DI VENN

- RAPPRESENTAZIONE ESTENSIVA

ESEMPIO: $A = \{2, 4, 6, 8 \dots\}$ LA CONTINUAZIONE È LASCIATA AL LETTORE

- RAPPRESENTAZIONE INTENSIVA O COMPATTA

CASO GENERALE: $S = \{ x \in U : x \text{ SODDISFA } P(x) \}$

ESEMPIO:

DEFINIAMO UN INSIEME AMBIENTE $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$S = \{ x \in \mathbb{N} : x \text{ SODDISFA } P(x) \}$ CON $P(x) = x$ È DIVISIBILE PER 2

$D = \{ x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k + 1 \}$ = INSIEME DEI NUMERI DISPARI

PARADOSSO DI RUSSEL

- ESISTONO 2 TIPI DI INSIEMI:
  - QUELLI CHE APPARTENGONO A SE STESSI (INSIEME DELLE IDEE, L'INSIEME È UN'IDEA, PERCIÒ È ELEMENTO)
  - QUELLI CHE NON APPARTENGONO A SE STESSI (INSIEME DELLE BARRE, L'INSIEME NON È UNA BARRA)

$R = \{ X : X \notin X \}$ PER DEFINIZIONE SI HA CHE:

↓ INSIEMI CHE NON APPARTENGONO A SE STESSI

- SE $A \in A$ ALLORA $A \notin A$
- SE $A \notin A$ ALLORA $A \in A$

] NON SI SA SE A È UN ELEMENTO

] PARADOSSO

Vittorio Alzetta

• PER EVITARE IL PARADOSSO SI FISSA UN INSIEME AMBIENTE U

$$I = \{X \in U : X \notin X\} \qquad \text{SE } I \in U \text{ ALLORA } I \in I \wedge I \notin I \text{ (PARADOSSO)}$$

SE $I \notin U$ NON CI SONO PARADOSSI

INSIEME VUOTO

• ESISTE UN INSIEME VUOTO INDICATO DAL SIMBOLO $\emptyset$

UGUAGLIANZA E INCLUSIONE

• GLI INSIEMI A E B SONO UGUALI SE HANNO GLI STESSI ELEMENTI E VALE:

$$X \in B \leftrightarrow X \in A \quad \text{OSSIA} \quad \underbrace{(X \in B) \rightarrow (X \in A)}_{X \in A \;\forall\; X \in B} \wedge \underbrace{(X \in A) \rightarrow (X \in B)}_{X \in B \;\forall\; X \in A}$$

• L'INSIEME A É SOTTOINSIEME DI B SE VALE SOLO UNA DELLE IMPLICAZIONI

$$A \subseteq B \quad \text{SE E SOLO SE} \quad (X \in A) \rightarrow (X \in B)$$
$$B \subseteq A \quad \text{SE E SOLO SE} \quad (X \in B) \rightarrow (X \in A)$$

• NE SEGUE CHE:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \leftrightarrow A = B$$

INSIEME DELLE PARTI

• DATO L'INSIEME A AVREMO CHE $\mathcal{P}(A)$ É L'INSIEME DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI A:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

ESEMPI:

$A = \{b\} \quad \mathcal{P}(A) = \{\{b\}, \emptyset\}$

$A = \emptyset \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$

$A = \{\emptyset\} \quad \mathcal{P}(A) = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$

Vittorio Alzetta

UNIONE ED INTERSEZIONE

- DATI A E B SOTTOINSIEMI DI U DEFINIAMO L'UNIONE E L'INTERSEZIONE COSÍ:

$$A \cup B := \{ x \in U : (x \in A) \vee (x \in B) \} \quad \text{UNIONE}$$

$$A \cap B := \{ x \in U : (x \in A) \wedge (x \in B) \} \quad \text{INTERSEZIONE}$$

- SE $A \cap B = \emptyset$ GLI INSIEMI SI DICONO DISGIUNTI

FAMIGLIE DI INSIEMI

- UNA FAMIGLIA DI INSIEMI, $\mathcal{F}$, É UN INSIEME I CUI ELEMENTI SONO A LORO VOLTA INSIEMI:

$$\mathcal{F} = \{ A_i \in \mathcal{P}(U) : i \in I \}$$

QUESTO É L'INSIEME DEI SOTTOINSIEMI A_i DI U DOVE i É SCELTO TRA GLI INDICI I

SE $I = \mathbb{N}$ ALLORA $\mathcal{F} = \{ A_1, A_2, A_3 \dots, A_n \dots \}$

UNIONE E INTERSEZIONE DI FAMIGLIE DI INSIEMI

- LE DEFINIZIONI DI UNIONE ~~UNIO~~ E INTERSEZIONE SI POSSONO ESTENDERE A PIÙ DI DUE ~~ELEMENTI~~ INSIEMI.

$$\bigcup \mathcal{F} := \bigcup_{i \in I} A_i := \{ x \in U : \exists\, i \in I : x \in A_i \}$$

$$\bigcap \mathcal{F} := \bigcap_{i \in I} A_i := \{ x \in U : x \in A_i \ \forall\, i \in I \}$$

COMPLEMENTARE E DIFFERENZA DI INSIEMI

- DATO UN INSIEME U E $A \subseteq U$ DEFINIAMO COMPLEMENTARE DI A IN U:

$$A^c := C(A) := \{ x \in U : x \notin A \}$$

- DEFINIAMO INVECE DIFFERENZA TRA DUE SOTTOINSIEMI A E B DI U:

$$A \setminus B := \{ x \in U : (x \in A) \wedge (x \notin B) \}$$

Vittorio Alzetta

COPPIA ORDINATA

- LO ASSUMIAMO COME CONCETTO PRIMITIVO, CONSISTE IN UN INSIEME IL CUI ORDINE DEGLI ELEMENTI CONTA

SAPPIAMO CHE $\{a,b\} = \{b,a\}$ MA $(a,b) \neq (b,a)$

INOLTRE $(x,y) = (x',y') \longleftrightarrow (x = x') \wedge (y = y')$

- IN REALTÁ É POSSIBILE IDEARNE UNA DEFINIZIONE, IN QUESTO MODO:

CONSIDERIAMO L'INSIEME $A = \{\{x\}, \{x,y\}\}$ E $B = \{\{x'\}, \{x',y'\}\}$, PONENDOLI UGUALI:

$$(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x'\},\{x',y'\}\} \longleftrightarrow \{x\} = \{x'\} \wedge \{x,y\} = \{x',y'\} \longleftrightarrow x = x' \wedge y = y'$$

PRODOTTO CARTESIANO

- DEFINIAMO IL PRODOTTO CARTESIANO DI DUE INSIEMI A E B COME:

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

- IL PIANO CARTESIANO É IL PRODOTTO CARTESIANO $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ O $\mathbb{R}^2$

PRODOTTO CARTESIANO DI n INSIEMI E n-UPLE ORDINATE

- ANALOGAMENTE A QUANTO APPENA FATTO POSSIAMO DEFINIRE IL PRODOTTO CARTESIANO DI n INSIEMI:

$$A_1 \times A_2 \dots A_n := \{(a_1, a_2 \dots a_n) : a_i \in A_i, \; i \in \{1,2,3 \dots n\}\}$$

└ SE GLI INSIEMI SONO UGUALI TRA LORO POSSIAMO SCRIVERE $\underbrace{A \times A \dots A}_{n \text{ VOLTE}} = A^n$

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} := \{0,1,2,3,4 \dots\}$ NUMERI NATURALI

└ MOLTI NON LO CONSIDERANO NATURALE PERCHÉ INTRODOTTO MOLTO TEMPO DOPO GLI ALTRI

- NON LI É PERMESSO DI COMPIERE TUTTE LE OPERAZIONI INTERNAMENTE ALL'INSIEME, DOBBIAMO AMPLIARLO

└ ES. SOTTRAZIONE

Vittorio Alzetta

$\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3 \dots\}$ NUMERI INTERI

• TUTTAVIA, SE VOGLIAMO COMPIERE DIVISIONI ABBIAMO BISOGNO DI AMPLIARE L'INSIEME

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ NUMERI RAZIONALI

↳ DA "RATIO" = RAPPORTO

• É DIMOSTRABILE CHE NON TUTTI I NUMERI SONO ESPRIMIBILI COME RAPPORTO DI INTERI

DIMOSTRAZIONE:

• $x = \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ SUPPONIAMO, PER ASSURDO, CHE SIA VERO

⟶ $\frac{m}{n} = x$ ASSUMIAMO CHE m E n SIANO PRIMI FRA LORO (FRAZIONE RIDOTTA AI MINIMI TERMINI)

⟶ $\frac{m^2}{n^2} = 3$ ⟶ $m^2 = 3n^2$ [1]

• SE m^2 É DIVISIBILE PER 3 LO É ANCHE m?

m^2 DIV 3 ⟷ m DIV 3

m^2 DIV 3 → m DIV 3

SFRUTTIAMO IL TEOREMA DELLA CONTRONOMINALE

m NON DIV 3 → m^2 NON DIV 3

$m = 3k + 1 \rightarrow m^2 = 9k^2 + 6k + 1$

$m = 3k + 2 \rightarrow m^2 = 9k^2 + 12k + 4$

→ m^2 NON DIV 3

m DIV 3 → m^2 DIV 3

$m = 3k \rightarrow m^2 = 9k^2 \rightarrow m^2 = 3(3k^2) \rightarrow$

→ m^2 DIV 3

• TORNANDO ALLA [1] CONCLUDIAMO CHE:

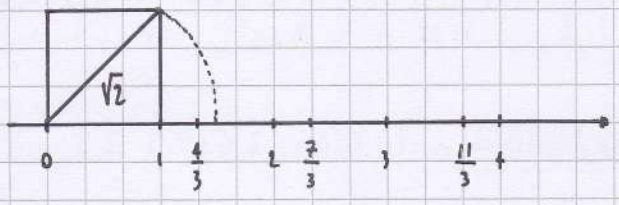
m^2 É DIVISIBILE PER 3 ⟷ m É DIVISIBILE PER 3 ⟷ $m = 3k$ ⟷ $9k^2 = 3n^2$ ⟷

⟷ $3k^2 = n^2$ ⟶ n^2 É DIVISIBILE PER 3 ⟷ n É DIVISIBILE PER 3 ⟷ m E n NON SONO PRIMI FRA LORO

⟶ CONTRADDIZIONE DELLE IPOTESI ⟶ $x = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Vittorio Alzetta

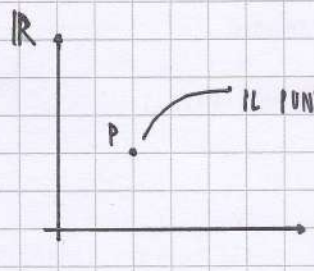
• RAGIONANDO GEOMETRICAMENTE POSSIAMO PENSARE AD UNA RETTA ORIENTATA:



IN QUESTA RETTA RIMANGONO DEI BUCHI, NON RAPPRESENTABILI

$\mathbb{R}$:= INSIEME DI TUTTI I PUNTI PRESENTI NELLA RETTA — NUMERI REALI

• NONOSTANTE CIÓ NON SIAMO ANCORA IN GRADO DI SVOLGERE ALCUNE OPERAZIONI, QUALI RADICI DI NUMERI NEGATIVI. NON AVENDO PIÚ SPAZIO NELLA RETTA (1 DIMENSIONE) AMPLIAMOCI IN 2 DIMENSIONI



IL PUNTO P NON APPARTIENE A $\mathbb{R}$ MA A $\mathbb{C}$

└ INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI

RAPPRESENTAZIONE DECIMALE

• I NUMERI RAZIONALI POSSONO ESSERE RAPPRESENTATI MEDIANTE ALLINEAMENTI DECIMALI COSTITUITI DA UN NUMERO INFINITO DI CIFRE

$$p.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots \quad \text{con } p \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha_i \in \{0,1,2\ldots 9\}\ \forall i \in \mathbb{N}$$

ESEMPI:

$$\frac{11}{4} = 2,750\overline{0} \qquad \frac{1}{9} = 0,\overline{1} \qquad \frac{19}{6} = 3,1\overline{6}$$

• QUELLE QUI SOPRA MOSTRATE SONO RAPPRESENTAZIONI DECIMALI PERIODICHE

└ SONO PERIODICHE LE CIFRE CHE DA UN CERTO PUNTO IN POI RIPETONO UN NUMERO FISSO DI CIFRE

ESEMPIO DI DIVISIONE CON IL RAZIONAMENTO:

$$\frac{1}{9} = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{10} = \left(\frac{9}{9}+\frac{1}{9}\right)\frac{1}{10} = \frac{1}{10}+\frac{1}{90} = \frac{1}{10}+\left(\frac{100}{90}\cdot\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{10}+\left(\frac{90}{90}+\frac{10}{90}\right)\frac{1}{100} = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{900}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}\ldots = 0,1111 = 0,\overline{1}$$

Vittorio Alzetta

DIVERSE RAPPRESENTAZIONI DECIMALI

$\frac{1}{9} = 0,\bar{1}$ DUNQUE $\frac{2}{9} = 2 \cdot \frac{1}{9} = 0,\bar{2}$ E QUINDI $\frac{9}{9} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 0,\bar{9} \rightarrow 1,\bar{0} = 0,\bar{9}$

- NON ESISTE UN UNICA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE $(11/4 = 2,750\bar{0} = 2,749\bar{9})$
  - ALLINEAMENTO DECIMALE PROPRIO, NON COMPARE LA CIFRA 9 DA UN CERTO PUNTO IN POI
- DIVIDENDO 2 NUMERI INTERI FRA LORO (NUMERO RAZIONALE) SI OTTENGONO SOLO ALLINEAMENTI DECIMALI PERIODICI
- OGNI ALLINEAMENTO DECIMALE PERIODICO INDIVIDUA UN SOLO NUMERO RAZIONALE
- L'INSIEME $\mathbb{Q}$ É RAPPRESENTATO DALL'INSIEME DEGLI ALLINEAMENTI DECIMALI PROPRI

NUMERI IRRAZIONALI

- PROVIAMO A SCRIVERE L'ALLINEAMENTO DECIMALE DELLA RADICE DI 2

$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$$

$$1 < \sqrt{2} < 2 \qquad \sqrt{2} = 1,\dots$$

$$1,4^2 < 2 < 1,5^2 \qquad \sqrt{2} = 1,4\dots$$

$$1,41^2 < 2 < 1,42^2 \qquad \sqrt{2} = 1,41\dots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

NON É UN A. DECIMALE PERIO. ALTRIMENTI $\sqrt{2}$ SAREBBE RAZIONALE

$$\sqrt{2} = 1,4142\,13562\,37309\,54880\dots$$

- UN NUMERO REALE É UN ALLINEAMENTO DECIMALE (NON PERIODICO O PERIODICO)
  - NON PERIODICO → N. IRRAZIONALI
  - PERIODICO → N. RAZIONALI

INTERVALLI

- DATI DUE ELEMENTI a E b CON $a < b$ DEFINIAMO:

$$]a,b[= (a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$ INTERVALLO APERTO DI ESTREMI a E b

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$ INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI a E b

Vittorio Alzetta

• DEFINIAMO INTERVALLI SEMIAPERTI (DI $\mathbb{R}$) I SEGUENTI:

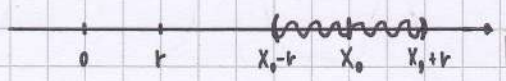
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

CASI PARTICOLARI E IMPORTANTI

• DEFINIAMO INTERVALLO APERTO O CHIUSO DI CENTRO x_0 E RAGGIO r:

$$(x_0 - r, x_0 + r) \qquad [x_0 - r, x_0 + r]$$



CON $x_0 \in \mathbb{R} \wedge r > 0$

• ULTERIORI NOTAZIONI:

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\}$$

INUTILE AGGIUNGERLO

$$(0, +\infty) =: \mathbb{R}^+$$

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$[0, +\infty) =: \mathbb{R}_0^+$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

$$(-\infty, 0) =: \mathbb{R}^-$$

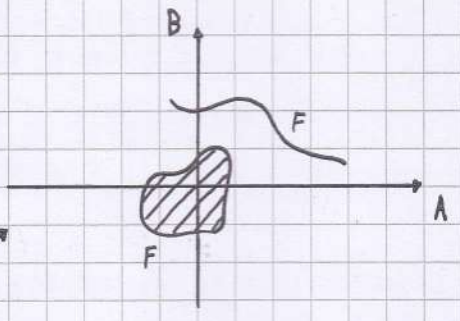
$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$(-\infty, 0] =: \mathbb{R}_0^-$$

Vittorio Alzetta

FUNZIONI

GRAFICO DI FUNZIONE

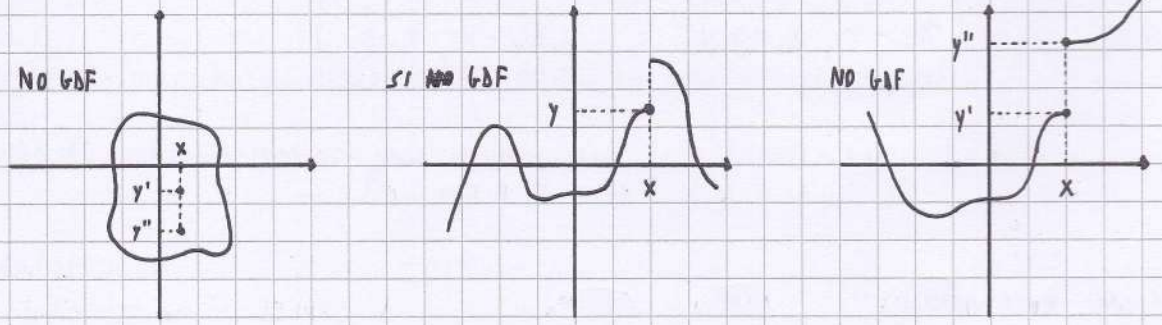


- SONO DATI DUE INSIEMI A E B. UN SOTTOINSIEME F DI $A \times B$ É DETTO GRAFICO DI FUNZIONE* SE VALE:

$$\forall x \in A \; \exists! \, y \in B : (x, y) \in F$$

GLI ELEMENTI DI F SONO LE COPPIE ORDINATE

ESEMPI:



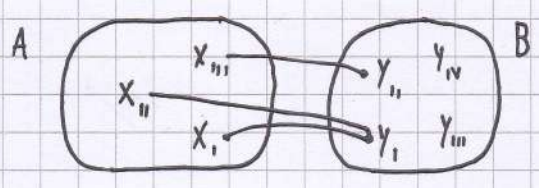
- NON NECESSARIAMENTE A DEVE ESSERE $\mathbb{R}$

- DI SOLITO SCRIVIAMO $y = F(x)$ IN LUOGO DI $(x, y) \in F$, EVENTUALMENTE F DIVENTA f

  DOVE X = VARIABILE (ELEMENTI DEL DOMINIO)

  $f(x)$ = VALORE O IMMAGINE (ELEMENTI DEL CODOMINIO)

- RAPPRESENTAZIONE CON DIAGRAMMA DI VENN



- NOTAZIONE

$f: A \to B$ (FRECCIA TRA 2 INSIEMI)

$x \mapsto f(x) = y$ (FRECCIA + BARRA TRA 2 ELEMENTI)

$f(x)$ É LA LEGGE DELLA FUNZIONE, IL COMPLESSO DI FUNZIONI DA EFFETTUARE SU X PER OTTENERE Y

* DI DOMINIO A E CODOMINIO B

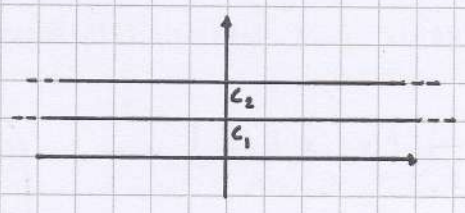
ESEMPI DI FUNZIONI

Vittorio Alzetta

- FUNZIONE COSTANTE: AL MODIFICARSI DELLA VARIABILE NON CAMBIA IL PROPRIO VALORE

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

$$\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = c \quad \forall x \in A$$

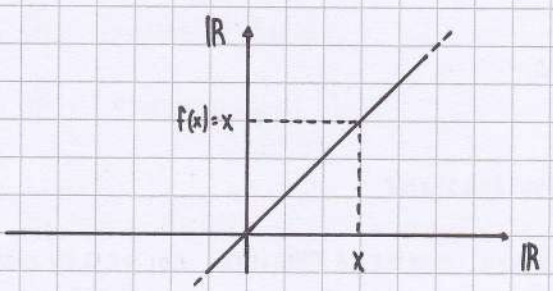


- FUNZIONE IDENTITÁ: ASSOCIA AD UN ELEMENTO x SE STESSO

$$f: A \longrightarrow A$$

$$x \longrightarrow f(x) = x$$

id_A AL POSTO DI f



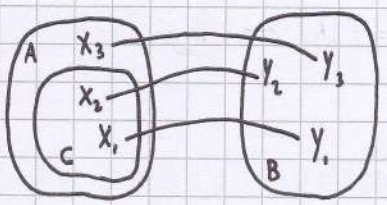
- FUNZIONE RESTRIZIONE: IL DOMINIO DELLA FUNZIONE VIENE RISTRETTO AD UN SOTTOINSIEME

SIA $f : A \to B$ UNA FUNZIONE E $C \subseteq A$

LA RESTRIZIONE DI f A C É:

$$f|_C : C \to B$$

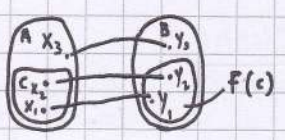
$$x \mapsto f|_C(x) := f(x)$$



INSIEME IMMAGINE

- SIA $f : A \to B$ UNA FUNZIONE
- DATO $C \subseteq A$ DEFINIAMO IMMAGINE DI C MEDIANTE f IL SOTTOINSIEME DI B CHE:

$$f(C) := \{ f(x) : x \in C \}$$



- IN SOSTANZA L'INSIEME DELLE $f(x)$ CHE HANNO x APPARTENENTE A C

ESEMPIO INSIEME CONTROIMMAGINE (IMMAGINE INVERSA)

- SIA $f : A \to B$ UNA FUNZIONE
- DATO $D \subseteq B$ DEFINIAMO CONTROIMMAGINE DI D MEDIANTE f IL SOTTOINSIEME DI A:

$$f^{-1}(D) := \{ x \in A : f(x) \in D \}$$



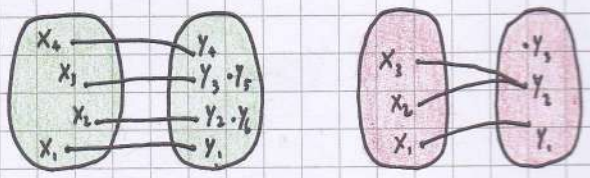
Vittorio Alzetta

FUNZIONE INIETTIVA

- SIA $f: A \to B$ UNA FUNZIONE
- SARÁ INIETTIVA SE A X DISTINTI APPARTENGONO $f(x)$ DISTINTI

$$x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o $$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$$

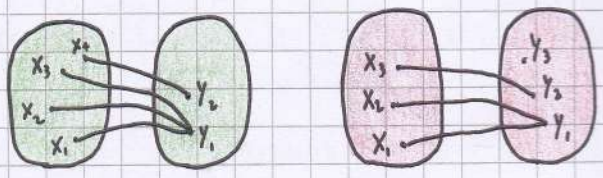


FUNZIONE SURIETTIVA

- SIA $f: A \to B$ UNA FUNZIONE
- SARÁ SURIETTIVA QUANDO L'INSIEME IMMAGINE COINCIDERÁ CON B

$$\forall y \in B \ \exists x : f(x) = y$$

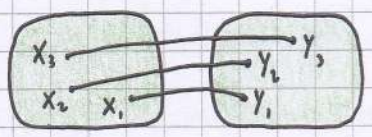
SI NOTI CHE: $B = f(A) \longleftrightarrow B \subseteq f(A)$



FUNZIONE BIIETTIVA

- SIA $f: A \to B$ UNA FUNZIONE
- SE f É SIA INIETTIVA CHE SURIETTIVA ALLORA É ANCHE BIIETTIVA

$$\forall y \in B \ \exists! x : f(x) = y$$



ESEMPIO:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x^2$$

$$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \qquad x \longmapsto x^2$$

- f NON É INIETTIVA E NON É SURIETTIVA
- g É INIETTIVA E NON É SURIETTIVA
- h É BIIETTIVA

Vittorio Alzetta

PROPRIETÁ UTILE FUNZIONI ~~BIIETTIVE~~ INIETTIVE

$$x = y \longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

$\rightarrow$ DALLA DEFINIZIONE DI FUNZIONE

$\leftarrow$ DALLA DEFINIZIONE DI FUNZIONE INIETTIVA

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

$f: A \to B$ CON $A \subseteq \mathbb{R}$ (...VARIABILE REALE)

$x \mapsto f(x)$ $B \subseteq \mathbb{R}$ (FUNZIONI REALI...)

DOMINIO NATURALE

- DATA UNA LEGGE IL DOMINIO NATURALE É IL PIÚ GRANDE SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ TALE PER CUI LA LEGGE HA SENSO

ESEMPI:

$f(x) = x^2 - 3$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$

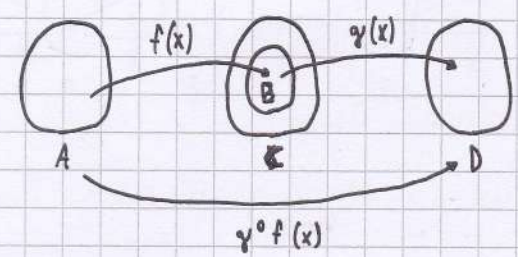
$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ o $x \in \mathbb{R} : x \neq 0$ o $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

FUNZIONI COMPOSTE

- SIANO $f: A \to B$ E $g: C \to D$ DELLE FUNZIONI, CON $B \subseteq C$
- CHIAMEREMO FUNZIONE COMPOSTA DI f E g LA FUNZIONE:

$$g \circ f : A \to D$$

$$x \mapsto g \circ f(x) := g(f(x))$$



ESEMPIO:

$f(x) = x^2 + 1$ $\quad g(y) = \sqrt{y}$ $\quad g \circ f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

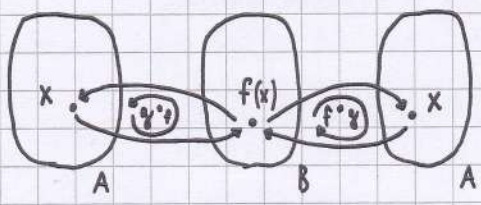
Vittorio Alzetta

FUNZIONE INVERSA E INVERTIBILE

- SIA $f : A \to B$ UNA FUNZIONE
- UNA FUNZIONE $g : B \to A$ É INVERSA SE:

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$



- SE UNA FUNZIONE HA INVERSA LA CHIAMEREMO INVERTIBILE, ESISTONO FUNZIONI NON INVERTIBILI:

$A = \{a\}$ $B = \{a, b\}$

└ SINGOLETTO

L'INVERSA g É DEFINITA DA B AD A

$g : B \to A$ E DEVE SODDISFARE LE CONDIZIONI:

$f_1 : a \longmapsto f_1(a) = a$

$f_2 : a \longmapsto f_2(a) = b$

$g \circ f_1 = id_A$ $\quad f_1 \circ g = id_B$

o

$g \circ f_2 = id_A$ $\quad f_2 \circ g = id_B$

$g \circ f_1 : A \to B \to A$

$a \longmapsto f_1(a) = a \longmapsto g(a) = a$ ✓

$g \circ f_2 : A \to B \to A$

$a \longmapsto f_2(a) = b \longmapsto g(b) = a$ ✓

$f_1 \circ g : B \to A \to B$

$a \longmapsto g(a) = a \longmapsto f_1(a) = a$ ✓

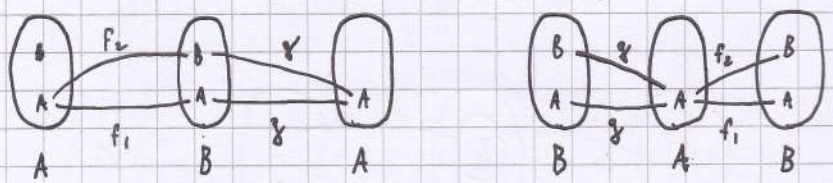
$b \longmapsto g(b) = a \longmapsto f_1(a) = a$ X

$f_2 \circ g : B \to A \to B$

$a \longmapsto g(a) = a \longmapsto f_2(a) = b$ X

$b \longmapsto g(b) = a \longmapsto f_2(a) = b$ ✓

- SI NOTI CHE UNA FUNZIONE É INVERTIBILE QUANDO LA CARDINALITÁ DEI 2 INSIEMI A E B É UGUALE, COME POTREBBE SUCCEDERE CHE DOPO ESSERE CONVERSI IN UN ELEMENTO SI DIVIDANO DI NUOVO?



TEOREMINO

- DIMOSTRIAMO CHE SE f É UNA FUNZIONE INVERTIBILE ALLORA LA SUA INVERSA É UNICA
- UN'IDEA SAREBBE QUELLA DI ASSUMERE L'ESISTENZA DI 2 FUNZIONI INVERSE: g_1 E g_2. TRAMITE UNA SERIE DI UGUAGLIANZE L'OBIETTIVO É DI PASSARE DA $g_1 = \dots = g_2$

Vittorio Alzetta

• SIA g_1 INVERSA DI f $\left(\begin{array}{l} g_1 : B \to A \\ y \mapsto g_1(y) \end{array} \right)$

• SIA g_2 INVERSA DI f $\left(\begin{array}{l} g_2 : B \to A \\ y \mapsto g_2(y) \end{array} \right)$

dim.

$$g_1(y) = g_1(y) \circ id_B(y) = g_1 \circ (g_2 \circ f) = g_1\left(f\left(g_2(y)\right)\right) = id_A(y) \circ g_2(y)$$

$$= g_2(y)$$

ESERCIZIO PER COMPRENDERE ~~LA RELAZIONE~~ IL DOPPIO SIGNIFICATO DI f^{-1} (CONTROIMM. / INVERSA)

• SIA $f : A \to B$ UNA FUNZIONE E $C \subseteq B$ POSSIAMO CONCLUDERE CHE:

$$f^{-1}(C) = \{ x \in A : f(x) \in C \} = \{ f^{-1}(y) : y \in C \}$$

$f^{-1}(C)$: INSIEME CONTROIMMAGINE — $f^{-1}(y)$: FUNZIONE INVERSA DI f

• SI NOTI LA SIMMETRIA ~~DELLE~~ DEI 2 INSIEMI, PER CHIAREZZA NE DISEGNO I DIAGRAMMI DI VENN:



TEOREMA

$f : A \to B$ É INVERTIBILE $\longleftrightarrow$ BIIETTIVA (① INIETTIVA ∧ ② SURIETTIVA)

dim.

$(\rightarrow)$ ① $f(x_1) = f(x_2) \to f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \to x_1 = x_2 \to$ É INIETTIVA

(POICHÉ INVERTIBILE)

② $\forall y \in B \ \exists x \in A : y = f(x)$ — x SARÀ $f^{-1}(y) \to$ É SURIETTIVA

~~$x = f(f^{-1}(x)) = A$~~ $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$

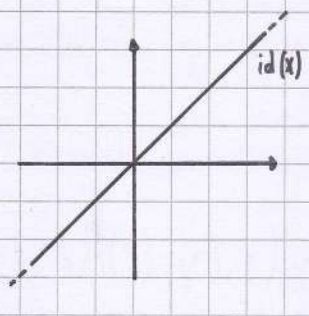
• $(\leftarrow)$ SE UNA FUNZIONE É BIIETTIVA VALE: $\forall y \in B \ \exists! x \in A : y = f(x)$, CHE É LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE

DEFINIAMO $X := f^{-1}(y)$ L'INVERSA.

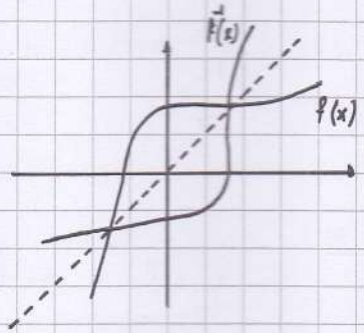
Vittorio Alzetta

GRAFICO DELLA FUNZIONE INVERSA

• SI TENGA PRESENTE CHE UNA FUNZIONE E LA SUA INVERSA, COMPOSTE, DANNO UN'IDENTITÁ:



• A PARTIRE DA UN GRAFICO, EFFETTUANDO UNA RIFLESSIONE DI ASSE id(x) SI PUÓ RICAVARE QUELLO DELL'INVERSA



FUNZIONI MONOTONE

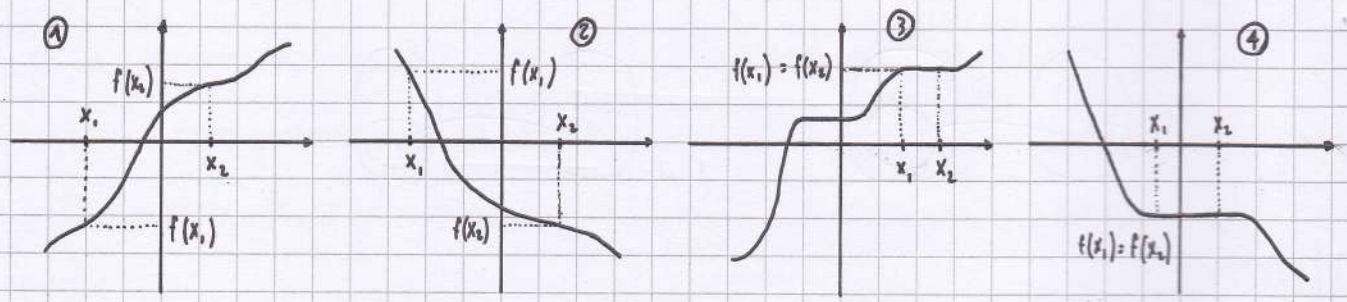
• SIA $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE, SI DICE:

1) MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE SE VALE: $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2) MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE SE VALE: $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3) MONOTONA DEBOLMENTE CRESCENTE (NON DECRESCENTE) SE VALE: $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

4) MONOTONA DEBOLMENTE DECRESCENTE (NON CRESCENTE) SE VALE: $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

• IL VALORE ASSOLUTO O MODULO DI UN NUMERO REALE x É COSÍ DEFINITO:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

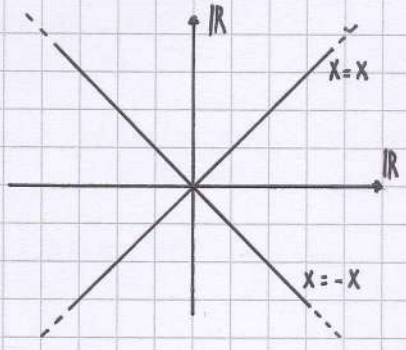
• É QUINDI UNA FUNZIONE CON CODOMINIO LIMITATO A QUESTO:

$$\mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$$

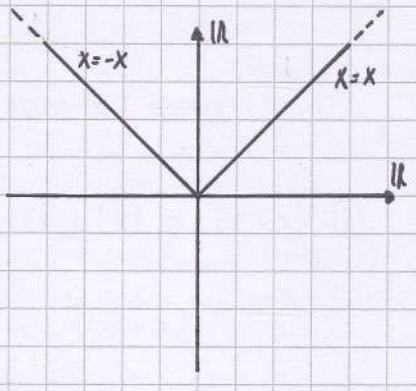
$$x \longmapsto F(x) = |x|$$

Vittorio Alzetta

• IL GRAFICO DI QUESTA FUNZIONE PUÓ ESSERE RICAVATO COSÍ:



• OCCORRE ELIMINARE UNA PARTE DELLE RETTE, INFATTI LA DEFIN. ASSOCIA VALORI DIVERSI A X A SECONDA CHE SIA POSITIVO O MENO



• IL VALORE ASSOLUTO GODE DELLE SEGUENTI PROPRIETÁ:

① $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

② $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$

dim.

$(\rightarrow)$ $x \neq 0 \rightarrow |x| \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow x > 0 \vee x < 0 \rightarrow |x| = (x > 0) \vee |x| = -(x < 0) \rightarrow |x| \neq 0$

$(\leftarrow)$ $x = 0 \rightarrow x \geq 0 \rightarrow |x| = (x = 0) \rightarrow |x| = 0$

③ $|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dim.

$$|-x| = \begin{cases} -x & \text{se } -x \geq 0 \\ x & \text{se } -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{se } x \overset{*}{\leq} 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

④ $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dim.

$$|x|^2 = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ (-x)^2 & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases} = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

⑤ $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

dim.

$$|xy| = \begin{cases} xy & \text{se } xy \geq 0 \rightarrow \text{STESSO SEGNO} \\ -xy & \text{se } xy < 0 \rightarrow \text{SEGNO DIVERSO} \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \quad 1. \\ -x & \text{se } -x < 0 \quad 2. \end{cases}$$

$$|y| = \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \quad 3. \\ -y & \text{se } y < 0 \quad 4. \end{cases}$$

1.3. $|x||y| = xy$ CON $x \geq 0 \wedge y \geq 0$] STESSO SEGNO

1.4. $|x||y| = -xy$ CON $x \geq 0 \wedge y < 0$] SEGNO DIVERSO

2.3. $|x||y| = -xy$ CON $x < 0 \wedge y \geq 0$] SEGNO DIVERSO

2.4. $|x||y| = xy$ CON $x < 0 \wedge y < 0$] STESSO SEGNO

* POSSO INVERTIRE IL SEGNO PERCHÉ SO CHE $f(x) = -x$ É DECRESCENTE, CIOÈ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \longleftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Vittorio Alzetta

⑥ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

dim.

~~ANALOGA~~ DEL TUTTO ANALOGA ALLA PROPRIETÀ ⑤

⑦ $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

dim. $(|x+y|)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y|$ $\quad \Rightarrow |x|+|y| \geq |x+y|$

⑧ $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

- SIA $k > 0$ DIMOSTRARE CHE $|x| \leq k \longleftrightarrow -k \leq x \leq k$

dim.

$(\rightarrow)$ $|x| = \begin{cases} x \text{ SE } x \geq 0 & x \leq k & x \leq k \\ -x \text{ SE } x < 0 & -x \leq k & x \geq -k \end{cases} \Rightarrow -k \leq x \leq k$

$(\leftarrow)$

$x \leq k \rightarrow |x| \leq |k|$ ~~POICHÉ k É POSITIVO~~ SE $x \geq 0$

$x \geq -k \rightarrow$ ~~$|-x| \geq |k|$~~ $-x \leq k \rightarrow |-x| \leq |k| \rightarrow |x| \leq k$

- $x = 0 \longleftrightarrow |x| < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$

dim.

$(\rightarrow)$ $x = 0 \rightarrow |x| = 0 \rightarrow (|x| \leq 0) < (\varepsilon\ (> 0) \rightarrow \varepsilon > 0 \wedge 0 < \varepsilon$

$(\leftarrow)$ DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO (CONTRONOMINALE)

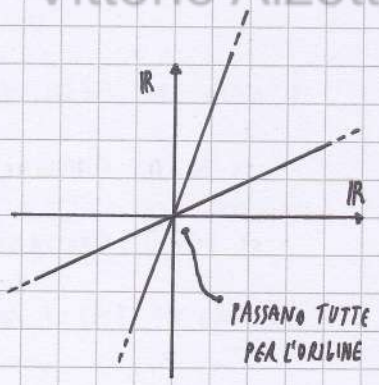
$x \neq 0 \rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : |x| \geq \varepsilon$, PER $x = 2$ E $\varepsilon = 1$ L'IMPLICAZIONE É VERA

SI HA QUINDI CHE: $\forall\, \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon \rightarrow x = 0$

Vittorio Alzetta

FUNZIONI ELEMENTARI

- FUNZIONI LINEARI -



- $f(x) = mx$ con $x \in \mathbb{R}$ e m numero fissato

ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

- VERIFICARE L'EQUIVALENZA TRA LE DUE PROPOSIZIONI (f è una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

1) f è omogenea, cioè $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall x, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2) f è lineare, cioè $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) = mx \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dim. $(1 \to 2)$

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot m$$

$f(x \cdot 1)$: è omogenea; $f(1)$: è un numero in $\mathbb{R}$

$(2 \to 1)$

$$f(x) = mx \to f(\lambda x) = \lambda mx = \lambda f(x)$$

- LE FUNZIONI LINEARI GODONO DELLA PROPRIETÀ DI ADDITTIVITÀ:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

dim.

$$f(x_1 + x_2) = m(x_1 + x_2) = mx_1 + mx_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

- FUNZIONI AFFINI -

- $f(x) = mx + q$ con $x \in \mathbb{R}$, $m, q \in \mathbb{R}$
- SE $q \neq 0$ LE FUNZIONI AFFINI NON SONO NÉ OMOGENEE NÉ ADDITTIVE

dim.

ADDITTIVITÀ: $f(x_1 + x_2) = m(x_1 + x_2) + q = mx_1 + mx_2 + q = f(x_1) + mx_2 \neq f(x_1) + f(x_2)$

OMOGENEITÀ: $f(\lambda x) = m(\lambda x) + q = \lambda \cdot mx + q \neq \lambda(mx + q) = \lambda f(x)$

NON POSSO RACCOGLIERE λ PERCHÉ L'ADDENDO q NON LA CONTIENE

INVERTIBILITÁ FUNZIONI AFFINI

Vittorio Alzetta

- É NOTO CHE PRESA LA FUNZIONE $f(x) = mx + q$ QUESTA SIA:
  - SE $m = 0$ FUNZIONE COSTANTE ($f(x) = q$)
  - SE $m \neq 0$ STRETTAMENTE MONOTONA (E QUINDI INIETTIVA)
- PER $m \neq 0$ $f(x)$ É ANCHE SURIETTIVA:
- dim.

$$m \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$$ ~~(DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO)~~

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y \rightarrow m = 0$$

~~$m = 0 \rightarrow f(x) = q$, SE $q = 1$ E $y = 2 \rightarrow$ ALLORA $f(x) =$~~

PERCHÉ STUDIARE L'INVERTIBILITÁ

- DI SEGUITO LA SUCCESSIONE DI OPERAZIONI EFFETTUABILI SU UNA FUNZIONE INVERTIBILE:

$$f(x) = c \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(c) \Rightarrow x = f^{-1}(c)$$

POTENZE AD ESPONENTE NATURALE

- LA DEFINIZIONE RIPORTATA SOTTO É DI TIPO ITERATIVO (PER INDUZIONE):

CON $x \in \mathbb{R}$ ABBIAMO $\begin{cases} x^1 := x \\ x^n := x^{n-1} \cdot x \end{cases}$

- TALE DEFINIZIONE CONSIDERA TUTTE LE POTENZE x^n CON $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^n$$ — POTENZA DI ESPONENTE n

- NEL CASO IN CUI n SIA 0 DEFINIAMO f IN QUESTO MODO:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^0 := 1$$

IN QUESTO MODO NON DEFINIAMO 0^0 (É INDETERMINATO)

PROPRIETÁ DELLE POTENZE

Vittorio Alzetta

① $x^{n_1} \cdot x^{n_2} = x^{n_1+n_2}$

dim.

$$x^{n_1} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{n_1} \qquad x^{n_2} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \dots x}_{n_2}$$

$$x^{n_1+n_2} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots \cdot x}_{n_1+n_2}$$

$$x^{n_1} \cdot x^{n_2} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \dots \cdot x}_{n_1} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n_2} = x^{n_1+n_2}$$

② $\left(x^{n_1}\right)^{n_2} = x^{n_1 \cdot n_2}$

dim.

$$x^{n_1} = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \dots x}^{n_1}$$

$$\left(x^{n_1}\right)^{n_2} = \underbrace{x^{n_1} \cdot x^{n_1} \cdot x^{n_1} \dots x^{n_1}}_{n_2}$$

$$\left(x^{n_1}\right)^{n_2} = \overbrace{\begin{matrix} x & x & x & x & \dots & x \\ x & x & x & x & \dots & x \\ x & x & x & x & \dots & x \\ x & x & x & x & \dots & x \\ x & x & x & x & \dots & x \end{matrix}}^{n_2} \Bigg\} n_1$$

$$\left(x^{n_1}\right)^{n_2} = x^{n_1 \cdot n_2}$$

③ $\left(x^n y^n\right) = (xy)^n$

dim.

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n} \qquad y^n = \underbrace{y \cdot y \cdot y \cdot y \dots y}_{n}$$

$$x^n \cdot y^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots x}_{n} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot y \dots y}_{n} = \underbrace{xy \cdot xy \cdot xy \cdots xy}_{n} = (xy)^n$$

PROPRIETÁ DI MONOTONIA E SIMMETRIA

- DATE LE FUNZIONI $f(x) = x^2$ E $g(x) = x^3$ DIMOSTRARE CHE:

① $f(x)$ E $g(x)$ SONO STRETTAMENTE CRESCENTI NELL'INTERVALLO $[0, +\infty)$

② $f(-x) = f(x)$ E $g(-x) = -g(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Vittorio Alzetta

① $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty) : x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\quad\quad\quad

POLINOMI E FUNZIONI RAZIONALI

Vittorio Alzetta

- SONO FUNZIONI DEL TIPO (I POLINOMI):

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots a_n x^n$$

↳ SI PARTE DA 1 PER EVITARE IL CASO $x^k = 0^0$

- MOLTE FUNZIONI RIENTRANO NEI POLINOMI (COSTANTI, LINEARI, AFFINI, POTENZE)

- LE FUNZIONI RAZIONALI SI OTTENGONO DIVIDENDO DUE POLINOMI:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \mathbb{D} = \{ x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0 \}$$

ESEMPIO:

$$P(x) = 1 \qquad Q(x) = x^n$$

$$\frac{1}{x^n} =: x^{-n}$$

↳ SONO COSÌ DEFINITE LE POTENZE AD ESPONENTE INTERO NEGATIVO

RADICI E POTENZE

- CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x) = x^2$, ESSA NON È ~~INIET~~ BIIETTIVA, E QUINDI INVERTIBILE, PER RENDERLA TALE DOBBIAMO RESTRINGERE DOMINIO E CODOMINIO:

$$f: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$x \longmapsto x^2$$

- A QUESTO PUNTO È POSSIBILE DEFINIRE LA FUNZIONE INVERSA, COSÌ:

$$f^{-1}: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

↳ SI DENOTA CON QUESTO SIMBOLO

- VALGONO QUINDI LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

$$f^{-1}_{|[0,+\infty)}\left(f_{|[0,+\infty)}(x)\right) = x \longleftrightarrow \sqrt{x^2} = x \quad \forall x \geq 0$$ (HA SENSO CONSIDERARE $x<0$ MA SAREBBE FALSO) *

$$f_{|[0,+\infty)}\left(f^{-1}_{|[0,+\infty)}(y)\right) = y \longleftrightarrow (\sqrt{y})^2 = y \quad \forall y \geq 0$$ (NON HA SENSO CONSIDERARE $y<0$)

Vittorio Alzetta

* É VERO INFATTI CHE $\sqrt{-3^2} \neq -3$, PERCIÓ $\sqrt{x^2} = x$ PER $x < 0$ É FALSA. TUTTAVIA POSSIAMO STABILIRE CHE A SECONDA DEL SEGNO DI X VALGA:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{SE } x \geq 0 \\ -x & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

NOTIAMO CHE QUELLA APPENA SCRITTA É LA STESSA DEFINIZIONE CHE ABBIAMO DATO PER IL VALORE ASSOLUTO:

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad \text{VALIDO PER TUTTI GLI } n \text{ PARI}$$

- IN CASO DI FUNZIONI POTENZA CON n DISPARI ($\neq 1$) ESSE SARANNO BIETTIVE E DUNQUE INVERTIBILI

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{É BIETTIVA IN TUTTO } \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3 \quad \text{SENZA BISOGNO DI RESTRIZIONI DEL DOMINIO}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt[3]{x} \quad \text{DENOTIAMO COSÍ LA RADICE CUBICA}$$

- TALE FUNZIONE GODRÁ DELLE SEGUENTI PROPRIETÁ:

$$f^{-1}(f(x)) = x \longleftrightarrow \sqrt[3]{x^3} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \longleftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

RADICI E POTENZE AD ESPONENTE RAZIONALE

- SIANO $m \in \mathbb{Z}$ E $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, DEFINIAMO LA POTENZA DI ESPONENTE RAZIONALE:

$$x^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

FUNZIONE ESPONENZIALE

- DATO $a > 0$ CHIAMIAMO ESPONENZIALE DI BASE a LA FUNZIONE COSÍ DEFINITA:

$$\exp_a x := a^x \quad \text{CON } x \in \mathbb{R}$$

- SI NOTI CHE QUI, A DIFFERENZA DELLE POTENZE, VARIA L'ESPONENTE, NON LA BASE
- SE NON SI DOVESSE SPECIFICARE LA BASE SI ALLUDEREBBE A "e": $\exp x = \exp_e x$ → N° DI NEPERO O EULERO

Vittorio Alzetta

• POICHÉ ABBIAMO DEFINITO L'ESPONENZIALE COME UNA POTENZA AD ESPONENTE REALE ESSO NE EREDITA LE PROPRIETÀ:

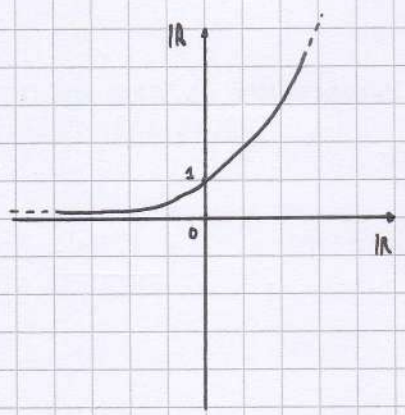
1) $a^x a^y = a^{x+y}$ PRODOTTO

2) $(a^x)^y = a^{xy}$ COMPOSIZIONE

3) $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$ RECIPROCO

) DALLA 2 SI PUÒ RICAVARE LA 3 $\left(a^{-x} = (a^{-1})^x \dots\right)$

GRAFICO E INVERTIBILITÁ



• GRAFICO DI a^x CON $a > 1$

• LA FUNZIONE È STRETTAMENTE CRESCENTE PER $x \in \mathbb{R}$

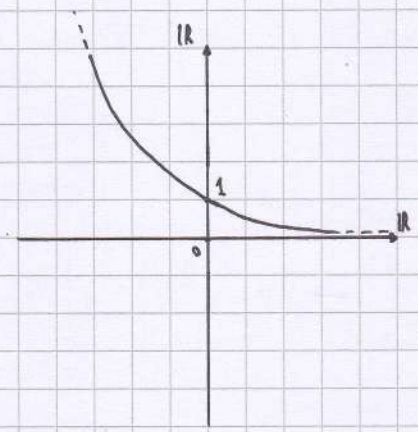
dim:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_1) < f(x_2) \rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \rightarrow a^{x_2} - a^{x_1} > 0$

$\rightarrow a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2-x_1} - 1)$ POICHÉ $x_2 > x_1$, ABBIAMO CHE:

$x_2 - x_1 > 0 \rightarrow a^{x_2-x_1} > 1$ (POICHÉ $a > 1$)



• GRAFICO DI a^x CON $0 < a < 1$

• LA FUNZIONE È STRETTAMENTE DECRESCENTE PER $x \in \mathbb{R}$

dim:

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f(x_1) > f(x_2) \rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \rightarrow a^{x_2} - a^{x_1} < 0$

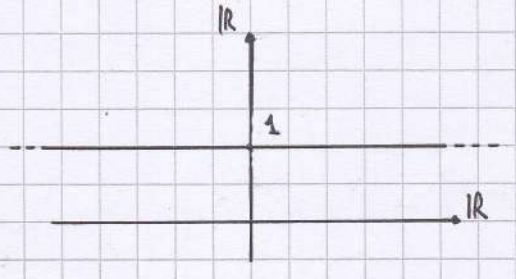
$\rightarrow a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2-x_1} - 1)$ POICHÉ $x_2 > x_1$, ABBIAMO CHE:

$x_2 - x_1 > 0 \rightarrow a^{x_2-x_1} < 1$ (POICHÉ $0 < a < 1$)

• DATO b : $0 < b < 1$ SI HA CHE $b^n < 1$ CON $n > 0$

dim:

$b = \frac{1}{a} < 1$ (CON $a > 1$) $\quad b^n = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \dots = \frac{1}{a^n} \rightarrow a^n > 1 \quad = x \leq 1$



• GRAFICO DI a^x CON $a = 1$

• LA FUNZIONE È COSTANTE, $EXP_1\, x = 1^x = 1$

Vittorio Alzetta

- PER DEFINIRE L'INVERSA DELL'ESPONENZIALE BISOGNA RENDERLA BIIETTIVA:

  - INIETTIVITÁ: ESSENDO STRETTAMENTE MONOTONA $(a \neq 1,\ a > 0)$ LA PROPRIETÁ É SODDISFATTA

  - SURIETTIVITÁ: PER RENDERE L'ESPONENZIALE SURIETTIVA BISOGNA RESTRINGERE IL CODOMINIO A: $(0, +\infty)$

LOGARITMO

- SIA $a > 0 \wedge a \neq 1$, L'INVERSA DI $EXP_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ É DEFINITA COSÍ:

$$\log_a := (EXP_a)^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

- QUESTO É IL LOGARITMO IN BASE a, ANALOGAMENTE A QUANTO DETTO PER L'ESPONENZIALE SE VIENE OMESSA LA BASE É SOTTINTESA "e", $\log = \log_e$

- PER DEFINIZIONE RICAVIAMO:

$$\log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0$$

SELVE CHE:

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^{\log_a x} = a^y \leftrightarrow x = a^y$$

PROPRIETÁ DEI LOGARITMI

1) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

dim:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \leftrightarrow a^{\log_a (xy)} = a^{\log_a x + \log_a y} \leftrightarrow xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$$

$$\leftrightarrow xy = x \cdot y$$

2) $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$

dim:

$$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y \leftrightarrow a^{\log_a y^{-1}} = a^{-\log_a y} \leftrightarrow y^{-1} = \frac{1}{a^{\log_a y}} \leftrightarrow y^{-1} = \frac{1}{y} \leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

3) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$

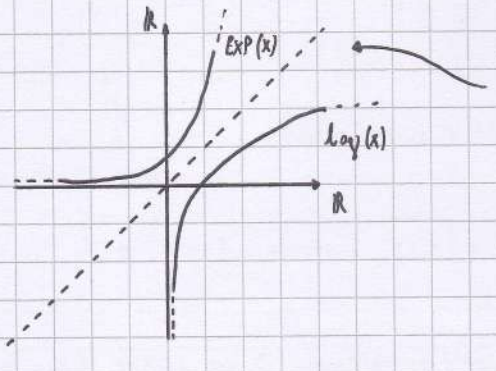
dim:

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x \leftrightarrow a^{\log_a x^y} = a^{y \cdot \log_a x} \leftrightarrow x^y = \cancel{(a)^{\log_a x}}\,(a^{\log_a x})^y \leftrightarrow x^y = x^y$$

Vittorio Alzetta

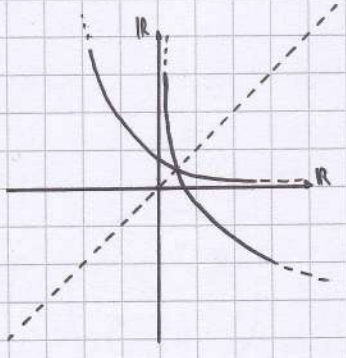
4) $\log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$ FORMULA PER IL CAMBIAMENTO DI BASE

GRAFICO DEL LOGARITMO



• GRAFICO DI $\log_a(x)$ CON $a > 1$

• GRAFICO DI $\log_a(x)$ CON $0 < a < 1$



FUNZIONI PERIODICHE

• SIA $T > 0$ $\in$ $A \subseteq \mathbb{R}$, IN MODO TALE CHE RISULTI:

$$x \in A \longrightarrow x + T \in A$$

• UNA FUNZIONE $f: A \to B$ È DETTA PERIODICA DI PERIODO T SE VALE:

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in A$$

↳ PER QUESTO MOTIVO $(x+T)$ DEVE APPARTENERE AL DOMINIO A

ESEMPI:

$A = \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R} \to x + T \in \mathbb{R}$ ✓

$A = (0, +\infty)$

$x \in (0,+\infty) \to x+T \in (0,+\infty)$ ✓

$A = \mathbb{N}$

$x \in \mathbb{N} \longrightarrow x+T \in \mathbb{N}$ ✗

↳ Es. $T = \frac{1}{2}$

• SI NOTI LA SEGUENTE CARATTERISTICA DELLA FUNZIONE PERIODICA:

$f(x+2T) = f(x+T+T)$ CHE È COME DIRE $f(x+T$

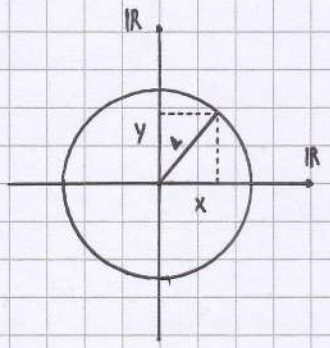
• SE UNA FUNZIONE È PERIODICA DI T LO SARÀ ANCHE DI nT

Vittorio Alzetta

SENO E COSENO

• CONSIDERIAMO, NEL PIANO $\mathbb{R}^2$, UNA CIRCONFERENZA C:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$$



• POSTO $r = 1$ AVREMO (PER IL T. DI PITAGORA):

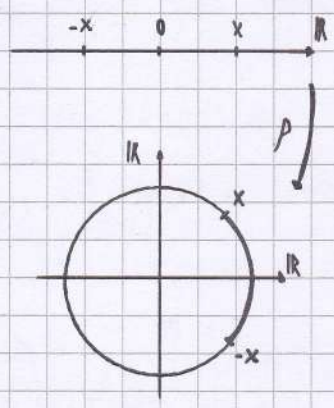
$r = \sqrt{x^2+y^2}$ DA CUI $1 = \sqrt{x^2+y^2}$ E QUINDI $1 = x^2 + y^2$

• SI PUO QUINDI DEFINIRE UNA FUNZIONE ρ DI QUESTO TIPO:

$$\rho : \mathbb{R} \longrightarrow C$$

└ FUNZIONE CIRCOLARE DI VARIABILE REALE

• RIPORTO QUI DI SEGUITO IL MODO IN CUI $x \in \mathbb{R}$ É RAPPRESENTATO IN $C(\mathbb{R}^2)$



• SE $x \neq 0$ ALLORA $\rho(x)$ SI OTTIENE:

- PERCORRENDO SU C UN ARCO DI LUNGHEZZA $|x|$ IN VERSO ANTIORARIO SE $x > 0$
- PERCORRENDO SU C UN ARCO DI LUNGHEZZA $|x|$ IN VERSO ORARIO SE $x < 0$

• POSSIAMO DIRE CHE TRA GLI ELEMENTI DELLA COPPIA ORDINATA VALE LA RELAZIONE:

$$\rho(x) = (\rho_1(x), \rho_2(x))$$

CON $\rho_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E $\rho_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

• DUNQUE SI HA CHE:

$$\rho_1(x)^2 + \rho_2(x)^2 = 1$$, SOSTITUENDO $\rho_1(x)$ CON $\cos(x)$ E $\rho_2(x)$ CON $\sin(x)$:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

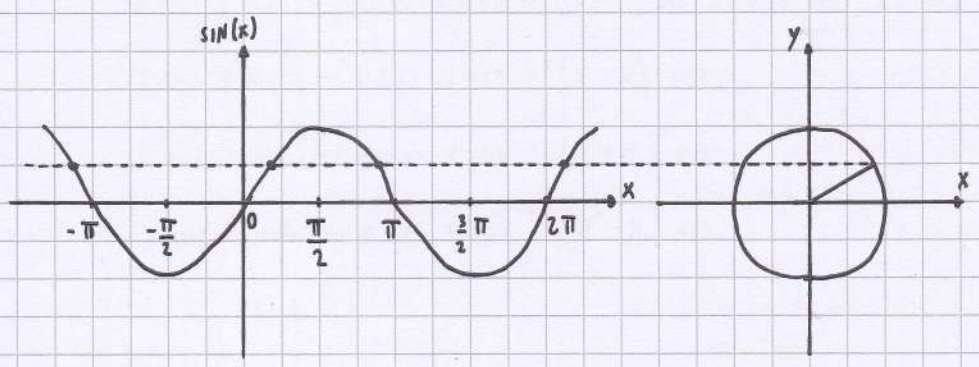
Vittorio Alzetta

• SAPPIAMO INOLTRE CHE C É LUNGA 2π, VALE. DUNQUE:

$$p(x) = p(x + 2\pi)$$

└ É PERIODICA DI PERIODO $T = 2\pi$

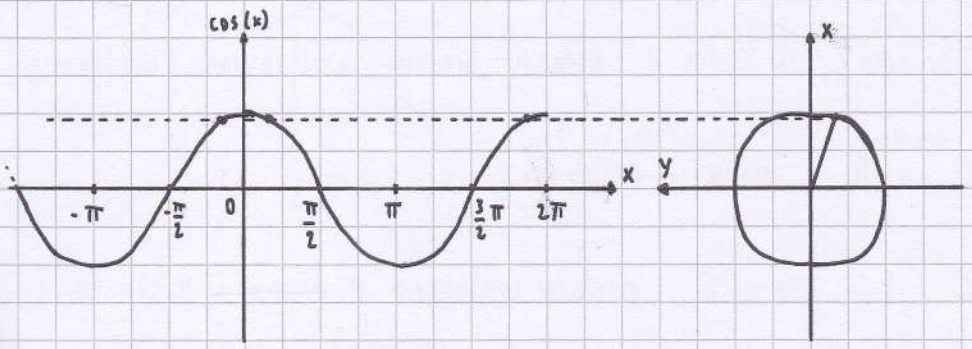
GRAFICO SENO E COSENO



• DOMINIO = $\mathbb{R}$

• CODOMINIO = $[-1, 1]$

• $\sin(x) = -\sin(-x) \Rightarrow$ DISPARI



• DOMINIO = $\mathbb{R}$

• CODOMINIO = $[-1, 1]$

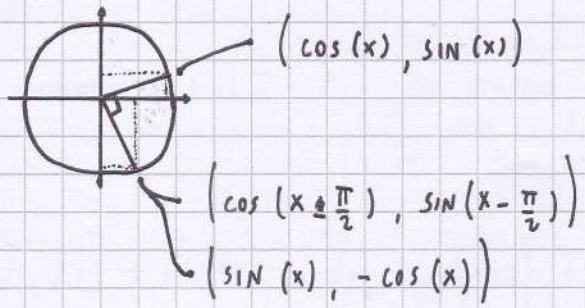
• $\cos(x) = \cos(-x) \Rightarrow$ PARI

• DAL MOMENTO CHE PER MISURARE GLI ANGOLI SFRUTTIAMO LA LUNGHEZZA DI UN ARCO, CHIAMEREMO L'UNITÁ DI MISURA "RADIANTE".

RELAZIONI TRA SENO E COSENO

• $\sin X = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ • $\cos X = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

dim:



DA CUI:

$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ POICHÉ PARI $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

$-\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ POICHÉ DISPARI $\Rightarrow \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Vittorio Alzetta

FORMULE DI DUPLICAZIONE E BISEZIONE, ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

- É VERO CHE $\sin(2x) = 2\sin(x)$? NO, PERCHÉ $\sin(x)$ NON É UNA FUNZIONE LINEARE
- É VERO CHE $\cos(2x) = 2\cos(x)$? NO, PERCHÉ $\cos(x)$ NON É UNA FUNZIONE LINEARE
- LO STESSO VALE PER LA PROPRIETÁ DI ADDITTIVITÁ

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2(x/2) = (1-\cos x)/2$$
$$\cos^2(x/2) = (1+\cos x)/2$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

INVERTIBILITÁ DEL SENO

- PER RISOLVERE EQUAZIONI DEL TIPO $\sin(x) = \alpha$ ABBIAMO BISOGNO DELL'INVERSA DEL SENO:

  - SE $\alpha > 1$ $\quad S = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = \alpha\} = \emptyset$

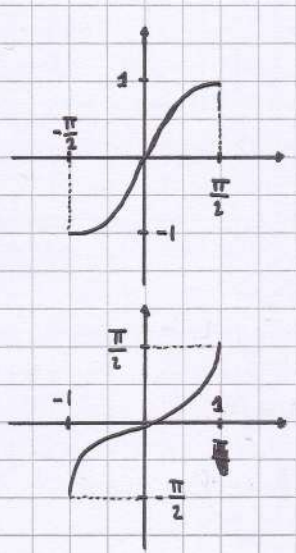
  - SE $\alpha \leq 1 \wedge \alpha \geq -1$ $\quad S = \{x \in \mathbb{R} :$ L'ARCO DI LUNGHEZZA x ~~[illegible]~~ IL CUI SENO É $\alpha\}$

- LE SOLUZIONI, SFRUTTANDO CIÓ CHE IL GRAFICO MOSTRA, SONO:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \arcsin\alpha + 2k\pi = x,\ \pi - \arcsin\alpha + 2k\pi,\ \text{con } k \in \mathbb{Z}\}$$

QUESTO POICHÉ IL $\sin(x) = \sin(\pi - x)$

- SE DUNQUE VOGLIAMO DEFINIRE LA FUNZIONE ARCO SENO (INVERSA DEL SENO) DOBBIAMO RENDERE IL SENO UNA FUNZIONE BIIETTIVA, RESTRINGENDO DOMINIO E CODOMINIO



- RESTRINGIAMO IL DOMINIO A: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. E IL CODOMINIO A: $[-1, 1]$
- DEFINIAMO L'ARCO SENO COSÍ:

$$\arcsin := \left(\sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

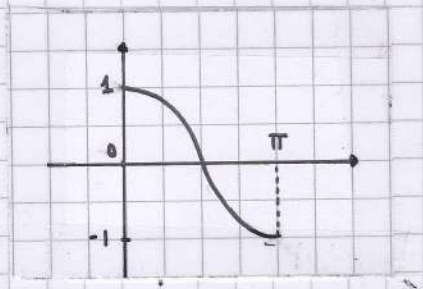
- IL GRAFICO DELL'ARCO SENO SI OTTIENE MEDIANTE UNA RIFLESSIONE DI CENTRO $O(0;0)$
- $\arcsin(\sin(x)) = x \iff x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Vittorio Alzetta

INVERTIBILITÁ DEL COSENO

- ANALOGAMENTE A QUANTO DETTO PER IL SENO IMMAGINIAMO DI DOVER RISOLVERE $\cos(x) = \alpha$

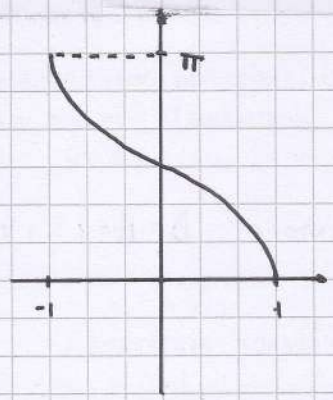
- SE $\alpha > 1$ $S = \emptyset$ - SE $-1 \leq \alpha \leq 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} : \arccos \alpha = x\}$



BISOGNA CONSIDERARE IL FATTO CHE IL COSENO É PERIODICO, E CHE QUINDI SE $\arcsin \alpha = x$ LO É ANCHE:

$$\arcsin \alpha + 2k\pi \quad \text{E}$$

$$-\arcsin \alpha + 2k\pi$$



RESTRINGIAMO DOMINIO E CODOMINIO IN QUESTO MODO:

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$$

DEFINIAMO LA FUNZIONE ARCO COSENO COSÍ:

$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$$

- SI NOTI CHE SI É RESO NECESSARIO CONSIDERARE 2 RESTRIZIONI DIVERSE PER SENO E COSENO

FUNZIONE TANGENTE

- DEFINIAMO LA FUNZIONE TANGENTE IN QUESTO MODO:

$$\tan := \frac{\sin x}{\cos x}$$

- IL DOMINIO DI TALE FUNZIONE É:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

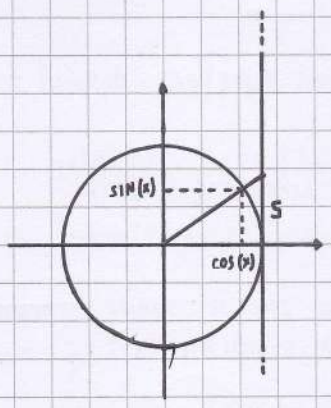
- DIMOSTRAZIONE DEL FATTO CHE LA FUNZIONE TANGENTE É PERIODICA:

$$\tan(x + 2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) \quad \text{É PERIODICA DI } k2\pi$$

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x) \quad \text{É PERIODICA DI } k\pi$$

GRAFICO E SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA TANGENTE

Vittorio Alzetta

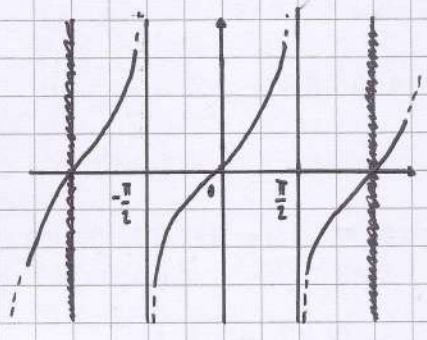


- SI NOTI CHE I TRIANGOLI I CUI CATETI SONO, RISPETTIVAMENTE, $\sin(x)$ $\cos(x)$ E 1 S, SONO SIMILI, E PERCIÓ VALE LA RELAZIONE:

$$\cos(x) : 1 = \sin(x) : S$$

- RIARRANGIANDO I TERMINI OTTENIAMO L'EQUAZIONE:

$$S = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$



- LA LUNGHEZZA DEL SEGMENTO S CORRISPONDE AL VALORE DELLA TANGENTE, IN $\frac{\pi}{2} + k\pi$ LA TANGENTE SARÁ QUINDI INDETERMINATA. IN $k\pi$ VARRÁ ZERO.

  └ IL DOMINIO DELLA FUNZIONE PERTANTO É: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

- NELLA COSTRUZIONE DEL GRAFICO DI FUNZIONE É UTILE NOTARE LA SEGUENTE PROPRIETÁ:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \Rightarrow \text{FUNZIONE DISPARI}$$

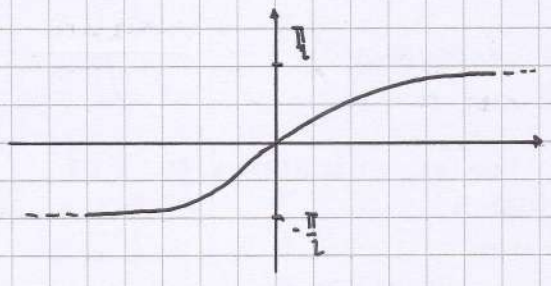
ARCOTANGENTE (INVERSA DELLA TANGENTE)

- VOLENDO DEFINIRE LA FUNZIONE INVERSA DELLA TANGENTE DOBBIAMO RENDERE QUEST'ULTIMA BIIETTIVA:

$$\tan\big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

- DEFINIAMO QUINDI L'ARCOTANGENTE COME:

$$\arctan := \left(\tan\big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$



- LA FUNZIONE ARCOTANGENTE É DISPARI

- VALE LA RELAZIONE: 1) $\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  2) $\arctan(\tan(x)) = x \leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

COTANGENTE

Vittorio Alzetta

- LA COTANGENTE É LA FUNZIONE COSÍ DEFINITA:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

- VOLENDO SI POTREBBE SCRIVERE $\cot(x) = \tan^{-1}(x)$ COL RISCHIO DI INTERPRETARLA COME INVERSA

- UNA INTERESSANTE PROPRIETÁ É:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

- LE FUNZIONI SENO, COSENO, TANGENTE E COTANGENTE IPERBOLICI SONO COSÍ DEFINITI:

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

- LA RELAZIONE FONDAMENTALE P DEL SENO E COSENO NON FUNZIONA PER SENH E COSH, MA:

$$-\sinh^2 + \cosh^2 = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{-e^{2x} \cancel{+ e^{-2x}} + e^{2x} + e^{-2x} + 2 + 2}{4} = 1$$

- DEDUCIAMO QUINDI CHE, ANALOGAMENTE A QUANTO FATTO PER SIN E COS CON LA CIRCONFERENZA:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$$

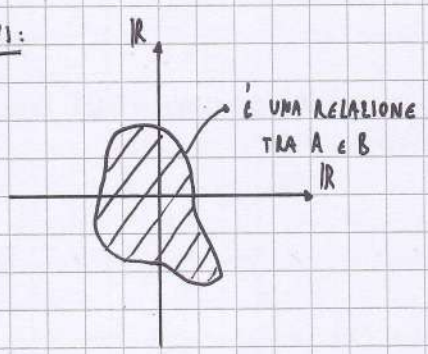
DOVE H NON É UNA CIRCONFERENZA MA É UN'IPERBOLE (DA CUI FUNZIONI IPERBOLICHE)

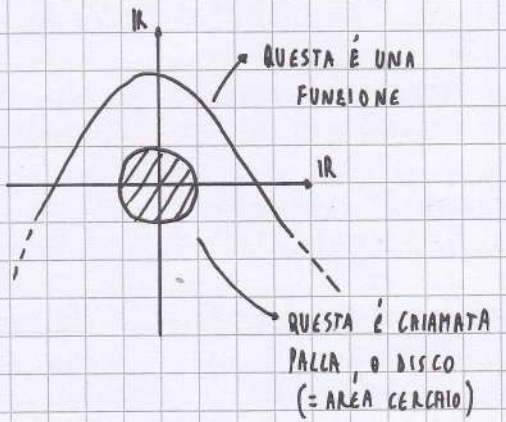
RELAZIONI

Vittorio Alzetta

- SIANO A e B DUE INSIEMI NON VUOTI, DEFINIAMO RELAZIONI TRA A e B i SOTTOINSIEMI $\mathcal{R}$ DI $A \times B$

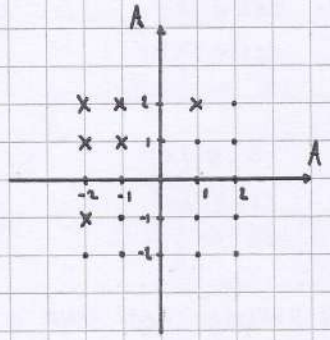
ESEMPI:





- DATA UNA COPPIA $(a, b) \in \mathcal{R}$ SI PUÒ SCRIVERE $a \mathcal{R} b$ (a È IN RELAZIONE CON b)
- SE LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È DA A IN A SI DIRÀ RELAZIONE IN A

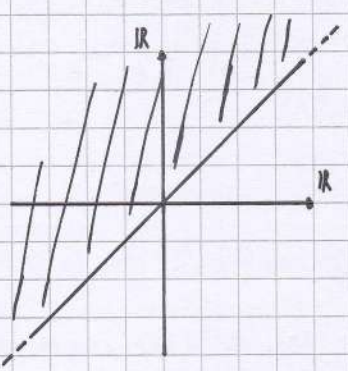
ESEMPIO:



$$A = \{-1, -2, 1, 2\} \quad M = \{(-2,-1)(1,2)(-1,1)(-1,2)(-2,1)(-2,2)\}$$

- LA RELAZIONE PUÒ ANCHE ESSERE SCRITTA COSÍ:

$$M = \{(x,y) \in A^2 : x < y\}$$



- IN $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ AVREMO $\mathcal{R}$ DEFINITA DA:

$$\leq = \mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$$

- COINCIDE CON LA PARTE DI PIANO SOPRASTANTE ALLA RETTA $x = y$

ALTRI ESEMPI:

$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ PALLA o DISCO DI RAGGIO 1

$// = \{\mathcal{R} = \{(r,s) \in R^2 : r // s\}$ CON R INSIEME DELLE RETTE SUL PIANO

$\perp = \mathcal{R} = \{(r,s) \in R^2 : r \perp s\}$

$\subseteq = \{(E,F) \in \mathcal{P}(U)^2 : E \subseteq F\}$ CON U INSIEME AMBIENTE

Vittorio Alzetta

RELAZIONI D'ORDINE

- UNA RELAZIONE IN A, INSIEME NON VUOTO, É D'ORDINE SE VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÁ:

1) $\forall x \in A \quad x \mathcal{R} x$ (PROPRIETÁ RIFLESSIVA)

2) $\forall x, y, z \in A \quad x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \rightarrow x \mathcal{R} z$ (PROPRIETÁ TRANSITIVA)

3) $\forall x, y \in A \quad x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \rightarrow x = y$ (PROPRIETÁ ANTISIMMETRICA)

- SI NOTI CHE $\leq$, $\subseteq$ SODDISFANO TUTTE LE PROPRIETÁ, MENTRE $\perp$ E $/\!/$ NO

- SIA A UN INSIEME NON VUOTO E $\preceq$ UNA RELAZIONE D'ORDINE IN A, DEFINIAMO INSIEME ORDINATO LA COPPIA:

$$(A, \preceq)$$

ALTRI ESEMPI:

$(\mathbb{R}, \leq)$ $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ SONO INSIEMI ORDINATI

$(\mathbb{R}, <)$ $(R, /\!/)$ NON SONO INSIEMI ORDINATI

RELAZIONI D'ORDINE TOTALE

- UNA RELAZIONE É DI ORDINE TOTALE SE VALE:

$$\forall x, y \in X : x \preceq y \vee y \preceq x \quad \text{(DICOTOMIA)}$$

- $\geq$ É UNA RELAZIONE D'ORDINE TOTALE, $\subseteq$ NON LO É (DUE INSIEMI DISGIUNTI NON VERIFICANO LA CONDIZIONE)

MASSIMO E MINIMO

- DATO $(A, \preceq)$ UN INSIEME ORDINATO NON VUOTO, ALLORA DEFINIAMO:

- MASSIMO UN ELEMENTO DI A, $\bar{a}$ SE $a \preceq \bar{a} \quad \forall a \in A \qquad \bar{a} = \max A$

- MINIMO UN ELEMENTO DI A, $\underline{a}$ SE $\underline{a} \preceq a \quad \forall a \in A \qquad \underline{a} = \min A$

ESERCIZIO:

DATO $(\mathbb{R}, \leq)$ $A = (a, b]$ $\max A = b$ $b \geq x \quad \forall x \in A$

$\min A = a?$ $a \leq x \quad \forall x \in A$

MA $a \notin A \rightarrow \nexists \min A$

Vittorio Alzetta

$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$\max A = 1 \longleftrightarrow 1 \geq a \quad \forall a \in A$

$1 \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$1 \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\nexists \min A$ È UNA CONGETTURA CHE VA DIMOSTRATA:

$\exists \min A = \underline{a} \longleftrightarrow \underline{a} \leq a \ \forall a \in A$

$\exists \underline{n} \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{\underline{n}} \leq \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \longleftrightarrow \exists \underline{n} \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \underline{n} \geq n \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

↳ NON PUÒ ESISTERE UN NUMERO NATURALE MAGGIORE DEGLI ALTRI

INSIEMI LIMITATI SUPERIORMENTE

- SIA $(X, \preceq)$ UN INSIEME ORDINATO E $A \subseteq X$, DEFINIAMO MAGGIORANTE DI A OGNI $x \in X$:

$$a \preceq x \quad \forall a \in A$$

- SE ESISTE ALMENO UN MAGGIORANTE L'INSIEME A SI DICE LIMITATO SUPERIORMENTE

INSIEMI LIMITATI INFERIORMENTE

- SIA $(X, \preceq)$ UN INSIEME ORDINATO E $A \subseteq X$, DEFINIAMO MINORANTE DI A OGNI $x \in X$:

$$x \preceq a \quad \forall a \in A$$

- SE ESISTE ALMENO UN MINORANTE L'INSIEME A SI DICE LIMITATO INFERIORMENTE

INSIEMI LIMITATI

- UN INSIEME SI DICE LIMITATO SE É LIMITATO SIA SUPERIORMENTE CHE INFERIORMENTE

ESEMPIO: $A = [a, b] \subseteq \mathbb{R} = X$



a É MINORANTE DI A

b É MASSIMO E MAGGIORANTE DI A

Vittorio Alzetta

ESTREMO SUPERIORE

- SIA $(X, \preceq)$ UN INSIEME ORDINATO E $A \subseteq X$ DEFINIAMO ESTREMO SUPERIORE DI A IL MINORE, SE ESISTE, DEI MAGGIORANTI, DENOTATO CON SUP A

ESEMPIO: $(\mathbb{R}, \leq)$ $A = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$



MAGG $A = [b, +\infty)$ MIN MAGG $A = b = \sup A$

MINOR $A = (-\infty, a]$ MAX MINOR $A = a = \inf A$

ESTREMO INFERIORE

- SIA $(X, \preceq)$ UN INSIEME ORDINATO E $A \subseteq X$ DEFINIAMO ESTREMO INFERIORE DI A IL MAGGIORE, SE ESISTE, DEI MINORANTI, DENOTATO CON INF A

- NELL'ESEMPIO PRECEDENTE È PRESENTE ANCHE L'ESTREMO INFERIORE DI A, a.

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DI ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

- QUESTO TIPO DI TEOREMI, DOVE COMPARE "$\leftrightarrow$" PRENDONO IL NOME DI TEOREMI DI CARATTERIZZAZIONE

- DATO A SOTTOINSIEME NON VUOTO DI $(X, \preceq)$ LIMITATO SUPERIORMENTE, SI HA $\sup A = M$ SE E SOLO SE VALGONO:

1) $\forall a \in A \quad a \leq M$ (M È UN MAGGIORANTE)

2) $\forall \alpha < M \quad \exists a_\alpha \in A : \alpha < a_\alpha$ (M È IL MINORE DEI MAGGIORANTI)

- DATO A SOTTOINSIEME NON VUOTO DI $(X, \preceq)$ LIMITATO INFERIORMENTE, SI HA $\inf A = m$ SE E SOLO SE VALGONO:

1) $\forall a \in A \quad m \leq a$ (m È UN MINORANTE)

2) $\forall \alpha > m \quad \exists a_\alpha \in A : \alpha > a_\alpha$ (m È IL MAGGIORE DEI MINORANTI)

2 ALTERNATIVA) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A : m + \varepsilon > a_\varepsilon$

SUP, INF, MAX, INF DI UNA FUNZIONE

Vittorio Alzetta

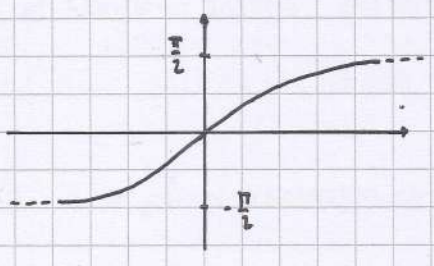
- SIA $f: A \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE REALE E $f(A)$ L'INSIEME IMMAGINE, f SI DICE LIMITATA (INFERIORMENTE, SUPERIORMENTE) SE L'IMMAGINE $f(A)$ È UN SOTTOINSIEME LIMITATO (~~SUP~~ INFERIORMENTE, SUPERIORMENTE) DI $\mathbb{R}$

$$\sup_{x \in A} f(x) := \sup f(A) = \sup \{ f(x) : x \in A \}$$

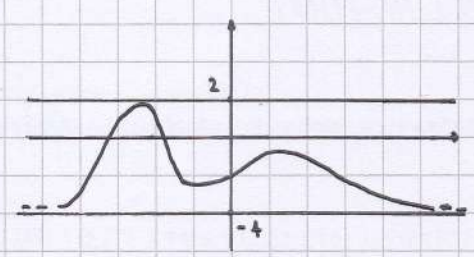
$$\inf_{x \in A} f(x) := \inf f(A) = \inf \{ f(x) : x \in A \}$$

- UNA FUNZIONE $f: A \to \mathbb{R}$ È LIMITATA SE E SOLO SE $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$

ESEMPIO:



$|f(x)| \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$|f(x)| \leq 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

CAMPO REALE

Vittorio Alzetta

OPERAZIONE

- DEFINIAMO OPERAZIONE BINARIA SU UN INSIEME A OGNI FUNZIONE DEL TIPO:

$$T : A \times A \to A$$

(IL RISULTATO DEVE APPARTENERE AD A)

- SPESSO IN LUOGO DI $T(x,y)$ SI SCRIVERÀ xTy

ESEMPIO: LA DIFFERENZA $(-)$ IN $\mathbb{N}$ NON È UN'OPERAZIONE $(5-8=-3 \notin \mathbb{N})$

ASSIOMA DELLA SOMMA

- SIANO G UN INSIEME E $+$ UN'OPERAZIONE IN G DETTA ADDIZIONE
  - SOLITAMENTE UN INSIEME COSÌ DENOTATO È UN INSIEME DOTATO DI OPERAZIONE

- LA COPPIA $(G, +)$ È CHIAMATA GRUPPO COMMUTATIVO SE SODDISFA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1. COMMUTATIVA $a+b=b+a \quad \forall a,b \in G$
2. ASSOCIATIVA $(a+b)+c=a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in G$
3. ZERO ESISTE UN ELEMENTO DI G (INDICATO CON $=0$) TALE CHE $a+0=a \quad \forall a \in G$
4. OPPOSTO $\forall a \in G$ ESISTE UN ELEMENTO DI G (INDICATO CON $-a$, DETTO OPPOSTO DI a) TALE PER CUI $a+(-a)=0$

ESEMPI: $(\mathbb{N}, +)$ NON È UN GRUPPO COMMUTATIVO (4.)

$(\mathbb{Z}, +)$ È UN GRUPPO COMMUTATIVO

$(\{0\}, +)$ È UN GRUPPO COMMUTATIVO, CHIAMATO GRUPPO BANALE

$$+ : \{0\} \times \{0\} \to \{0\}$$
$$(0,0) \longmapsto +(0,0) \;.\; 0+0=0$$

Vittorio Alzetta

ASSIOMA DEL PRODOTTO

- SIA $\mathbb{K}$ UN INSIEME E $+$ E $\cdot$ DUE OPERAZIONI IN $\mathbb{K}$ DETTE ADDIZIONE E MOLTIPLICAZIONE
- DIREMO CHE LA TERNA $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ É UN CAMPO (O CORPO COMMUTATIVO) SE SODDISFA L'ASSIOMA DELLA SOMMA E LE SEGUENTI PROPRIETÁ:

1. COMMUTATIVA $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{K}$
2. ASSOCIATIVA $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$
3. UNITÁ ESISTE UN ELEMENTO DI $\mathbb{K}$ (INDICATO CON 1, TENENDO CONTO CHE $1 \neq 0$) TALE CHE $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$
4. RECIPROCO $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ESISTE UN ELEMENTO DI $\mathbb{K}$ (INDICATO CON a^{-1} O $1/a$) TALE CHE $a \cdot a^{-1} = 1$ (a^{-1} É DETTO INVERSO O RECIPROCO DI a)
5. DISTRIBUTIVA $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$

ASSIOMA DELL'ORDINAMENTO

- SIA $\leq$ UNA RELAZIONE D'ORDINE, DIREMO CHE LA QUATERNA $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ É UN CAMPO ORDINATO SE SODDISFA L'ASSIOMA DELLA SOMMA, DEL PRODOTTO E LE SEGUENTI PROPRIETÁ:

1. $a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (COMPATIBILITÁ CON LA SOMMA)
2. $a \leq b \wedge c \geq 0 \rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (COMPATIBILITÁ CON IL PRODOTTO)

ESEMPI: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ E $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ SONO CAMPI ORDINATI

PROPRIETÁ DI COMPLETEZZA

- UN CAMPO ORDINATO $\mathbb{K}$ SI DICE COMPLETO SE OGNI SOTTOINSIEME NON VUOTO E SUPERIORMENTE LIMITATO HA ESTREMO SUPERIORE IN $\mathbb{K}$

ESEMPIO: $A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \rightarrow A \neq \emptyset \wedge$ LIM. SUP. $\quad \sup A = \min \text{MAG } A = \min [\sqrt{2}, +\infty) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Vittorio Alzetta

• DATO UN SOTTOINSIEME $A \neq \emptyset$ DI UN CAMPO ORDINATO COMPLETO $\mathbb{K}$ VALE:

- SE A É SUPERIORMENTE LIMITATO ALLORA HA ESTREMO SUPERIORE IN $\mathbb{K}$
- SE A NON É SUPERIORMENTE LIMITATO ALLORA HA ESTREMO SUPERIORE DEFINITO COME $\sup A := +\infty$
- SE A É INFERIORMENTE LIMITATO ALLORA HA ESTREMO INFERIORE IN $\mathbb{K}$
- SE A NON É INFERIORMENTE LIMITATO ALLORA HA ESTREMO INFERIORE DEFINITO COME $\inf A := -\infty$

• SI EVINCE CHE OGNI SOTTOINSIEME $A \neq \emptyset$ DI $\mathbb{K}$ HA ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE (FINITO O INFINITO). MENTRE MASSIMO E MINIMO POSSONO NON ESISTERE.

ESISTENZA DI $\mathbb{R}$

• IL TEOREMA DI ESISTENZA AFFERMA CHE ESISTE $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ CHE SODDISFA I 4 ASSIOMI:

A1) SOMMA A2) MOLTIPLICAZIONE A3) ORDINAMENTO A4) COMPLETEZZA

• PER DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI QUESTO INSIEME SI RICORRE ALL'ESIBIZIONE:

- DEDEKIND (1872) → PARTICOLARI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{Q}$ ($A = \{1, \dots, n\}$ $\mathcal{P}(A)$ HA 2^n ELEMENTI)
- CAUCHY, CANTOR (1821) → PARTICOLARI SUCCESSIONI DI $\mathbb{Q}$
- HARDY (1960) → ALLINEAMENTI DECIMALI INFINITI (SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE 1/10)

UNICITÁ DI $\mathbb{R}$

• NONOSTANTE ~~di~~ I CAMPI ORDINATI COMPLETI ESIBITI SOPRA SIANO DIVERSI (HANNO DIFFERENTI ELEMENTI) ESISTE UN'APPLICAZIONE BIIETTIVA $f: \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ CHE CONSERVA OPERAZIONI E ORDINAMENTO:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{K}_1$
2. $f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{K}_1$
3. $x, y \in \mathbb{K}_1, \; x \leq y \to f(x) \leq f(y)$

• POSSIAMO AFFERMARE CHE $\mathbb{R}$ É L'UNICO CAMPO ORDINATO COMPLETO A MENO DI ISOMORFISMI ($\mathbb{K}_1$ E $\mathbb{K}_2$ SONO ISOM.)

ALTRE PROPRIETÁ DI $\mathbb{R}$

Vittorio Alzetta

- NON TUTTE LE PROPRIETÁ CHE USIAMO FACENDO I CALCOLI SONO ELENCATE NEGLI ASSIOMI, MA TUTTE SONO DEDUCIBILI DA ESSI (AD ESEMPIO L'UNICITÁ DI 0, 1, OPPOSTO E RECIPROCO)

- SIA $\mathbb{K}$ UN CAMPO ORDINATO, ALLORA VALGONO:

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{K} \quad \text{E} \quad 1 > 0$$

dim:

SE $x \geq 0$ SEGUE CHE PER L'ASSIOMA DEL PRODOTTO: $x \cdot x \geq 0 \cdot x \Rightarrow x^2 \geq 0$

SE $x < 0$ SEGUE CHE PER L'ASSIOMA DEL PRODOTTO: $-x > 0 \Rightarrow -x \cdot (-x) > 0 \cdot (-x) \Rightarrow x^2 > 0$

DEDUCIAMO QUINDI CHE $1^2 \geq 0 \wedge 1 \neq 0 \Rightarrow 1 > 0$

- UN COROLLARIO CHE SEGUE DA QUESTE AFFERMAZIONI É: $x^2 + 1 > 0$ (NON BANALE, PER $\mathbb{C}$ NON VALE)

PROPRIETÁ DI ARCHIMEDE

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : n > x$ (SIGNIFICA CHE $\mathbb{N}$ NON É LIMITATO SUPERIORMENTE)

SOTTRAZIONE

- SI DEFINISCE LA SOTTRAZIONE TRA DUE NUMERI REALI a, b COSÍ:

$$a - b := a + (-b)$$

DIVISIONE

- DEFINIAMO LA DIVISIONE TRA DUE NUMERI REALI a, b COSÍ:

$$\frac{a}{b} := a \cdot (b^{-1})$$

Vittorio Alzetta

LEGGE DI SEMPLIFICAZIONE DELLA SOMMA

$$a+b = a+c \rightarrow b=c$$

dim: $b = b+0 = (a+(-a))+b = ((-a)+a)+b = -a+(a+b) = -a+(a+c) = \ldots = c$

$b = b+0$: EL. NEUTRO; $0 = (a+(-a))$: EL. OPPOSTO; $(a+(-a))+b = ((-a)+a)+b$: COMMUTATIVA; $((-a)+a)+b = -a+(a+b)$: ASSOCIATIVA; $-a+(a+b) = -a+(a+c)$: IPOTESI

LEGGE DI SEMPLIFICAZIONE DEL PRODOTTO

$$a \cdot b = a \cdot c \rightarrow b=c$$

dim: $b = 1 \cdot b = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c) = \ldots = c$

$b = 1 \cdot b$: EL. NEUTRO; $1 = (a \cdot a^{-1})$: EL. INVERSO; $(a \cdot a^{-1}) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b$: COMMUTATIVA; $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot (a \cdot b)$: ASSOCIATIVA; $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$: IPOTESI

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

$$a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

PRODOTTI NOTEVOLI

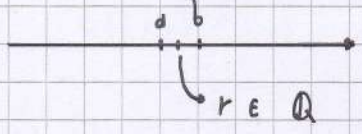
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \qquad (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \qquad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

DENSITÁ DI $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$

- L'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI É DENSO IN $\mathbb{R}$, CIOÉ $\forall$ COPPIA $a < b$ DI NUMERI REALI $\exists$ UN NUMERO RAZIONALE r TALE CHE $a < r < b$



DENSITÁ DI $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$

- PER I NUMERI IRRAZIONALI VALE LA STESSA COSA

Vittorio Alzetta

PRINCIPIO DI INDUZIONE

- SAPPIAMO CHE VALE LA SEGUENTE PROPOSIZIONE (L'IMPLICAZIONE GODE DELLA PROPRIETÀ TRANSITIVA)

$$(P_0 \to P_1) \wedge (P_1 \to P_2) \to (P_0 \to P_2)$$

- DUNQUE SE SONO VERE LE PRIME 2 IMPLICAZIONI ED È VERA P_0 ALLORA SONO VERE P_0, P_1 E P_2

- IL RAGIONAMENTO VALE PER FINITE PROPOSIZIONI, NEL CASO DI INFINITE POSTULIAMO UN ASSIOMA:

$$(P_0 \to P_1) \wedge (P_1 \to P_2) \wedge (P_2 \to P_3) \wedge \dots \wedge (P_n \to P_{n+1}) \wedge \dots$$

  - SE P_0 È VERA (PASSO BASE)

  - SE $P_n \to P_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ È VERA (PASSO INDUTTIVO)

- ALLORA P_n È VERA $\forall n \in \mathbb{N}$ (NON POSSIAMO DIMOSTRARLO, LO ASSUMIAMO COME ASSIOMA)

- SI NOTI CHE È POSSIBILE PARTIRE DA k_0 ANZICHÉ $k = 0$ E IL TUTTO VARREBBE COMUNQUE

<u>ESERCIZIO</u>:

$\forall d \geq -1$ VALE LA DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI:

$$(1+d)^n \geq 1 + nd \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- CONSIDERIAMO IL CASO BASE $n = 1$:

$$(1+d)^1 \geq 1 + d \to 1 + d \geq 1 + d \ \checkmark$$

- DIMOSTRIAMO CHE $P_n \to P_{n+1}$

$$Hp: (1+d)^n \geq 1 + nd \qquad Th: (1+d)^{n+1} \geq 1 + (n+1)d$$

<u>dim</u>: $(1+d)^{n+1} = (1+d)^n (1+d) \geq (1+nd)(1+d) = 1 + nd^2 + nd + d = 1 + \underset{\geq 0}{nd^2} + (n+1)d$

$\geq 1 + (n+1)d$

FATTORIALE DI UN NUMERO NATURALE

Vittorio Alzetta

- SIA $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, SI CHIAMA FATTORIALE DI n LA SUCCESSIONE DEFINITA PER INDUZIONE DA:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = (n-1)! \cdot n \end{cases}$$

ESEMPIO: $4! = (4-1)! \cdot 4 = (3-1)! \cdot 3 \cdot 4 = (2-1)! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = (1-1)! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

COEFFICIENTE BINOMIALE

- DATI $n, k \in \mathbb{N}$ CON $n \geq k$, CHIAMIAMO "n SU k" IL NUMERO:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k!)} \longrightarrow \text{MOTIVO DELLA CONDIZIONE } n \geq k$$

ESEMPIO: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \qquad \binom{3}{0} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1 \qquad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$

- SI NOTI CHE IL COEFFICIENTE BINOMIALE PUÓ CREARE LA SEGUENTE STRUTTURA:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\longrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 \quad 1 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA O PASCAL

- É UTILE DIMOSTRARE LA SEGUENTE PROPRIETÁ:

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \text{ CON } n \geq k \geq 1 : \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

dim: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = n! \left(\frac{1}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} + \frac{1}{(k-1)! \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)} \right) =$

$$= n! \left(\frac{n-k+1+k}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)} \right) = \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

Vittorio Alzetta

• PRESI $a, b \in \mathbb{R}$ $\wedge$ $n \in \mathbb{N}$ LA FORMULA DI NEWTON AFFERMA CHE:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

dim: LA FORMULA È VERA PER $n = 0$, INFATTI:

$$(a+b)^n = \binom{0}{0} a^0 \cdot b^0 = 1$$

• SUPPONIAMO CHE SIA VERA PER n E VERIFICHIAMO CHE LO SIA ANCHE PER $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

• A QUESTO PUNTO È POSSIBILE PORRE $k+1 = h$ NELLA PRIMA SOMMATORIA PER POI CAMBIARE h CON k

$$\sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n-h+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

• PER SOMMARE LE SOMMATORIE È NECESSARIO IL CASO $k = n+1$ DALLA PRIMA E IL CASO $k = 0$ DALLA SECONDA:

$$\Rightarrow a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \left(a^{n+1} + b^{n+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

CORRISPONDE AL CASO $k = n+1$

CORRISPONDE AL CASO $k = 0$

I NUMERI COMPLESSI

Vittorio Alzetta

- INDICHIAMO CON $\mathbb{C}$ L'INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI E LO DEFINIAMO COSÍ:

$$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$$

- DOVE LE OPERAZIONI SOMMA E PRODOTTO SONO DEFINITE DA:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

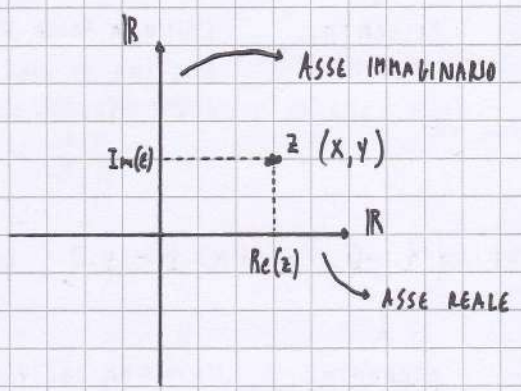
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{SOMMA}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad \text{PRODOTTO}$$

- GLI ELEMENTI $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ SONO CHIAMATI NUMERI COMPLESSI

X E Y SONO LE COORDINATE CARTESIANE

SI RAPPRESENTANO SUL PIANO COMPLESSO O DI GAUSS



FORMA ALGEBRICA

- IL NUMERO COMPLESSO $z = (x, y)$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME $x + iy$ DOVE i É L'UNITÁ IMMAGINARIA. SI VERIFICA CHE VALGONO COMUNQUE LE DEFINIZIONI DATE DI SOMMA E PRODOTTO

- SIANO $z_1 = (x_1, y_1)$ E $z_2 = (x_2, y_2)$ DUE NUMERI COMPLESSI:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

- PER COMODITÁ ASSUMIAMO CHE $i^2 = -1$, IN MODO DA OTTENERE:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

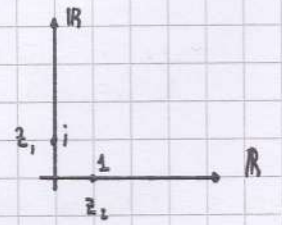
UNITÁ REALE E IMMAGINARIA

Vittorio Alzetta

- I NUMERI COMPLESSI $z_1 = (0,1)$ E $z_2 = (1,0)$ RAPPRESENTANO LE UNITÁ:

$$z_1 = 0 + i \cdot 1 = i \quad (\text{U. IMMAGINARIA})$$

$$z_2 = 1 + i \cdot 0 = 1 \quad (\text{U. REALE})$$



IL CAMPO $\mathbb{C}$

- SI PUÓ VERIFICARE FACILMENTE CHE SOMMA E PRODOTTO IN $\mathbb{C}$ SONO COMMUTATIVE E ASSOCIATIVE

- GLI ELEMENTI NEUTRI SONO:

$$(x,y) + (0,0) = (x,y) = (x+0, y+0)$$

ELEMENTO NEUTRO → L'ASSIOMA DELLA SOMMA DICE CHE SI INDICA CON $0 \in \mathbb{R}^2$ POICHÉ $(0,0)$ — $0 \in \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$

$$(x,y) \cdot (1,0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0,\ x \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x,y)$$

ELEMENTO NEUTRO → L'ASSIOMA DEL PRODOTTO DICE CHE SI INDICA CON $1 \in \mathbb{R}^2$

- L'ELEMENTO OPPOSTO DI $z = (x,y)$ SARÁ:

$$-z = (-x,-y) \text{ INDICATO COME } -(x,y)$$

- RICAVARE L'ELEMENTO RECIPROCO DEL PRODOTTO É UN PÓ PIÚ COMPLESSO:

$$z \cdot z^{-1} = (1,0) \rightarrow (x,y) \cdot (t,s) = (1,0)$$

DUNQUE:

$$\begin{cases} xt - ys = 1 \\ xs + yt = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xt + y \cdot \frac{yt}{x} = 1 \\ s = -\frac{yt}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} xt + \frac{y^2 t}{x} = 1 \\ s = -\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x}{x^2+y^2} \\ s = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

RICAVIAMO QUINDI $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right)$ O $\frac{x - iy}{x^2+y^2} \rightarrow \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Vittorio Alzetta

• DOVE ABBIAMO DEFINITO: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ MODULO DI z (DISTANZA DALL'ORIGINE DEGLI ASSI)

$\bar{z} := x - iy$ CONIUGATO DI z

ESERCIZIO: $z^2 = |z|^2$ CON $z = x + iy$

$S := \{z \in \mathbb{C} : z^2 = |z|^2\}$ BISOGNA AUMENTARE LA RISOLUZIONE DELLE SOLUZIONI

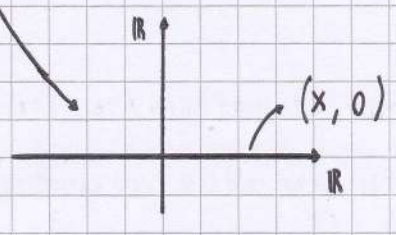
$z^2 = x^2 + i^2 y^2 + 2ixy$ $\quad |z|^2 = x^2 + y^2$ SFRUTTO LA FORMA ALGEBRICA PER IL PRODOTTO

$x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2$

$(x^2 - y^2, 2xy) = (x^2 + y^2, 0)$ PERCHÉ DUE NUMERI COMPLESSI SIANO UGUALI DEVONO AVERE LE STESSE COORDINATE (x, y)

$\begin{cases} x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \\ 2xy = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ \text{SEMPRE VERA} \end{cases}$

• DUNQUE $z^2 = |z|^2$ È SODDISFATTA DA TUTTE E SOLE LE COPPIE DELL'ASSE REALE



CAMPO COMPLESSO E RELAZIONE D'ORDINE

• IN UN CAMPO ORDINATO $\mathbb{K}$ DEVE VALERE LA SEGUENTE PROPOSIZIONE:

$$x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$$

• NEL CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI QUESTO NON VALE, INFATTI:

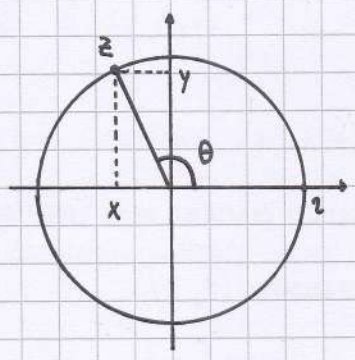
$z^2 + 1 = 0$ $\quad S := \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 1 = 0\} = \{i, -i\} =: \sqrt{-1}$

IN SAPPIAMO CHE $i^2 = -1$ E $(-i)^2 = i^2 = -1$

Vittorio Alzetta

COORDINATE POLARI

• QUESTA NUOVA FORMA PER RAPPRESENTARE I NUMERI COMPLESSI È INTRODOTTA PER CALCOLARE PIÚ FACILMENTE IL PRODOTTO. INFATTI, INVECE DI FORNIRE LE COORDINATE CARTESIANE DI UN NUMERO COMPLESSO BASTEREBBE DARE IL MODULO (DISTANZA DALL'ORIGINE) E L'ANGOLO CHE FORMA CON L'ASSE REALE (DETTO ARGOMENTO, INDICATO CON θ)



$\rho = 2$

$\theta = \frac{2}{3}\pi$

• QUESTE SONO LE COORDINATE POLARI DEL NUMERO COMPLESSO z. LA CONVERSIONE IN COORDINATE CARTESIANE È MOLTO SEMPLICE:

$$x = \rho \cdot \cos\theta = 2 \cdot \cos\frac{2}{3}\pi = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = \rho \cdot \sin\theta = 2 \cdot \sin\frac{2}{3}\pi = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

• OTTENIAMO COSÍ z SCRITTO IN FORMA ALGEBRICA, ESPLICITANDO LE SUE COORDINATE CARTESIANE

$$z = -1 + i\sqrt{3} = \left(-1, \sqrt{3}\right)$$

• PER DENOTARE CHE x E y SONO LE COORDINATE CARTESIANE NOMINANDO ALLA RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA, NEL CASO DELLE COORDINATE POLARI BISOGNA INTRODURRE UNA NUOVA NOTAZIONE:

$$z = \rho e^{i\theta} \rightarrow (\rho, \theta) \text{ SONO LE COORDINATE POLARI}$$

• PER COMPRENDERE LA NATURA DI QUESTA NOTAZIONE È NECESSARIO FARE QUALCHE PASSO IN PIÚ, POCO SOPRA ABBIAMO ESPRESSO LE COORDINATE CARTESIANE IN FUNZIONE DI QUELLE POLARI:

$$x = \rho \cdot \cos\theta \qquad y = \rho \cdot \sin\theta$$

• A QUESTO PUNTO È POSSIBILE SCRIVERE UN NUMERO COMPLESSO IN FORMA ALGEBRICA SOSTITUENDO LE DUE EQUAZIONI APPENA SCRITTE:

$$z = \rho \cdot \cos\theta + i\rho \sin\theta$$

Vittorio Alzetta

• RACCOGLIENDO IL MODULO ρ OTTENIAMO:

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

• PROVIAMO A CALCOLARE IL PRODOTTO DI DUE NUMERI COMPLESSI z_1 E z_2 SFRUTTANDO QUESTA NUOVA NOTAZIONE:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2\,(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2\,[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

• NOTIAMO CHE MOLTIPLICANDO I TERMINI $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ E $(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ NE OTTENIAMO UNO ANALOGO I CUI ARGOMENTI DEL SENO E COSENO CORRISPONDONO ALLA SOMMA DEGLI ARGOMENTI INIZIALI (θ_1, θ_2). SAREBBE QUINDI UTILE DEFINIRE UNA FUNZIONE A CUI PUÓ ESSERE ASSOCIATO θ_1 E θ_2, CHE SE MOLTIPLICATA RESTITUISCE LA SOMMA DEI VALORI:

LA FUNZIONE g: $\quad g(\theta_1)\cdot g(\theta_2) = g(\theta_1+\theta_2)$

CON $\quad g(x) = \cos x + i\sin x$

• PER COMODITÁ É UTILE RIFERIRSI AD UNA FUNZIONE CHE ABBIAMO GIÁ UTILIZZATO E CHE GODE DELLA PROPRIETÁ APPENA VISTA, L'ESPONENZIALE:

$$\exp_a(x)\cdot\exp_a(y) = \exp_a(x+y)$$

• PERCIÓ DECIDIAMO DI DEFINIRE LA NOTAZIONE ESPONENZIALE PER LA RAPPRESENTAZIONE DELLE COORDINATE POLARI, UTILE AL CALCOLO DEL PRODOTTO DI NUMERI COMPLESSI:

$$z_1\cdot z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1}\cdot\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\cdot\rho_2\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

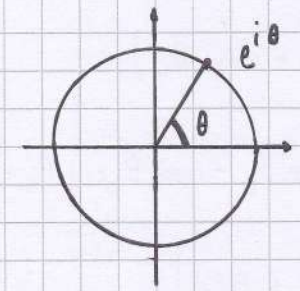
CON $\quad e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$

Vittorio Alzetta

• POSSIAMO QUINDI SCRIVERE CIÓ :

$$e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

• NE CONSEGUE CHE $e^{i\theta}$ PUÓ ESSERE VISUALIZZATO COME UN PUNTO DELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA (DI RAGGIO 1 E CENTRO O)



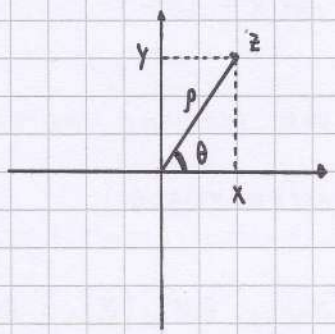
$$1 = (1,0) = e^{i0}$$
$$i = (0,1) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$-1 = (-1,0) = e^{i\pi} \rightarrow \text{GIOIELLO DI EULERO}$$

CONVERSIONE DA COORDINATE POLARI A CARTESIANE (E VICEVERSA)

• LA CONVERSIONE DA COORDINATE POLARI A CARTESIANE É GIÁ STATA TRATTATA PRECEDENTEMENTE :

$$(\rho, \theta) \longrightarrow \begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$$

• IL PASSAGGIO INVERSO (DA CARTESIANE A POLARI) É LEGGERMENTE PIÚ COMPLESSO. IN ALTERNATIVA SI POTREBBE PROCEDERE GRAFICAMENTE :



• PER RICAVARE ρ É SUFFICIENTE APPLICARE IL TEOREMA DI PITAGORA ALLE COORDINATE x E y, PER QUANTO RIGUARDA L'ANGOLO θ BISOGNA CONSIDERARE IL RAPPORTO y SU x, CALCOLARNE L'ARCO TANGENTE E VALUTARE SEPARATAMENTE I CASI IN CUI $x > 0$, $x < 0$, $x = 0 \wedge y > 0 \vee y < 0$

$$(x, y) \longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

RADICI COMPLESSE

Vittorio Alzetta

- DEFINIAMO LA RADICE n-ESIMA DI UN NUMERO COMPLESSO z COME L'INSIEME:

$$\sqrt[n]{z} := \{ w \in \mathbb{C} : w^n = z \} \quad \text{CON } n \in \mathbb{N}$$

- DAL MOMENTO CHE ABBIAMO A CHE FARE CON UNA SERIE DI PRODOTTI, PUÓ RISULTARE UTILE CONVERTIRE L'INCOGNITA w E IL DATO z IN FORMA ESPONENZIALE, PERCIÓ:

$$z = \mu e^{i\sigma} \qquad w = \rho e^{i\theta}$$

- DOVE μ É IL MODULO DI z $(|z|)$ E σ É L'ARGOMENTO DI z $(\arg(z))$. A QUESTO PUNTO SOSTITUIAMO QUESTA RAPPRESENTAZIONE NELL'EQUAZIONE INIZIALE

$$\sqrt[n]{z} = \{ \rho e^{i\theta} : \rho e^{in\theta} = \mu e^{i\sigma} \}$$

- I DUE TERMINI SARANNO UGUALI SE SARANNO UGUALI I MODULI E GLI ANGOLI, COMPRESE EVENTUALI RIPETIZIONI DI 2π

$$\sqrt[n]{z} = \{ \rho e^{i\theta} : \rho^n = \mu \wedge e^{in\theta} = e^{i\sigma} \}$$

$$\sqrt[n]{z} = \{ \rho e^{i\theta} : \rho^n = \mu \wedge n\theta = \sigma + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$$

- SI NOTI CHE L'EQUAZIONE $\rho^n = \mu$ É TRA NUMERI REALI, E HA COME UNICA SOLUZIONE $\rho = \sqrt[n]{\mu}$, PERCIÓ POSSIAMO SCRIVERE:

$$\sqrt[n]{z} = \{ \sqrt[n]{\mu}\, e^{i\theta} : n\theta = \sigma + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$$

- EFFETTUANDO LA DIVISIONE PER n E LA SOSTITUZIONE $\mu = |z|$ E $\sigma = \arg(z)$ OTTENIAMO:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta} : \theta = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- SI NOTI CHE MENTRE $\sqrt[n]{z}$ É INTESA IN CAMPO COMPLESSO, $\sqrt[n]{|z|}$ É INTESA IN CAMPO REALE

Vittorio Alzetta

• SOSTITUENDO $0, 1, \dots, k$ NELL'EQUAZIONE DI θ CI ACCORGIAMO CHE SI OTTENGONO RISULTATI DIVERSI SOLO PRIMA DI PORRE $k = n$, IN QUANTO SOSTITUENDO n OTTENIAMO:

$$\theta = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{k} = \frac{\arg(z)}{n}$$

• DUNQUE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI NON È INFINITO, MA ESISTE UNA SOLUZIONE ~~PER~~ DIVERSA PER $k = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. PERCIÓ n SOLUZIONI DISTINTE, L'INSIEME DIVENTA:

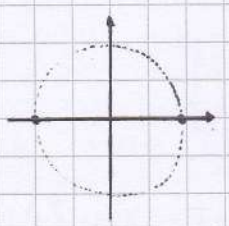
$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta} : \theta = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

ESEMPIO:

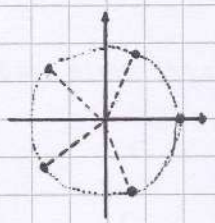
SCRIVIAMO LE RADICI n-ESIME DI 1: $\sqrt[n]{1}$ (IN SENSO COMPLESSO), CON $1 = e^{i0}$

$$\sqrt[n]{1} = \left\{ 1 \cdot e^{i\frac{0}{n}},\ 1\, e^{i\left(\frac{0}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)},\ \dots,\ 1\, e^{i\left(\frac{0}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)} \right\}$$

ORA VISUALIZZIAMO LE SOLUZIONI DI $\sqrt[2]{1}$ SUL PIANO COMPLESSO



$$\sqrt[2]{1} = \left\{ 1,\ e^{i\frac{2\pi}{2}} \right\} = \{ 1, -1 \}$$



$$\sqrt[5]{1} = \left\{ 1,\ e^{i\frac{2\pi}{5}},\ e^{i\frac{4\pi}{5}},\ e^{i\frac{6\pi}{5}},\ e^{i\frac{8\pi}{5}} \right\}$$

OGNI RADICE SI OTTIENE MEDIANTE UNA ROTAZIONE DI $\frac{2\pi}{n}$ RISPETTO ALLA PRECEDENTE

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Vittorio Alzetta

- CONSIDERIAMO IL POLINOMIO A COEFFICIENTI COMPLESSI

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

- CON $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_i \in \mathbb{C}$ PER $i = 0, 1, \dots, n$ E $a_n \neq 0$

- ESISTONO n NUMERI COMPLESSI $z_1, z_2, \dots, z_n$ TALI CHE

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- SI NOTI CHE TALE ENUNCIATO NON VALE PER I NUMERI REALI, IN QUANTO IL POLINOMIO POTREBBE NON AVERE SOLUZIONI, INOLTRE, POSSIAMO OSSERVARE CHE LE RADICI, O GLI ZERI, DI P_n NON DEVONO NECESSARIAMENTE ESSERE DISTINTI.

- IL NUMERO DI VOLTE IN CUI UNA CERTA SOLUZIONE COMPARE NELLA FATTORIZZAZIONE È DETTO MOLTEPLICITÀ, AD ESEMPIO: $*$ DELLA SOLUZIONE

$$P_3 = (x-3)^2 (x+2)(x+1)^3$$

- LE RADICI SONO: $z_1 = 3$ CON MOLTEPLICITÀ 2
  $z_2 = -2$ CON MOLTEPLICITÀ 1
  $z_3 = -1$ CON MOLTEPLICITÀ 3

- IN $\mathbb{C}$ OGNI EQUAZIONE ALGEBRICA HA DI GRADO n $(P_n = 0)$ HA n SOLUZIONI

POLINOMI COMPLESSI A COEFFICIENTI REALI

Vittorio Alzetta

- SIA $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ UN **POLINOMIO COMPLESSO** (LE VARIABILI SONO COMPLESSE) A COEFFICIENTI REALI

- DATA L'EQUAZIONE ALGEBRICA $P(z) = 0$ A COEFFICIENTI REALI, SE z È SOLUZIONE ALLORA $\bar{z}$ È SOLUZIONE.

Dim: $H_p : P(z) = 0 \qquad Th : P(\bar{z}) = 0$

$$P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0$$

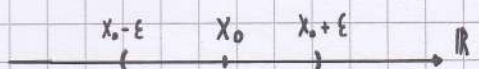
$* \quad z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = \rho e^{-i\theta} \Rightarrow \bar{z}^k = (\rho e^{-i\theta})^k = \rho^k e^{-ik\theta} = \overline{\rho^k e^{ik\theta}} = \overline{\rho \, z^k}$

TOPOLOGIA

Vittorio Alzetta

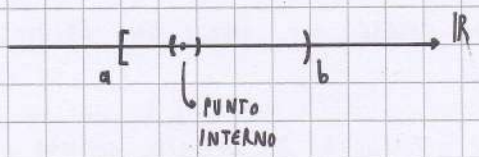
PUNTI INTERNI E INSIEMI APERTI

- SIANO $X_0 \in \mathbb{R}$ E $\varepsilon > 0$, GLI INTERVALLI $(X_0 - \varepsilon, X_0 + \varepsilon)$ SONO CHIAMATI ε-INTORNI DI X_0



- IDENTIFICHEREMO CON CENTRO IL PUNTO X_0, E CON RAGGIO O SEMIAMPIEZZA ε

- SIA A UN SOTTOINSIEME NON VUOTO DI $\mathbb{R}$, UN $X_0 \in A$ SI DICE PUNTO INTERNO AD A SE ESISTE UN ε-INTORNO DI X_0 CONTENUTO IN A. CONSIDERIAMO L'INSIEME $A = [a, b)$:



- IL PUNTO a NON È PUNTO INTERNO DI A POICHÉ NON ESISTE UN ε-INTORNO DI a CONTENUTO IN A, $(a - \varepsilon) \notin A$.

- UN INSIEME A SI DICE APERTO SE È VUOTO O SE OGNI SUO ELEMENTO È PUNTO INTERNO. ALCUNI ESEMPI SONO:

$\emptyset$, $\mathbb{R}$, LE UNIONI DI QUALUNQUE FAMIGLIA DI APERTI

dim: CONSIDERIAMO $\{A_i : i \in I\}$ E UN $X_0 \in \bigcup \{A_i : i \in I\}$, PER DEFINIZIONE ESISTE UN $i_0 \in I$ TALE PER CUI $X_0 \in A_{i_0}$, SAPPIAMO CHE A_{i_0} È APERTO PER IPOTESI. SICCOME A_{i_0} È APERTO ALLORA ESISTE UN $\varepsilon > 0$: $(X_0 - \varepsilon, X_0 + \varepsilon) \subseteq A \subseteq \bigcup \{A_i : i \in I\}$

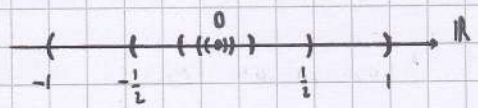
- ANCHE LE INTERSEZIONI FINITE DI INSIEMI APERTI SONO INSIEMI APERTI

dim: DETTA $\{A_i : i = 1, \dots, n\}$ LA FAMIGLIA DI APERTI PRENDIAMO $X_0 \in \bigcap \{A_i : i = 1, \dots, n\}$ PER DEFINIZIONE $X_0 \in A_i \ \forall i = 1, \dots, n$. SICCOME A_i È APERTO ESISTE $\varepsilon_i > 0$ TALE PER CUI $(X_0 - \varepsilon_i, X_0 + \varepsilon_i) \subseteq A_i$, PRESO $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ AVREMO CHE $(X_0 - \varepsilon, X_0 + \varepsilon) \subseteq \bigcap \{A_i : i = 1, \dots, n\}$

Vittorio Alzetta

• INTERSEZIONI INFINITE DI APERTI POSSONO NON ESSERE APERTE, AD ESEMPIO:

$$\bigcap \left\{ \left(-\tfrac{1}{i}, \tfrac{1}{i}\right) : i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \{0\} = A$$



INSIEME CHIUSO

• UN SOTTOINSIEME C DI $\mathbb{R}$ SI DICE **CHIUSO** SE IL COMPLEMENTARE DI C È APERTO, NE SONO ESEMPI I SEGUENTI:

$$\emptyset \ (\mathbb{R} \setminus \emptyset \text{ È APERTO}), \ \mathbb{R} \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} \text{ È APERTO})$$

• DUNQUE DUE INSIEMI POSSONO ESSERE SIA APERTI CHE CHIUSI. ALTRI ESEMPI SONO:

LE INTERSEZIONI DI QUALUNQUE FAMIGLIA DI INSIEMI CHIUSI

dim: SE A È CHIUSO ALLORA A^c È APERTO PER DEFINIZIONE. CONSIDERIAMO A APERTO, $(A^c)^c = A \Rightarrow A^c$ È CHIUSO.

PRENDIAMO $\{A_i^c : i \in I\}$ CON A_i APERTO E $x_0 \in \bigcap \{A_i^c : i \in I\}$, PER LE LEGGI DI DE MORGAN EQUIVALE A DIRE $x_0 \in \bigcup \{A_i : i \in I\}^c$. POICHÉ ABBIAMO GIÁ DIMOSTRATO CHE $\bigcup \{A_i : i \in I\}$ È APERTO CONSEGUE CHÉ IL SUO COMPLEMENTARE È CHIUSO □

• LO STESSO VALE PER LE UNIONI FINITE DI CHIUSI

dim: PRENDIAMO $\{A_i^c : i = 1, \dots, n\}$ CON A_i APERTO E $x_0 \in \bigcup \{A_i^c : i = 1, \dots, n\}$, PER LE LEGGI DI DE MORGAN VALE A DIRE $x_0 \in \bigcap \{A_i : i = 1, \dots, n\}^c$. POICHÉ ABBIAMO GIÁ DIMOSTRATO CHE $\bigcap \{A_i : i = 1, \dots, n\}$ È APERTO CONSEGUE CHE IL SUO COMPLEMENTARE È CHIUSO. □

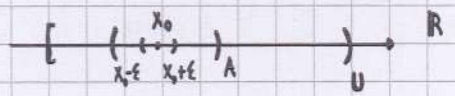
• LE UNIONI INFINITE DI CHIUSI POSSONO NON ESSERE CHIUSE, AD ESEMPIO:

Vittorio Alzetta

INTORNO

- SIA $x_0 \in \mathbb{R}$. UN SOTTOINSIEME U DI $\mathbb{R}$ SI DICE **INTORNO** DI x_0 SE ESISTE UN INSIEME APERTO A TALE CHE:

$$x_0 \in A \subseteq U \subseteq V \quad (\text{GENERICO SOPRAINSIEME})$$



- SIA $x_0 \in \mathbb{R}$, SONO INTORNI DI x_0:

1) GLI ε-INTORNI

2) OGNI APERTO CONTENENTE x_0

3) OGNI INSIEME CONTENENTE UN INTORNO DI x_0

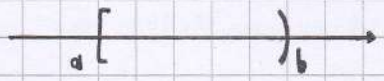
4) LE INTERSEZIONI FINITE DI INTORNI DI x_0

CHIUSURA

- SIA $A \subseteq \mathbb{R}$. SI CHIAMA **CHIUSURA** DI A, INDICATA CON $\bar{A}$, L'INTERSEZIONE DI TUTTI I CHIUSI CONTENENTI A, IN FORMULE:

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{C \text{ CHIUSO} \\ C \supseteq A}} C := \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in C \ \forall\, C \text{ CHIUSO} \wedge A \subseteq C \right\}$$

ESEMPIO:



$$\bar{A} = \bigcap \left\{ C \subseteq \mathbb{R} : C \text{ CHIUSO} \wedge A \subseteq C \right\} = [a, b]$$

- DIMOSTRIAMO CHE VALE LA PROPOSIZIONE: A CHIUSO $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

dim: ($\Leftarrow$) LA CHIUSURA È CHIUSA, POICHÉ INTERSEZIONE DI CHIUSI, PERCIÓ LO SARÁ ANCHE A

($\Rightarrow$) $A \subseteq \bar{A}$ (POICHÉ CONTENUTO IN TUTTI I C)

$\bar{A} \subseteq C \quad \forall\, C$ CHIUSO $\wedge\ A \subseteq C$ (DUNQUE A PUÓ ESSERE UNO DEI C)

$\bar{A} \subseteq A \Rightarrow \bar{A} = A$

Vittorio Alzetta

• DIMOSTRIAMO CHE VALE LA RELAZIONE $\bar{A} = \min \{ C \text{ CHIUSO} : A \subseteq C \}$ DOVE IL MINIMO È CONSIDERATO RISPETTO ALLA RELAZIONE D'ORDINE DI INCLUSIONE NELL'INSIEME DELLE PARTI DI $\mathbb{R}$:

dim: PER DEFINIZIONE ABBIAMO CHE:

$$\bar{A} \in \{ C \text{ CHIUSO} : A \subseteq C \} \quad \wedge \quad \bar{A} \subseteq C \quad \forall\, C \text{ CHIUSO} : A \subseteq C$$

OVVERO LA DEFINIZIONE DI MINIMO

PUNTI ADERENTI

• SIA $x \in \mathbb{R}$ E SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, SONO EQUIVALENTI LE PROPOSIZIONI:

$$x \in \bar{A} \ [1] \qquad \text{E} \qquad U \cap A \neq \emptyset \ \ \forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ [2]$$

• DOVE $\mathcal{U}$ È L'INSIEME DEGLI INTORNI DI X E GLI ELEMENTI CHE SODDISFANO LA [2] SONO CHIAMATI PUNTI ADERENTI

dim: [1] ⇒ [2]

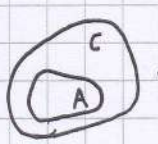
SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\exists\, U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A = \emptyset$. CI TROVEREMO IN QUESTA SITUAZIONE:



DUNQUE $U \supseteq B$ (INSIEME APERTO) $\ni x$, E QUINDI $A \subseteq B^c$ (INSIEME CHIUSO) CON $x \notin B^c \wedge x \notin A$. IN CONTRADDIZIONE CON [1], LA CUI SI RICAVA CHE $x \in C \ \forall\, C$ CHIUSO, $A \subseteq C$

[2] ⇒ [1]

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $x \notin \bar{A}$, QUINDI $\exists\, C$ CHIUSO, $C \supseteq A : x \notin C$



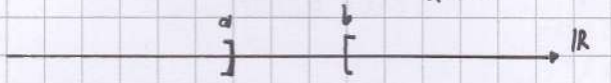
VALE ALLORA $x \in C^c$, CON $C^c = U$ (INSIEME DEGLI INTORNI DI A). QUESTO COMPORTA $U \cap A = \emptyset$, IN CONTRADDIZIONE CON LA [2]

INSIEMI DENSI

Vittorio Alzetta

• UN SOTTOINSIEME $D \subseteq \mathbb{R}$ SI DICE **DENSO** IN $\mathbb{R}$ SE $\overline{D} = \mathbb{R}$

ESEMPIO: CONSIDERIAMO LA CHIUSURA DI $\mathbb{Q}$: $\overline{\mathbb{Q}} = \bigcap_{\substack{C \text{ CHIUSO} \\ \mathbb{Q} \subseteq C}} C$



SE CONSIDERASSIMO UN INSIEME COME $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ ESSO NON CONTERREBBE $\mathbb{Q}$ (BASTEREBBE PRENDERE $[a+b]/2$). RISULTA QUINDI CHE L'UNICO CHIUSO A CONTENERE $\mathbb{Q}$ È $\mathbb{R}$

PUNTI DI ACCUMULAZIONE

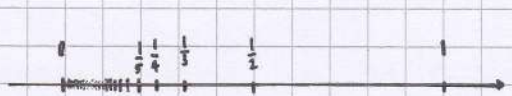
• SIA $A \subseteq \mathbb{R}$. UN PUNTO $x \in \mathbb{R}$ È DETTO DI **ACCUMULAZIONE** PER A SE VALE:

$$U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}(x)$$

• L'INSIEME DEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI A SI INDICA CON A'. SI NOTI LA SOMIGLIANZA CON LA DEFINIZIONE DI PUNTO ADERENTE, E SI NOTI CHE UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE È UN PUNTO ADERENTE.

• SE x È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A ALLORA OGNI INTORNO DI x CONTIENE INFINITI PUNTI DI A DIVERSI DA x (E x PUÒ NON APPARTENERE AD A)

ESEMPIO: CONSIDERIAMO $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$



L'ELEMENTO 0 NON APPARTIENE AD A MA È PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : 0 - \varepsilon < \frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : n > \frac{1}{\varepsilon}$$ VERA, POICHÉ $\mathbb{N}$ NON È SUPERIORMENTE LIMITATO

• SIA $A \subseteq \mathbb{R}$. UN PUNTO DI A, AD ESEMPIO x, SI DICE **ISOLATO** SE NON È DI ACCUMULAZIONE, CIOÉ SE ESISTE UN INTORNO DI x CHE NON CONTIENE PUNTI DI A DIVERSI DA x.

Vittorio Alzetta

PARTE INTERNA

- DAL MOMENTO CHE ABBIAMO DEFINITO LA CHIUSURA DEFINIAMO ANCHE L'APERTURA O PARTE INTERNA COME L'UNIONE DI TUTTI GLI APERTI CONTENUTI IN A, DENOTATA CON $\mathring{A}$:

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{B \text{ APERTO} \\ B \subseteq A}} B = \max \{ B \text{ APERTO} : B \subseteq A \}$$

FRONTIERA

- SIA $A \subseteq \mathbb{R}$. CHIAMIAMO FRONTIERA (O BORDO) DI A L'INSIEME:

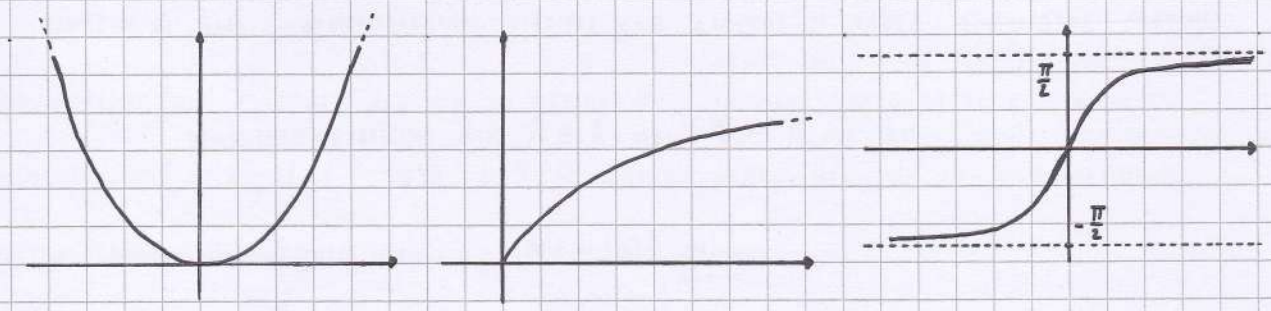
$$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} \quad (\partial \text{ NON È UNA LETTERA})$$

ESEMPIO $\partial(a,b) = [a,b] \setminus (a,b) = \{a,b\}$ o $\partial[a,b] = [a,b] \setminus (a,b) = \{a,b\}$

LIMITI

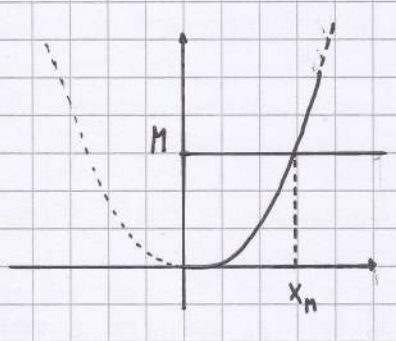
Vittorio Alzetta

CON IL CONCETTO DI LIMITE INIZIA L'ANALISI MATEMATICA. SU DI ESSO SI BASANO IL CONCETTO DI DERIVATA E DI INTEGRALE, TUTTO É LIMITE. IMMAGINIAMO DI ESSERE NEL 1600 E DI DOVER DEFINIRE FORMALMENTE L'IDEA DI LIMITE. ANZITUTTO, PER FISSARE MEGLIO LE IDEE, POTREMMO DISEGNARE ALCUNI GRAFICI PER CERCARE DI CAPIRE IL COMPORTAMENTO CHE ASSUMERANNO MANO A MANO CHE x AUMENTA:



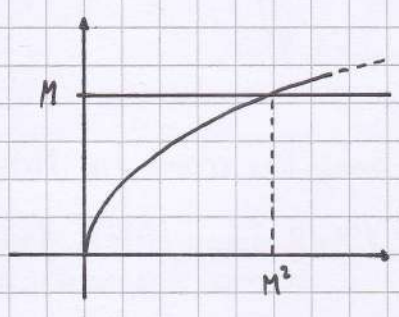
INTUITIVAMENTE POTREMMO DIRE CHE $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ O $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ MA NON SAREBBE UNA DEFINIZIONE PRECISA E FORMALE.

TUTTAVIA, NEL CASO DI x^2 POSSIAMO NOTARE CHE PRESO UN QUALSIASI LIVELLO M ESISTE UN PUNTO DELLA FUNZIONE $f(x) = x^2$ TALE DA SUPERARE IL LIVELLO M, O IN FORMULE:



$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x_M : f(x) > M \ \forall x > x_M \qquad [1]$$

PER VERIFICARE SE UNA FUNZIONE TENDE A $+\infty$ PER x SEMPRE PIÙ GRANDE É SUFFICIENTE ESIBIRE UN x_M PER CUI VALE LA DEFINIZIONE [1], PROVIAMO CON $f(x) = \sqrt{x}$

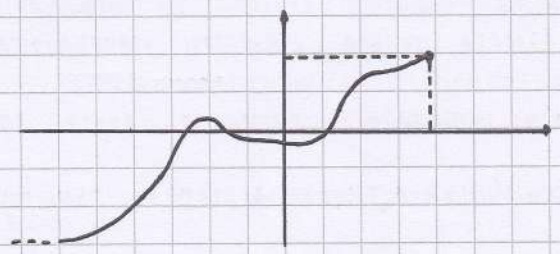


ABBIAMO BISOGNO DI UN x_M TALE CHE $f(x) > M \ \forall x > x_M$, CIOÉ $\sqrt{x} > M$, PONIAMO QUINDI $x_M = M^2$, COSÍ FACENDO ABBIAMO ESIBITO IL VALORE CHE SODDISFA LA [1], CONCLUDENDO:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Vittorio Alzetta

PER ALCUNE FUNZIONI NON HA SENSO CHIEDERSI COSA SUCCEDE PER $x \to +\infty$, AD ESEMPIO:



PERCHÉ ABBIA SENSO IL CALCOLO DEL LIMITE PER $x \to +\infty$ LA FUNZIONE DEVE ~~ESSERE NON LIMITATA SUPERIORMENTE~~ AVERE IL DOMINIO NON LIMITATO SUPERIORMENTE, CIOÉ IN FORMULE:

SIA $f: A \to \mathbb{R}$ CON $A \subseteq \mathbb{R}$ NON LIMITATO SUPERIORMENTE

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

SE VALE:

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x_M : f(x) > M \ \forall x \in A, \ x > x_M$$

SI NOTI CHE LE DUE FORMULAZIONI SEGUENTI DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE SONO EQUIVALENTI:

1) $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x_M : f(x) > M \ \forall x \in A, \ x > x_M$

2) $\forall M \geq M_0 \in \mathbb{R} \ \exists x_M : f(x) > M \ \forall x \in A, \ x > x_M$

L'IMPLICAZIONE $(1) \Rightarrow (2)$ É OVVIA, ANCHE LA $(2) \Rightarrow (1)$ LO É SE PENSIAMO AL FATTO CHE SE LA DEFINIZIONE VALE PER GLI $M \geq M_0$ VARRÁ SICURAMENTE ANCHE PER GLI $M < M_0$, BASTERÁ CONSIDERARE GLI x_M TROVATI PER $M \geq M_0$.

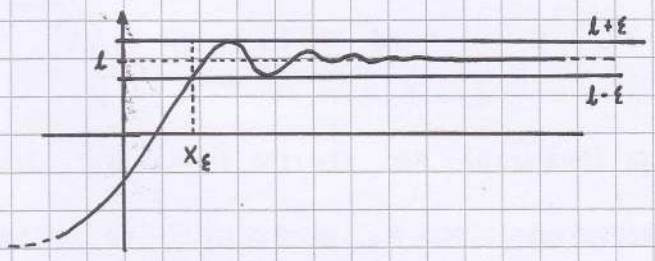
LIMITE PER $x \to +\infty$

SE x TENDE A $+\infty$ IL LIMITE DI $f(x)$ PUÓ NON ESISTERE (AD ESEMPIO PER $F(x) = \sin x$), PUÓ ESSERE $+\infty$ (ESEMPI PRECEDENTI), PUÓ ESSERE $-\infty$ ($\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x_M : f(x) < M \ \forall x \in A, x > x_M$) O PUÓ ESSERE FINITO, OVVERO UN NUMERO REALE l.

Vittorio Alzetta

LIMITE FINITO l PER $x \to +\infty$

SIA A UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ E $f: A \to \mathbb{R}$. DIREMO CHE f HA LIMITE $l \in \mathbb{R}$ PER x TENDENTE A $+\infty$ SE SI VERIFICHERÀ LA SEGUENTE SITUAZIONE



DEVE ESISTERE UN x_ε TALE PER CUI LA FUNZIONE, DA QUEL PUNTO IN POI, È LIMITATA ALL'INTERVALLO $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ DOVE ε È UN NUMERO REALE MAGGIORE DI 0 QUALUNQUE.

POSSIAMO TRADURRE IN FORMULE COSÌ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon : \ l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \ \ \forall x \in A, x > x_\varepsilon$$

UNICITÁ DEL LIMITE

L'ENUNCIATO DI QUESTO TEOREMA AFFERMA CHE:

SE f HA LIMITE $l \in \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\text{DOVE } \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\right)$ PER $x \to +\infty$

ALLORA QUESTO LIMITE È UNICO

POICHÉ IL LIMITE, QUANDO ESISTE, PUÒ ASSUMERE VALORI DIVERSI DOBBIAMO DISTINGUERE I CASI IN CUI $l_1 = r_1$ E $l_2 = r_2$, $l_1 = +\infty$ E $l_2 = r$ O $l_1 = +\infty$ E $l_2 = -\infty$

dim: SUPPONIAMO PER ASSURDO DI TROVARCI NELLA PRIMA SITUAZIONE, CON DUE LIMITI DISTINTI l_1 E $l_2 \in \mathbb{R}$

SCRIVIAMO LE DEFINIZIONI:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x'_\varepsilon : \ |f(x) - l_1| < \varepsilon \ \ \forall x > x'_\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x''_\varepsilon : \ |f(x) - l_2| < \varepsilon \ \ \forall x > x''_\varepsilon$$

ORA PROVIAMO A SCRIVERE LA DISTANZA TRA l_1 E l_2, ESSENDO NUMERI REALI VARRÀ $|l_2 - l_1| \geq 0$.

Vittorio Alzetta

SFRUTTANDO LA DEFINIZIONE POSSIAMO SCRIVERE

$$\underbrace{|l_2 - f(x)}_{a} + \underbrace{f(x) - l_1|}_{b} \leq |l_2 - f(x)| + |f(x) - l_1|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

SE VOLLIAMO APPLICARE LA DEFINIZIONE NON POSSIAMO CONSIDERARE DEGLI X QUALUNQUE, MA TALI DA SODDISFARE LE DISUGUAGLIANZE $X > X_\varepsilon^1 \wedge X > X_\varepsilon^2$, IN SOSTANZA $X > \max\{X_\varepsilon^1, X_\varepsilon^2\}$.

OTTENIAMO QUINDI LA RELAZIONE:

$$0 \leq |l_2 - l_1| \leq |l_2 - f(x)| + |f(x) - l_1| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

DISPONENDO INVERSAMENTE I MEMBRI DELLA DISUGUAGLIANZA AVREMO:

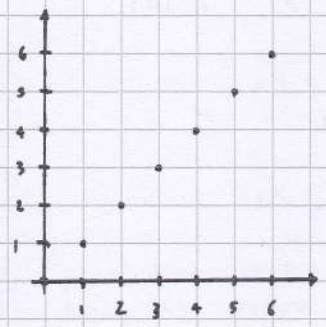
$$0 \leq \left| \frac{l_2 - l_1}{2} \right| < \frac{2}{2}\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

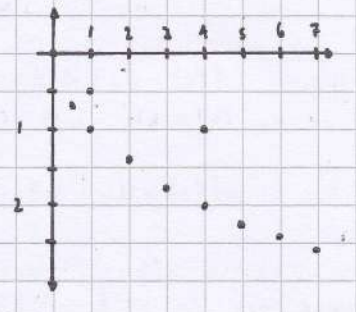
DA CUI SI RICAVA INTUITIVAMENTE CHE $l_2 - l_1 = 0$, OVVERO CHE $l_1 = l_2$ IN CONTRADDIZIONE CON QUANTO SUPPOSTO INIZIALMENTE, CIOÉ CHE I DUE LIMITI FOSSERO DISTINTI.

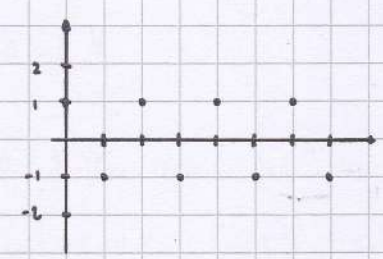
SUCCESSIONI

É UNA **SUCCESSIONE** UNA FUNZIONE $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ CHE AL NUMERO NATURALE n ASSOCIA IL NUMERO REALE $f(n)$, LE SUCCESSIONI SONO SPESSO DENOTATE CON $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ O SEMPLICEMENTE a_n (LEGGE DELLA SUCCESSIONE O **TERMINE GENERALE**).

DISEGNAMO LE SUCCESSIONI $a_n = n$, $a_n = -n^{\frac{1}{2}}$, $a_n = (-1)^n$







Vittorio Alzetta

DUNQUE SE a_n É UNA SUCCESSIONE IL CUI DOMINIO NON É LIMITATO SUPERIORMENTE. PER QUESTO MOTIVO HA SENSO PARLARE DI LIMITI PER $x \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_n \in \mathbb{N} : a_n > M\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_\varepsilon$$

SONO STATE DEFINITE DUE TIPI DI SUCCESSIONI, A SECONDA DEL LIMITE A CUI TENDONO PER $x \to +\infty$:

- SE LA SUCCESSIONE a_n HA LIMITE $+\infty$ O $-\infty$ É DETTA DIVERGENTE
- SE LA SUCCESSIONE a_n HA LIMITE FINITO l É DETTA CONVERGENTE

ESISTONO ANCHE SUCCESSIONI IL CUI LIMITE PER $x \to +\infty$ NON ESISTE, AD ESEMPIO QUELLA CONSIDERATA POCO FA, $a_n = (-1)^n$. SI VERIFICA LA STESSA SITUAZIONE DEL SENO DA $\mathbb{R}$ IN $\mathbb{R}$. INFATTI LE FUNZIONI PERIODICHE, PER $x \to +\infty$, NON HANNO LIMITE.

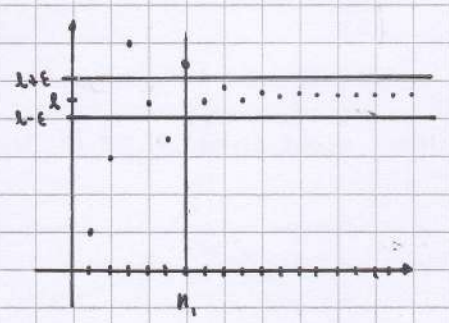
SUCCESSIONI LIMITATE

ANZITUTTO RICORDIAMO CHE UNA FUNZIONE É LIMITATA QUANDO LA SUA IMMAGINE, OVVERO IL CONDOMINIO, É LIMITATO. L'INSIEME IMMAGINE É LIMITATO QUANDO LO É SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE, CIOÉ SE ESISTONO $a, b \in \mathbb{R}$ TALI PER CUI $a \le a_n \le b$. SCEGLIENDO a E b IN MODO TALE CHE SIANO SIMMETRICI RISPETTO ALL'ORIGINE. LE STESSE CONSIDERAZIONI VALGONO PER LE SUCCESSIONI (ESSENDO PARTICOLARI FUNZIONI).

TEOREMA DI LIMITATEZZA DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI

IL TEOREMA AFFERMA CHE SE a_n É CONVERGENTE ALLORA SARÁ ANCHE LIMITATA

dim:



SE a_n CONVERGE ALLORA SAPPIAMO CHE ESISTONO 2 LIVELLI CHE CONTENGONO TUTTI I PUNTI DI a_n CON $n > n_1$. PERCIÓ BASTERÁ PRENDERE IL MINIMO E IL MASSIMO TRA GLI $n \le n_1$ E PORRE:

$$M = \max\{|l|, |\min|, |\max|\} \Rightarrow |a_n| < M\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Vittorio Alzetta

SUCCESSIONI MONOTONE

LE CONDIZIONI DI MONOTONIA NEL CASO DI SUCCESSIONI SI SEMPLIFICANO, INFATTI:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ È STR. CRS. SE
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ È STR. CRS. SE
$n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} < a_{n_2}$

TUTTAVIA POSSIAMO SCRIVERE LA SECONDA IMPLICAZIONE SFRUTTANDO IL FATTO CHE a È DEFINITA DA $\mathbb{N}$ IN $\mathbb{R}$:

a È STRETTAMENTE CRESCENTE SE $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PER FISSARE MEGLIO LE IDEE POSSIAMO VISUALIZZARE CON 2 GRAFICI QUESTO CONCETTO



QUESTA SUCCESSIONE È CRESCENTE



QUESTA FUNZIONE NON È CRESCENTE

TEOREMA SUL LIMITE DELLE SUCCESSIONI MONOTONE

IL TEOREMA AFFERMA CHE:

> OGNI SUCCESSIONE MONOTONA HA LIMITE, FINITO O INFINITO. TALE LIMITE COINCIDE CON L'ESTREMO SUPERIORE SE a_n È CRESCENTE O CON L'ESTREMO INFERIORE SE a_n È DECRESCENTE.

dim: SUPPONIAMO CHE a_n SIA CRESCENTE E CHE $S := \sup a_n \in \mathbb{R}$

$$a_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(DEFINIZIONE)} \qquad [1]$$

SE FISSIAMO $\varepsilon > 0$, PER DEFINIZIONE $S - \varepsilon$ NON SARÀ UN MAGGIORANTE, QUINDI ESISTE $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ TALE PER CUI $a_{n_\varepsilon} > S - \varepsilon$ E POICHÉ a_n È CRESCENTE SI AVRÀ:

$$a_n > S - \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \qquad [2]$$

Vittorio Alzetta

RIUNENDO LE PROPOSIZIONI [1] E [2] OTTENIAMO:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$$

CIOÉ LA DEFINIZIONE DI LIMITE ($\lim_{x \to +\infty} a_n = s$) CHE CONFERMA LA TESI INIZIALE.

LIMITI

LIMITI PER $x \to -\infty$

SIA A UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ NON LIMITATO INFERIORMENTE E $f: A \to \mathbb{R}$, DIREMO CHE:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ SE

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x_M : f(x) > M \quad \forall x \in A, x < x_M$$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ SE

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x_M : f(x) < M \quad \forall x \in A, x < x_M$$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ SE

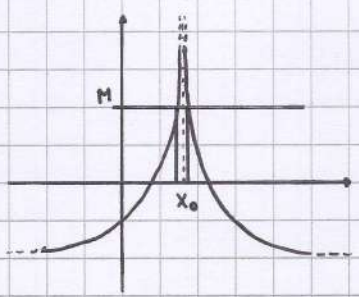
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A, x < x_{@\varepsilon}$$

SI PUÓ VERIFICARE FACILMENTE CHE DATO $l \in \overline{\mathbb{R}}$ SI HA:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \lim_{x \to +\infty} f(-x) = l$$

LIMITI PER $x \to x_0$

CONSIDERIAMO INIZIALMENTE IL LIMITE INFINITO PER x TENDENTE A x_0 SFRUTTANDO QUESTO GRAFICO:

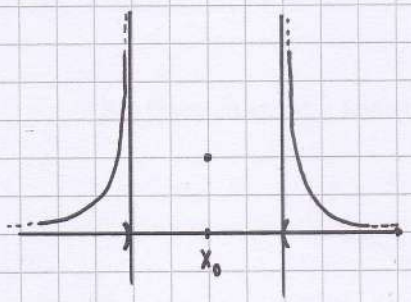


AFFINCHÉ IL LIMITE SIA $+\infty$ DOBBIAMO VERIFICARE CHE PRESO UN LIVELLO M QUALSIASI ESISTE UN δ_M TALE PER CUI GLI x TRA $x_0 - \delta_M$ E $x_0 + \delta_M$ ABBIANO $f(x)$ MAGGIORE DI M, IN FORMULE:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta_M > 0 : f(x) > M \quad \forall \, 0 < |x - x_0| < \delta_M, x \in A$$

Vittorio Alzetta

SI NOTI CHE NEL CALCOLO DEL LIMITE NON CONSIDERIAMO IL PUNTO X_0, E QUINDI IL VALORE CHE LA FUNZIONE ASSUME LÌ, SARÀ PIÙ CHIARO CON UN ESEMPIO:

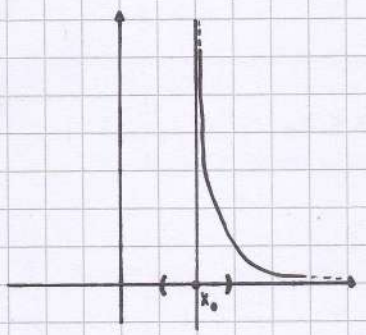


IN QUESTO CASO NON HA SENSO CHIEDERSI SE IL LIMITE DI $f(x)$ PER $X \to X_0$ SIA $+\infty$, $-\infty$ O l, POICHÉ NON ESISTE. PERCHÉ ABBIA SENSO DOBBIAMO AVERE $X_0 \in A'$ (PUNTI DI ACCUMULAZIONE)

ANALOGAMENTE POSSIAMO DEFINIRE IL LIMITE INFINITO $(-\infty)$ PER $X \to X_0$ COSÌ:

$$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists \delta_M > 0 : f(x) < M \; \forall \, 0 < |x - x_0| < \delta_M, \; x \in A$$

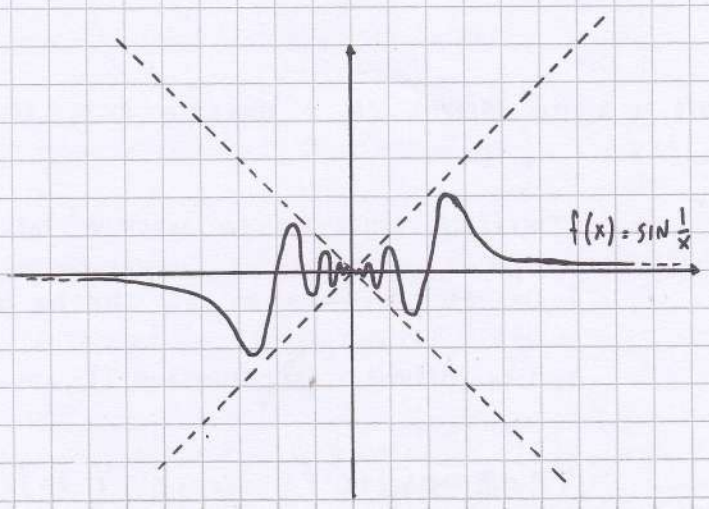
ILLUSTRERÒ ORA UN CASO PARTICOLARE, IN CUI NON RISULTA IMMEDIATO CAPIRE SE ABBIA SENSO CALCOLARE IL LIMITE IN X_0:



OSSERVIAMO CHE X_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE E CHE PER DEFINIZIONE DI LIMITE PER $X \to X_0$ ANDREMO A CONSIDERARE LE X CHE SODDISFANO LE PROPRIETÀ $X \in A$, $X \in (X_0 - \delta_M, X_0 + \delta_M)$. PERCIÒ HA SENSO PORSI LA DOMANDA SUL CALCOLO DEL LIMITE.

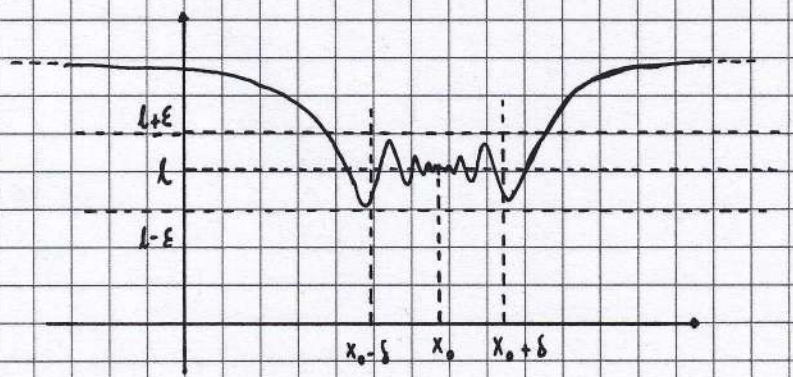
LIMITE FINITO PER $X \to X_0$

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. X E PROVIAMO A DISEGNARNE IL GRAFICO DIVIDENDO IL PROBLEMA NELLA RAPPRESENTAZIONE SEPARATA DI $f(x) = X$ E $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, PER SEMPLICITÀ DISEGNERÒ SUBITO IL GRAFICO FINALE (IN 2 PASSAGGI):



Vittorio Alzetta

IMMAGINIAMO DI SPOSTARE, TRASLANDO, LA FUNZIONE IN UN PUNTO DI COORDINATE $l \in X_0$, PER RENDERE PIÚ SEMPLICE LA RAPPRESENTAZIONE DEL LIMITE:



IN PAROLE POTREMMO DIRE CHE IL LIMITE PER $x_0 \to x_0$ É l SE PRESO UN QUALUNQUE $\varepsilon > 0$ AVREMO CHE GLI $f(x)$ ASSOCIATI ALL'INTERVALLO $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ RIENTRANO NELL'INTERVALLO $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

TRADOTTO IN FORMULE DIVENTA:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \ \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta$$

UNIFICAZIONE DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE

AFINORA ABBIAMO CONSIDERATO 3 TIPI DIVERSI DI LIMITI, PER $x \to x_0$, $x \to +\infty$ E $x \to -\infty$, DANDONE 3 DEFINIZIONI DIVERSE. CONSIDERIAMO ORA IL LIMITE FINITO PER $x \to x_0$, OSSERVIAMO CHE È POSSIBILE RICAVARE UNA DEFINIZIONE EQUIVALENTE IN TERMINI DI INTORNI, COSÍ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \ \forall \ 0 < |x - x_0| < \delta \ , \ x \in A \quad \text{CON } A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in A', f: A \to \mathbb{R}$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(l) \ \exists V \in \mathcal{U}(x_0) : f(V \setminus \{x_0\}) \subseteq U \quad [1]$$

IN QUESTO MODO, GRAZIE AD UNA PICCOLO SFORZO DI ASTRAZIONE, È POSSIBILE UNIFICARE LE 9 DEFINIZIONI DIVERSE DI LIMITE NELLA [1] RICORDANDO CHE:

$$U \in \mathcal{U}(l) \iff \exists A \text{ APERTO} : l \in A \subseteq U$$

$$V \in \mathcal{U}(x_0) \iff \exists A \text{ APERTO} : x_0 \in A \subseteq V$$

TUTTAVIA SE VOGLIAMO CHE LA [1] UNIFICHI LE DEFINIZIONI È NECESSARIO DEFINIRE 2 NUOVI TIPI DI INTORNI; GLI *INTORNI DI $+\infty$* E GLI ~~INTORNI~~ *INTORNI DI $-\infty$*:

- INTORNO DI $+\infty$:= QUALUNQUE SOTTOINSIEME $\overline{\mathbb{R}}$ DELLA FORMA $(b, +\infty]$
- INTORNO DI $-\infty$:= QUALUNQUE SOTTOINSIEME $\overline{\mathbb{R}}$ DELLA FORMA $[-\infty, a)$

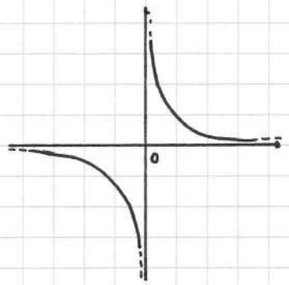
QUINDI, DAL MOMENTO CHE DATO UN LIMITE PER $x \to x_0$ CON $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ SAPPIAMO CHE x_0 È PUNTO DI ACCUMULAZIONE DICIAMO CHE:

$+\infty$ E $-\infty$ SONO *PUNTI DI ACCUMULAZIONE* DI INSIEMI NON LIMITATI SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE.

LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO

Vittorio Alzetta

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $\frac{1}{x}$ E IL SUO LIMITE PER $x \to 0$ MOSTRANDO CON UN GRAFICO IL SUO ANDAMENTO:



$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

$0 \in A'$ ✓ TUTTAVIA IL LIMITE NON ESISTE

$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ DOMINIO DELLA FUNZIONE

ORA PROVIAMO A CONSIDERARE 2 INTERVALLI DELLA FUNZIONE SEPARATAMENTE, IL PRIMO SARÀ $(-\infty, 0)$, IL SECONDO $(0, +\infty)$:

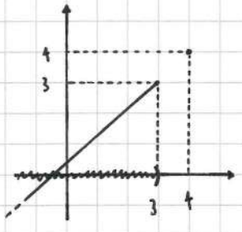
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\Big|_{(0,+\infty)} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\Big|_{(-\infty,0)} = -\infty$$

OSSERVIAMO CHE NEL PRIMO CASO, AVENDO CANCELLATO LA PARTE SINISTRA DEL GRAFICO, È COME SE CONSIDERASSIMO IL LIMITE CON x CHE SI AVVICINA SEMPRE DI PIÚ DA DESTRA. LO STESSO VALE PER IL SECONDO LIMITE (x SI AVVICINA DA SINISTRA). DEFINIAMO QUINDI 2 NUOVI LIMITI:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) := \lim_{x \to x_0} f|_{A \cap (x_0, +\infty)}(x) \quad \text{LIMITE DESTRO}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) := \lim_{x \to x_0} f|_{A \cap (-\infty, x_0)}(x) \quad \text{LIMITE SINISTRO}$$

CON $f : A \to \mathbb{R}$ E $x_0 \in (A \cap (x_0, +\infty))'$ O $x_0 \in (A \cap (-\infty, x_0))'$



$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3$$

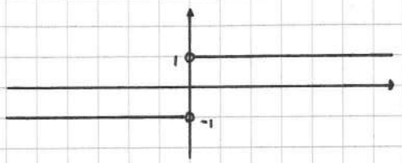
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} f|_{\{4\}}(x)$$

→ PER QUESTO MOTIVO INTERSECHIAMO CON IL DOMINIO. ~~QUESTO~~ È FALSO DIRE CHE QUESTO LIMITE NONESISTE, NON HA SENSO CONSIDERARLO

Vittorio Alzetta

ESEMPIO: CONSIDERIAMO LA FUNZIONE SEGNO

$$SGN(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{SE } x > 0 \\ -1 & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^-} SGN(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} SGN(x) = 1$$

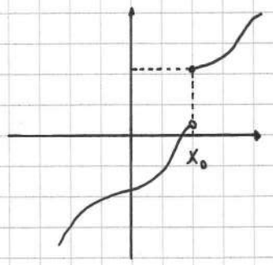
$$\lim_{x \to 0} SGN(x) \not\exists$$

NON POSSO CONSIDERARE CONTEMPORANEAMENTE IL LIMITE DESTRO E SINISTRO, LA FUNZIONE ASSUME 2 VALORI OPPOSTI, IN GENERALE VALE IL SEGUENTE TEOREMA:

H_p: SIA $f: A \to \mathbb{R}$ E $A \subseteq \mathbb{R}$ E $x_0 \in A'$ E $x_0 \in \left(A \cap (-\infty, x_0)\right)' \cup \left(A \cap (x_0, +\infty)\right)'$

T_h: $\lim_{x \to x_0} = l \iff \lim_{x \to x_0^-} = l \wedge \lim_{x \to x_0^+} = l$

LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE

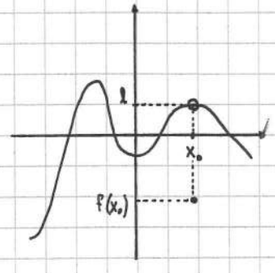


SIA $f: A \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE MONOTONA, SE ~~ABBIAMO CHE~~ $x_0 \in (A \cap (x_0, +\infty))'$ ALLORA ESISTERÀ IL LIMITE DESTRO IN x_0:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf \{ f(x) : x \in A, x > x_0 \} & \text{SE CRESCENTE} \\ \sup \{ f(x) : x \in A, x > x_0 \} & \text{SE DECRESCENTE} \end{cases}$$

LE STESSE CONSIDERAZIONI VALGONO PER IL LIMITE DESTRO IN x_0

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO



SIA $f: A \to \mathbb{R}$ E SIA $x_0 \in A'$. SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ CON $l > 0$ ALLORA ESISTE UN INTORNO U DI x_0 TALE CHE:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$$

D'ALTRONDE MANO A MANO CHE MI AVVICINO A x_0 $f(x)$ SI AVVICINA l. TUTTAVIA NEL PUNTO x_0 POTREBBE ESSERE MINORE DI 0, MA QUESTO NON CONVIENE PERCHÉ IL LIMITE, DATO CHE ESCLUDIAMO x_0 DAL DOMINIO

OPERAZIONI CON I LIMITI

SOMMA

SIANO f E g DUE FUNZIONI CON

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \overline{\mathbb{R}}$$

CON x_0 EVENTUALMENTE PARI A $+\infty$ o $-\infty$. DIREMO CHE:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = \alpha + \beta$$

LIÒ AD ESCLUSIONE DEL CASO $\alpha = \pm\infty$ E $\beta = \mp\infty$, INFATTI LASCEREMO INDETERMINATA QUESTA OPERAZIONE PER I MOTIVI SEGUENTI:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$f(x) = x + l$	$f(x) = 2x$	$f(x) = x$
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$g(x) = -x$	$g(x) = -x$	$g(x) = -2x$
$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) + g(x) \right] =$	$0 + l$	$+\infty$	$-\infty$

É IMPOSSIBILE STABILIRE UNA REGOLA A PRIORI SUL RISULTATO $+\infty - \infty$, PERCIÓ SARÀ NECESSARIO CONSIDERARE SEPARATAMENTE OGNI CASO ($-\infty + \infty$ É UNA FORMA INDETERMINATA)

PRODOTTO

CONSIDERIAMO ANCORA LE FUNZIONI f E g, DIREMO QUINDI CHE:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \alpha \cdot \beta$$

ESCLUDIAMO DA QUESTA DEFINIZIONE LE FORME INDETERMINATE $0 \cdot (+\infty)$ E $0 \cdot (-\infty)$

QUOZIENTE

ALLO STESSO MODO DEFINIAMO IL LIMITE DEL QUOZIENTE TRA f E g COSÍ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ESCLUDIAMO ANCHE QUI ALCUNE FORME CHE LASCIAMO INDETERMINATE: $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{0}$.

OPERAZIONI IN $\overline{\mathbb{R}}$

DEFINIAMO ORA ALCUNE OPERAZIONI IN $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$ CHE POSSONO RISULTARE UTILISSIME NEL CALCOLO DEI LIMITI:

$+\infty + C = C + \infty \quad := +\infty$

$+\infty + \infty \quad := +\infty$

$(+\infty) \cdot (-\infty) \quad := -\infty$

$(+\infty) \cdot (+\infty) \quad := +\infty$

$(+\infty) \cdot C \quad := +\infty \quad$ SE $C > 0$

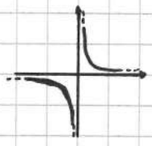
$(+\infty) \cdot C \quad := -\infty \quad$ SE $C < 0$

$\frac{C}{\pm\infty} \quad := 0$

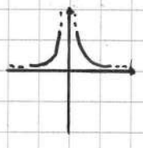
IL CASO $\frac{1}{0}$

CONSIDERIAMO LE FUNZIONI $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{|x|}$ E $\frac{1}{-|x|}$ ED IL LORO LIMITE PER X TENDENTE A 0:

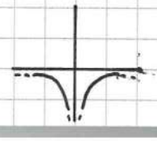
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$ ∄



$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{0} = +\infty$



$\lim_{x \to 0} \frac{1}{-|x|} = \frac{1}{0} = -\infty$



NOTIAMO CHE A SECONDA DEL CASO SPECIFICO IL LIMITE PUÒ VARIARE, O ADDIRITTURA NON ESISTERE.

IL RISULTATO DIPENDERÁ INFATTI DA COME LA FUNZIONE TENDE A 0 (AL DENOMINATORE):

- SE ASSUME VALORI POSITIVI IN TUTTO UN INTORNO DI X_0 ALLORA IL LIMITE É $+\infty$
- SE ASSUME VALORI NEGATIVI IN TUTTO UN INTORNO DI X_0 ALLORA IL LIMITE É $-\infty$
- SE LA FUNZIONE ASSUME SIA VALORI NEGATIVI CHE POSITIVI IN OGNI INTORNO DI X_0 ALLORA IL LIMITE NON ESISTE

ESEMPI:

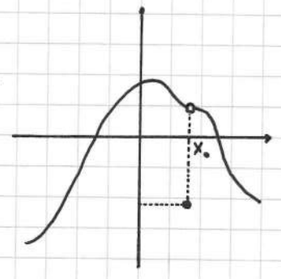
$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 1}{|1+x|}$ NOTIAMO CHE $|1+x| > 0 \ \forall x \neq -1$ E QUINDI IL LIMITE SARÁ $+\infty$

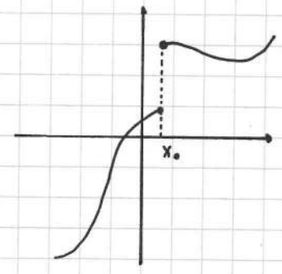
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|1-x^2|-1}$ NOTIAMO CHE $|1-x^2|$ É MINORE DI 1, PERCIÓ $|1-x^2|-1 < 0$ E QUINDI IL LIMITE SARA $-\infty$

FUNZIONI CONTINUE

CHIEDIAMOCI COME FACCIAMO A DEFINIRE IN FORMULE IL FATTO CHE NON STACCHIAMO LA PENNA DAL FOGLIO PER DISEGNARE IL GRAFICO DI FUNZIONE DI $f(x)$.

ANZITUTTO IDENTIFICHIAMO DEI CASI IN CUI NON É POSSIBILE FARLO, IN MODO TALE DA STABILIRE ALCUNE REGOLE CHE ESCLUDANO QUESTI CASI.





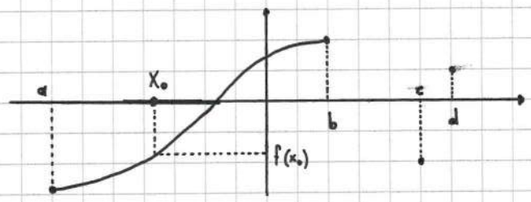
IN UN PRIMO MOMENTO POTREMMO NOTARE E SUPPORRE CHE PERCHÉ UNA FUNZIONE SIA TRACCIABILE CON UNA LINEA CONTINUA DEBBA ESISTERE IL LIMITE PER OGNI X APPARTENENTE AL DOMINIO DI f. QUESTO VINCOLO PERÓ NON ESCLUDEREBBE I GRAFICI DEL TYPO $\frac{1}{x}$, IN CUI IL LIMITE ESISTE.

Vittorio Alzetta

SIANO QUINDI $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ E $x_0 \in D$ DIREMO CHE f É CONTINUA IN x_0 SE SI VERIFICA UNA DELLE SEGUENTI SITUAZIONI:

- x_0 É UN PUNTO ISOLATO
- x_0 É UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI D E $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

É UTILE, AL FINE DI COMPRENDERE LA DEFINIZIONE, VISUALIZZARE UN ESEMPIO CON UN GRAFICO:



LA PRESENZA DEL PRIMO PUNTO NELLA DEFINIZIONE SI RENDE NECESSARIA DAL MOMENTO CHE LA SECONDA NON INCLUDEREBBE I PUNTI ISOLATI.

DIREMO INOLTRE CHE f É CONTINUA IN UN INSIEME $C \subseteq D$ SE SARÁ CONTINUA IN OGNI PUNTO DI C

ESEMPI DI FUNZIONI CONTINUE

SONO FUNZIONI CONTINUE IL PRODOTTO, LA SOMMA E IL QUOZIENTE DI FUNZIONI CONTINUE (PER IL TEOREMA SUL LIMITE DI SOMMA PRODOTTO E QUOZIENTE). LO SONO ANCHE LE FUNZIONI ELEMENTARI E LE LORO INVERSE (IDENTITÀ, MODULO, ESPONENZIALE, LOGARITMO, COSENO...).

ESEMPIO:

$$S: \begin{cases} +1 & \text{SE } x \geq 0 \\ -1 & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$ É CONTINUA NEL DOMINIO $\setminus \{0\}$ POICHÉ PER $x_0 = 0$ IL LIMITE NON ESISTE

$$SGN: \begin{cases} +1 & \text{SE } x > 0 \\ -1 & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$ É CONTINUA NEL SUO DOMINIO (VALE

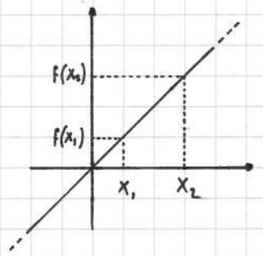
FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Vittorio Alzetta

SIA $f: A \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CON $A \subseteq \mathbb{R}$, DIREMO CHE TALE FUNZIONE É LIPSCHITZIANA SE ESISTE UNA COSTANTE $M \geq 0$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

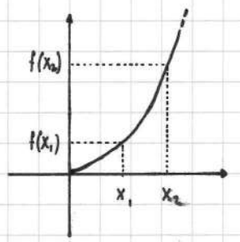
PER COMPRENDERE MEGLIO LA DEFINIZIONE CONVIENE FARE QUALCHE ESEMPIO:



CONSIDERIAMO IL GRAFICO DI $f(x) = x$

$$|x_1 - x_2| \leq M |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

IN QUESTO CASO ANDREBBE BENE UN QUALSIASI $M \geq 1$



CONSIDERIAMO ORA IL GRAFICO DI $f(x) = x^2$

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq M |x_1 - x_2| \Rightarrow |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

$$|x_1 - x_2||x_1 + x_2| \leq M |x_1 - x_2| \Rightarrow M > |x_1 + x_2| \text{ IMPOSSIBILE!}$$

LE FUNZIONI LIPSCHITZIANE SONO CONTINUE, INFATTI VALE:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \delta \ \forall |x - x_0| < \varepsilon$
2. $|f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0| < M \cdot \varepsilon \Rightarrow \delta = M \cdot \varepsilon$

CONTINUITÁ DEL SENO

ANZITUTTO OSSERVIAMO CHE VALE LA SEGUENTE DISUGUAGLIANZA: $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ [1] QUESTO $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

CI CHIEDIAMO SE IL SENO SIA O MENO UNA FUNZIONE LIPSCHITZIANA, DOBBIAMO TROVARE M:

$$\exists M \geq 0 : |\sin x - \sin y| = \left|2 \sin \tfrac{x-y}{2} \cos \tfrac{x+y}{2}\right| \leq 2 \left|\sin \tfrac{x-y}{2}\right| \leq |x - y| \quad \square$$

$\forall M \geq 1$; É $\leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, LIBERAMENTE ; PER LA [1]

LIMITE FONDAMENTALE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ANZITUTTO ESAMINIAMO LA FORMA INDETERMINATA IN CUI CI TROVIAMO:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \Rightarrow \left[\frac{0}{0}\right]$$

POTREBBE RISULTARE UTILE IN QUESTO CASO SFRUTTARE DI NUOVO LA [1], IN QUESTO MODO:

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

SEMPLIFICANDO POSSIAMO CONCLUDERE CHE:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

MA SAPPIAMO CHE PER $x \to 0$ IL COSENO DI X TENDE A 1, PERCIÓ $\frac{\sin x}{x}$ TENDERÁ A 1.

DISUGUAGLIANZE

Vittorio Alzetta

QUI UNA BREVE PARENTESI, SLEGATA DAI LIMITI, SULLE DISUGUAGLIANZE E SUI PROBLEMI CHE ESSE SONO IN GRADO DI NISOLVERE.

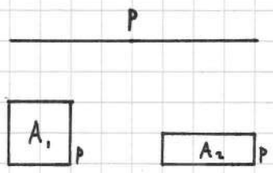
ANCHE SE POTREBBERO PASSARE PER SINONIMI, UGUAGLIANZE ED EQUAZIONI NON SONO LA STESSA COSA. LE UGUAGLIANZE SONO DELLE PROPOSIZIONI (VERE O FALSE) MENTRE LE EQUAZIONI SONO DEI PROBLEMI CHE NECESSITANO DI SOLUZIONI. LE COSE NON CAMBIANO PER DISUGUAGLIANZA E DISEQUAZIONE.

ESEMPIO: CONSIDERIAMO LA DISUGUAGLIANZA $(a-b)^2 \geq 0 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ DOVE L'UGUAGLIANZA SUSSISTE SOLO SE $a = b$.

CONSIDERIAMONE ANCHE UNA SECONDA, UTILE ALLO STESSO MODO (L'UGUAGLIANZA VALE PER $a=b$)

$$2ab \leq a^2 + b^2 \qquad \forall a,b \in \mathbb{R} \qquad [1]$$

PROBLEMA: TRA TUTTI I RETTANGOLI DI FISSATO PERIMETRO P, TROVARE QUELLO DI AREA MAGGIORE:



CON LO STESSO PERIMETRO P SI POSSONO CREARE INFINITI RETTANGOLI DI PERIMETRO P COSTANTE E AREA A VARIABILE, COME IN QUESTO CASO A_1 E A_2

PROVIAMO A RISOLVERE IL PROBLEMA ESPRIMENDO P IN FUNZIONE DI A:

$$P = 2(a+b) \qquad A = a \cdot b \qquad P^2 = 4\left(a^2+b^2+2ab\right) = 4\left(a^2+b^2+2A\right)$$

PER LA [1] RICAVIAMO:

$$P^2 = 4\left(a^2+b^2+2A\right) \geq 4\left(2A+2A\right) = 16A \quad \Rightarrow \quad \frac{P^2}{16} \geq A$$

PERCIÓ É FACILE VEDERE CHE AVREMO AREA MASSIMA QUANDO SUSSISTERÁ L'UGUAGLIANZA, OVVERO QUANDO $a = b$, E LA FIGURA CHE AVREMO OTTENUTO SARÁ UN QUADRATO.

MEDIE

SENZA DARNE UNA DEFINIZIONE FORMALE POSSIAMO DIRE CHE UNA MEDIA É UN VALORE COMPRESO TRA DUE ESTREMI a e b.

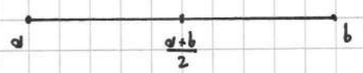
NE ESISTONO VARI TIPI, TRA I PIÚ COMUNI E UTILI TROVIAMO:

MEDIA ARITMETICA

LA MEDIA ARITMETICA É TRA DUE NUMERI a E b É COSÍ DEFINITA:

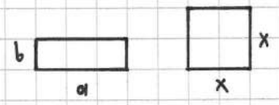
$$\frac{a+b}{2}$$

ESSA RISOLVE UN PROBLEMA ARITMETICO, CIOÉ INDIVIDUA IL PUNTO MEDIO RISPETTO A DUE DATI:



MEDIA GEOMETRICA

LA MEDIA GEOMETRICA RISOLVE UN PROBLEMA GEOMETRICO, NELLO SPECIFICO PERMETTE DI RICAVARE IL LATO DI UN QUADRATO CON AREA PARI A QUELLA DI UN RETTANGOLO DI DIMENSIONI a E b:



$X = \sqrt{a \cdot b}$ = MEDIA GEOMETRICA TRA a E b

MEDIA ARMONICA

QUESTA MEDIA É LEGATA ALLA MUSICA ED É COSÍ DEFINITA:

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

IMMAGINIAMO DI PIZZICARE UNA CORDA, ESSA VIBRERÁ CON UNA FREQUENZA W INVERSAMENTE PROPORZIONALE ALLA LUNGHEZZA, CON L'AGGIUNTA DI UNA COSTANTE (CORDA PIÚ O MENO SPESSA...)

$$W = \alpha \cdot \frac{1}{l}$$

EBBENE IMMAGINIAMO ORA DI EFFETTUARE DEGLI ESPERIMENTI, PIZZICHERANNO LA CORDA MODIFICANDONE LA LUNGHEZZA COME RIPORTATO NELLA TABELLA QUI SOTTO:

LUNGHEZZA	FREQUENZA	NOTA
l	W	DO FONDAMENTALE
$l/2$	$2W$	DO (ALL'OTTAVA)
M. ARMONICA $(l, l/2)$	$\frac{3}{2}W$	SOL (QUINTA)
M. ARMONICA $(\frac{1}{3}l, l)$	$\frac{5}{4}W$	MI (TERZA)

SOVRAPPONENDO LE TRE FREQUENZE: W, $\frac{3}{2}W$, $\frac{5}{4}W$ (DO, MI, SOL) SI COMPONE L'ACCORDO PERFETTO DI DO MAGGIORE, NELLA SCALA NATURALE.

Vittorio Alzetta

ALTRI LIMITI (FORME INDETERMINATE)

LIMITI FONDAMENTALI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

IN QUESTO CASO SVILUPPIAMO LA TANGENTE E SFRUTTIAMO IL LIMITE NOTEVOLE GIÀ INTRODOTTO:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{(QUESTO PERCHÉ IL COSENO È CONTINUO)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}$$

TEOREMA DEL CONFRONTO (O DEI CARABINIERI)

SIANO f, g, h FUNZIONI DA A IN $\mathbb{R}$, SIA $x_0 \in A'$ ED ESISTA UN INTORNO U DI x_0 TALE CHE:

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x \in A \cap U, \text{ CON } x \neq x_0$$

ALLORA AVREMO:

1. SE ESISTONO I 3 LIMITI DELLE FUNZIONI PER $x \to x_0$ SI AVRÀ:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x) \le \lim_{x\to x_0} h(x)$$

2. $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

3. $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = +\infty$

4. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = l$

LIMITE DI UNA FUNZIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA

Vittorio Alzetta

SIANO f E g DUE FUNZIONI DEFINITE IN UN INTORNO DI $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, CON L'ECCEZIONE AL MASSIMO DEL PUNTO x_0, SE:

- f È INFINITESIMA PER $x \to x_0$, CIOÈ $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$
- g È LIMITATA (CIOÈ IL DOMINIO HA MAGGIORANTI E MINORANTI)

ALLORA VARRÀ:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0 \quad [1]$$

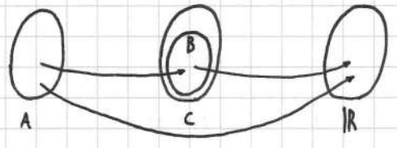
DIM: $0 \le |f(x) \cdot g(x)|$ E POICHÉ g È LIMITATA POSSIAMO SCRIVERE:

$$0 \le |f(x) \cdot g(x)| \le M \cdot |f(x)| = 0$$

ALLORA PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO SI OTTIENE LA [1], CIOÈ LA TESI.

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE

CONSIDERIAMO LE FUNZIONI $g: A \to B$ E $f: C \to \mathbb{R}$, CON A, B E C SOTTOINSIEMI NON VUOTI DI $\mathbb{R}$ TALI CHE $B \subseteq C$. CONSIDERIAMO QUINDI LA FUNZIONE COMPOSTA $g \circ f$:



SUPPONIAMO INOLTRE CHE VALGANO:

- $x_0 \in A'$ IN $\overline{\mathbb{R}}$
- $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0 \in C'$ IN $\overline{\mathbb{R}}$
- ESISTA $\lim_{y\to y_0} f(y)$

CI CHIEDIAMO QUINDI SE VALE:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$

TUTTAVIA QUESTA EQUAZIONE PRESENTA DELLE CRITICITÀ, INFATTI NEL CASO IN CUI $g(x)$ È COSTANTE $(g(x)=y_0)$ E $f(x)$ NON È CONTINUA AVREMO:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(y_0) = y_0 \quad \wedge \quad \lim_{y\to y_0} f(y) \neq y_0 \ (\text{NON È CONTINUA})$$

DUNQUE SI RENDE NECESSARIA L'AGGIUNTA DI NUOVE IPOTESI PER EVITARE CHE CIÒ ACCADA, ASSUMEREMO CHE f ~~e~~ g SIANO ~~ENTRAMBE~~ CONTINUA E g NON SIA COSTANTE (OVVERO BIIETTIVA, BASTEREBBE INIETTIVA)

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to g(x_0)} f(y) = f(g(x_0))$$

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE IL LIMITE PER $x\to x_0$ DELLA FUNZIONE $h(x)$:

$$\lim_{x\to x_0} h(x) \quad [2]$$

CHIAMIAMO g UNA FUNZIONE INVERTIBILE IN UN INTORNO DI X_0, ALLORA, LA [2] DIVENTERÀ:

$$\lim_{x\to x_0} h\left(g^{-1}(g(x))\right)$$

SE POI ESISTE IL LIMITE $y_0 := \lim_{x\to x_0} g(x)$ ALLORA, PER IL TEOREMA SUL LIMITE DI FUNZIONI COMPOSTE POSSIAMO SCRIVERE:

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{y\to y_0} h\left(g^{-1}(y)\right)$$

ESEMPIO:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y} = \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1$$

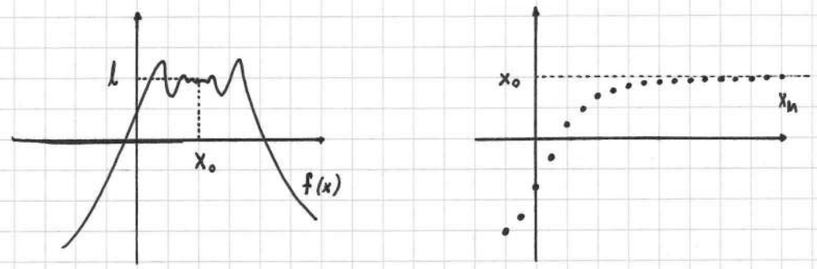
TEOREMA SUL LIMITE DI FUNZIONI MEDIANTE SUCCESSIONI

Vittorio Alzetta

SIANO $f: A\to\mathbb{R}$ CON $A\subseteq\mathbb{R}$ E x_0 UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A IN $\overline{\mathbb{R}}$. AVREMO:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

SE E SOLO SE PER OGNI SUCCESSIONE x_n DI PUNTI DI $A\setminus\{x_0\}$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ SI HA $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. PER FISSARE MEGLIO LE IDEE FACCIO UN ESEMPIO:



È INTUITIVO PENSARE CHE SE $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ALLORA $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = l$

Dim:

Hp: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0 : 0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \iff \forall \sigma>0\ \exists n_\sigma \in \mathbb{N} : \forall n>n_\sigma : |x_n - x_0|<\sigma$

Th: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall n>n_\varepsilon : |f(x_n)-l|<\varepsilon$

L'IPOTESI 1 VALE PER OGNI $\sigma>0$, OVVIAMENTE È POSSIBILE PRENDERE $\sigma=\delta_\varepsilon$, LA 2 DIVENTERÀ QUINDI:

$$\forall \delta_\varepsilon>0\ \exists n_{\delta_\varepsilon}\in\mathbb{N} : \forall n>n_{\delta_\varepsilon} : |x_n - x_0|<\delta_\varepsilon$$

LA 1 CI DICE INVECE CHE QUANDO LA DISTANZA DI x DA x_0 È MINORE DI δ_ε ALLORA LA DISTANZA DI $f(x)$ DA l È MINORE DI ε, PERCIÒ:

$$\forall \delta_\varepsilon>0\ \exists n_{\delta_\varepsilon}\in\mathbb{N} : \forall n>n_{\delta_\varepsilon} : |f(x_n)-l|<\varepsilon$$

È SUFFICIENTE DEFINIRE $n_\varepsilon := n_{\delta_\varepsilon}$ PER OTTENERE LA TESI

(⇐) SUPPONIAMO CHE VALGANO LE IPOTESI:

$$X_n \in A \setminus \{x_0\}, \quad x_n \to x_0 \quad \Rightarrow f(x_n) \to l$$

E CHE, PER ASSURDO LA TESI SIA FALSA:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall\, 0 < |x - x_0| < \delta, \ x \in A$$

A QUESTO PUNTO DOBBIAMO NEGARE TALE PROPOSIZIONE

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_\delta \in A, \ 0 < |x_\delta - x_0| < \delta : |f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon$$

PRENDIAMO $\delta = n$, POSSIAMO FARLO, VALE PER OGNI δ:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n > 0 : \exists x_n \in A, \ 0 < |x_n - x_0| < n : |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$$

COSÍ NON FUNZIONA, PERCHÉ NON ABBIAMO DIMOSTRATO L'ESISTENZA UNA SUCCESSIONE CON PROPRIETÁ CONTRADDITTORIE RISPETTO ALLE IPOTESI. TUTTAVIA POSSIAMO PRENDERE ε IN MODO TALE CHE IL VALORE SCELTO DIVENTI SEMPRE PIÚ PICCOLO, OVVERO $\delta = 1/n$:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \tfrac{1}{n} > 0 : \exists x_n \in A, \ 0 < |x_n - x_0| < \tfrac{1}{n} : |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$$

(x_n: DIPENDE COMUNQUE DA n)

CIÓ CHE ABBIAMO APPENA MOSTRATO É IN CONTRADDIZIONE CON LE IPOTESI, INFATTI $x_n \to x_0$ MA $f(x_n) \not\to l$.

SUCCESSIONI E SOTTOSUCCESSIONI

Vittorio Alzetta

CONSIDERIAMO UNA SUCCESSIONE (a_n), POSSIAMO DECIDERE DI CONSERVARNE ALCUNI VALORI E DI SCARTARNE ALTRI:

a_n : a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 ... a_n ...

/ a_2 / a_4 / a_6 / ... a_{2k} ...

a_1 / a_3 / a_5 / a_7 ... a_{2k+1} ...

POSSIAMO VEDERE a_{2k} E a_{2k+1} COME DUE SUCCESSIONI CHE HANNO UN'ULTERIORE SUCCESSIONE COME INDICE, IN QUESTO CASO:

$b_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto 2k$ $\qquad$ $b_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto 2k+1$

POTREBBE VERIFICARSI IL CASO IN CUI LA SUCCESSIONE ALL'INDICE RIPETA ALCUNI VALORI (ES. $1 \mapsto n_1 = 2$, $2 \mapsto n_2 = 3$, $3 \mapsto n_3 = 2$), IN TAL CASO NON CHIAMEREMO a_{n_k} SOTTOSUCCESSIONE, DI CUI INVECE DIAMO LA SEGUENTE DEFINIZIONE:

SIA (a_n) UNA SUCCESSIONE E SIA (n_k) UNA SUCCESSIONE STRETTAMENTE CRESCENTE DI NUMERI NATURALI. CHIAMEREMO SOTTOSUCCESSIONE DI (a_n) LA SUCCESSIONE:

$$a_{n_k} := (a_n) \circ (n_k)$$

INFATTI POSSIAMO VEDERLA ANCHE IN QUEST'ALTRO MODO:

$\mathbb{N} \xrightarrow{(n_k)} \mathbb{N} \xrightarrow{(a_n)} \mathbb{R}$ $\qquad$ $k \longmapsto n_k \longmapsto a_{n_k}$

LA COMPOSIZIONE DI QUESTE DUE SUCCESSIONI CI DÁ UNA SOTTOSUCCESSIONE

Vittorio Alzetta

TEOREMA

SIANO $l = \overline{\mathbb{R}}$ E (a_n) UNA SUCCESSIONE, LE SEGUENTI PROPOSIZIONI SONO EQUIVALENTI:

- $a_n \to l$
- OGNI SOTTOSUCCESSIONE (a_{n_k}) DI (a_n) TENDE A l

dim: ② ⇒ ①

OVVIO, SE OGNI SOTTOSUCCESSIONE TENDE A l ALLORA ANCHE a_n TENDE A l (É SOTTOSUCCESSIONE DI SE STESSA)

① ⇒ ②

H_p: $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon : |a_K - l| < \varepsilon \ \forall K > K_\varepsilon$ → ABBIAMO CAMBIATO n CON K PER RAGIONARE MEGLIO

T_h: $\lim_{K\to\infty} a_{n_K} = l \in \mathbb{R}$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon : |a_{n_K} - l| < \varepsilon \ \forall K > K_\varepsilon$

SICCOME n_K É CRESCENTE AVREMO CHE VARRÀ LA SEGUENTE DISUGUAGLIANZA:

$$n_K \geq K > K_\varepsilon$$

DUNQUE VARRÀ ANCHE LA SEGUENTE CATENA DI IMPLICAZIONI:

$$n_K > K_\varepsilon \Rightarrow K > K_\varepsilon \Rightarrow |a_{n_K} - l| < \varepsilon$$

PER IPOTESI SAPPIAMO CHE $K > K_\varepsilon \Rightarrow |a_K - l| < \varepsilon$, IL NOSTRO OBIETTIVO È DIMOSTRARE CHE $|a_{n_K} - l| < \varepsilon$ É IMPLICATO DA $K > K_\varepsilon$. DUNQUE AVENDO MOSTRATO CHE $n_K > K_\varepsilon$ POSSIAMO SOSTITUIRE NELLE IPOTESI a_{n_K} AL POSTO DI a_n E n_K AL POSTO DI K. INFINE EFFETTUANDO UNA SOSTITUZIONE $n_K > K_\varepsilon$ DIVENTA $K > K_\varepsilon$ (POICHÉ $n_K > K$) OTTENIAMO LA TESI.

ESERCIZIO FONDAMENTALE

CONSIDERIAMO IL LIMITE $\lim_{n\to\infty} \alpha^n$ CON $\alpha \in \mathbb{R}$. SARÀ NECESSARIO SUDDIVIDERE IL PROBLEMA IN CASI, NELLA RISOLUZIONE SARÀ UTILE SFRUTTARE IL TEOREMA APPENA DIMOSTRATO.

CASO $\alpha = 0$

PER DEFINIZIONE AVREMO CHE $\lim_{n\to\infty} 0^n = 0$

CASO $\alpha = 1$

PER DEFINIZIONE AVREMO CHE $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

CASO $\alpha > 1$

POICHÉ α É MAGGIORE DI 1 POSSIAMO SCRIVERLO COME $1 + d$, CON $d > 0$. SI AVRÀ:

$$\lim_{n\to\infty} (1+d)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} d^k = \lim_{n\to\infty} (1 + nd + \dots)$$

BASTA SVILUPPARE I PRIMI DUE TERMINI PER CAPIRE CHE IL LIMITE TENDE A $+\infty$

CASO $0 < \alpha < 1$

POICHÉ α É COMPRESO FRA 0 E 1 POSSIAMO OSSERVARE CHE $\frac{1}{\alpha}$ SARÀ MAGGIORE DI 1 E QUINDI $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = +\infty$. OSSERVATO CIÓ SCRIVIAMO:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n} = 0$$

CASO $\alpha < 0$

SE $\alpha < 0$ ALLORA $|\alpha| > 0$ E QUINDI POSSIAMO STUDIARE IL LIMITE $\lim_{n\to\infty} (-|\alpha|)^n =$

$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n |\alpha|^n$. NEL CASO IN CUI $|\alpha|^n$ SIA INFINITESIMA (CIOÉ PER $-1 < \alpha < 0$) AVREMO IL PRODOTTO DI UNA FUNZIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA, PERCIÓ IL LIMITE TENDERÀ A 0.

NEL CASO IN CUI α SIA MINORE DI -1, ~~O UGUALE~~, AVREMO:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n |\alpha|^n \quad \text{CON} \quad \alpha < -1$$

EBBENE CONSIDERIAMO ORA DUE SOTTOSUCCESSIONI b_{2k} E b_{2k+1}:

$$b_n = (-1)^n |\alpha|^n \begin{cases} b_{2k} = (|\alpha|^2)^k \to +\infty \\ b_{2k+1} = -(|\alpha|^2)^k \to -\infty \end{cases}$$

POICHÉ I LIMITI SONO DIVERSI ALLORA b_n NON HA LIMITE PER $n \to +\infty$. RIMANE L'ULTIMO CASO PER $\alpha = -1$, MA POSSIAMO FACILMENTE OSSERVARE CHE SOSTITUENDO -1 IN b_{2k} E b_{2k+1} OTTENIAMO COMUNQUE DUE SUCCESSIONI CON LIMITI DIVERSI $(-1$ E $1)$, ARRIVANDO ALLE STESSE CONCLUSIONI.

IN SINTESI...

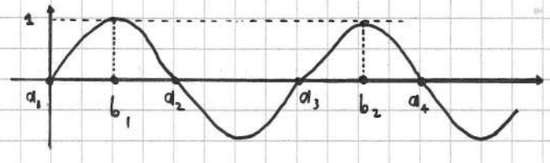
$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & -1 < \alpha < 1 \\ \nexists & \alpha \le -1 \end{cases}$$

ESERCIZIO:

CONSIDERIAMO IL LIMITE PER $x \to +\infty$ DELLA FUNZIONE $\sin x$, DEVE VALERE (PER IL TEOREMA SUL LIMITE DI FUNZIONI MEDIANTE SUCCESSIONI) CHE SE IL LIMITE ESISTE ALLORA:

$$\lim_{x\to\infty} \sin x = l \iff \lim_{n\to\infty} \sin x_n = l \quad \forall x_n \to \infty$$

TUTTAVIA POSSIAMO FACILMENTE NOTARE COME PRESA LA SUCCESSIONE $a_k = k\pi$ E $b_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ SIANO UNA TENDENTE A 1 E L'ALTRA A 0. SI PUÓ QUINDI CONCLUDERE CHE IL LIMITE DELLA FUNZIONE $\sin x$ PER $x \to \infty$ NON ESISTA.



ESERCIZIO:

Vittorio Alzetta

DIVERSO È IL CASO DELLA SUCCESSIONE $(a_n) = \sin n$, DOVE É PIÚ COMPLICATO IDENTIFICARE UNA SUCCESSIONE IN CON LIMITE DIVERSO DA UN'ALTRA. POSSIAMO TUTTAVIA PROCEDERE PER ASSURDO IN QUESTO MODO:

$$\lim_{n\to\infty} \sin n = l \in \mathbb{R}$$

ORA CONSIDERIAMO LE DUE $\forall$ UGUAGLIANZE TRIGONOMETRICHE SEGUENTI (PER AIUTARCI NELLA RISOLUZIONE):

$$\cos n = \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2 \sin 1}$$

NOTATO CHE $\sin(n+1)$ E $\sin(n-1)$ SONO SOTTOSUCCESSIONI DI $\sin n$ (PER IL TEOREMA SULLE SUCCESSIONI E SOTTOSUCCESSIONI) POSSIAMO CONCLUDERE CHE:

$$\lim_{n\to\infty} \cos n = \frac{l - l}{2 \sin 1} = 0$$

ALLO STESSO MODO POSSIAMO PORRE UGUALE A $\dagger$ IL LIMITE DEL $\cos n$ PER $n \to \infty$, USANDO UN'ALTRA UGUAGLIANZA TRIGONOMETRICA ARRIVEREMO A CONCLUSIONI SIMILI:

$$\sin n = \frac{\cos(n+1) - \cos(n-1)}{-2 \sin 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin n = \frac{\dagger - \dagger}{-2 \sin 1} = 0$$

CIÓ VORREBBE DIRE CHE:

$$\lim_{n\to\infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = 0$$

IL CHE É FALSO, IN QUANTO $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. GIUNTI ALLA CONTRADDIZIONE POSSIAMO AFFERMARE CHE IL LIMITE DI $\sin n$ PER $n \to \infty$ NON ESISTE.

Vittorio Alzetta

SUCCESSIONI DEFINITE PER INDUZIONE

PER DEFINIRE UNA SUCCESSIONE PER INDUZIONE POSSIAMO STABILIRNE UN VALORE BASE E PERMETTERE DI RICAVARE GLI ALTRI IN MANIERA INDUTTIVA:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

AD ESEMPIO POTREMMO DEFINIRE UNA SUCCESSIONE PER INDUZIONE EQUIVALENTE AL FATTORIALE:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = a_n \cdot (n+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot (n+1) \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO:</u> PROVIAMO ORA A CALCOLARE IL LIMITE DI UNA FUNZIONE DEFINITA PER INDUZIONE:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

PER PRIMA COSA PROVIAMO A SCRIVERE I PRIMI TERMINI DI QUESTA SUCCESSIONE, PER COMPRENDERNE MEGLIO LA STRUTTURA:

$$a_{\not 0 1} = 0 \quad a_2 = \sqrt{2} \quad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \quad a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad \dots$$

NOTIAMO CHE LA ~~FUNZIO~~ SUCCESSIONE È DEFINITA SE E SOLO SE $(2+a_n) \geq 0$, IN QUANTO SOTTO UNA RADICE A INDICE PARI. PER DIMOSTRARE CHE LA DISEGUAZIONE È VERIFICATA PER OGNI a_n PROCEDEREMO PER INDUZIONE, DUNQUE INDIVIDUEREMO PRIMA UN PASSO BASE E POI DIMOSTREREMO IL PASSO INDUTTIVO:

Th: $a_n + 2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a_1: $0 + 2 \geq 0$ (PASSO BASE)

$a_n \geq -2 \Rightarrow a_{n+1} \geq -2$ (PASSO INDUTTIVO)

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geq \sqrt{2-2} = 0 \geq -2$ □

A QUESTO PUNTO CONGETTURIAMO LA CRESCENZA DELLA SUCCESSIONE (DAL MOMENTO CHE AGGIUNGIAMO CONTINUAMENTE TERMINI POSITIVI). SE FOSSE VERAMENTE CRESCENTE CIÓ IMPLICHEREBBE CHE IL LIMITE SIA COMPRESO IN $[0, +\infty]$. DIMOSTRIAMOLO:

$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (CONDIZIONE DI CRESCENZA)

$\sqrt{2+a_n} \geq a_n$ ANZICHÉ RISOLVERE LA DISEGUAZIONE DIMOSTRIAMOLO PER INDUZIONE

$a_2 \geq a_1$ (PASSO BASE)

$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}$ (PASSO INDUTTIVO)

$a_{n+2} = \sqrt{2+a_{n+1}} \geq \sqrt{2+a_n} = a_{n+1}$ □

ORA CHE SAPPIAMO CHE È CRESCENTE SCRIVIAMO (DAL MOMENTO CHE IL LIMITE ESISTE):

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{2+a_n} \\ \downarrow n\to\infty & & n\to\infty \downarrow \\ l & = & \sqrt{2+l} \end{array} \rightarrow l \text{ PERCHÉ IL LIMITE È UNICO PER TUTTE LE SOTTOSUCC.}$$

IL LIMITE DOVRÁ PER FORZA SODDISFARE QUESTA EQUAZIONE, RISOLVIAMOLA:

$$l^2 = 2 + l \qquad l_{1/2} = 2, -1$$

TUTTAVIA ANCHE $+\infty$ RISOLVE L'EQUAZIONE ED È INCLUSO IN $[0, +\infty]$, PERCIÓ LE POSSIBILI SOLUZIONI SONO:

$$-1 \;,\; 2 \;,\; +\infty$$

LA PRIMA (-1) VIENE SCARTATA PERCHÉ $l \geq 0$, <u>LA SECONDA È CORRETTA</u> COME DIMOSTREREMÓ:

SE $l = 2$ ALLORA $a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (CRESCENTE)

<u>dim:</u> $a_1 \leq 2$ (PASSO BASE)

$a_n \leq 2 \Rightarrow a_{n+1} \leq 2$ (PASSO INDUTTIVO)

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$ QUINDI $a_{n+1} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ □

Vittorio Alzetta

ESERCIZIO:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha + 2 \\ a_{n+1} = \left(a_n - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{1}{n+1} \end{cases}, \quad \text{CON } \alpha \geq 0$$

ANZITUTTO PROVIAMO A SCRIVERE QUALCHE TERMINE DELLA SUCCESSIONE:

$$a_1 = \alpha + 2$$
$$a_2 = (\alpha+1)^2 + \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \left((\alpha+1)^2\right)^3 + \frac{1}{3}$$
$$a_4 = \left(((\alpha+1)^2)^3\right)^4 + \frac{1}{4}$$

SI INTUISCE CHE L'N-ESIMO TERMINE DELLA SUCCESSIONE SARÀ DELLA FORMA SEGUENTE:

$$a_n = (\alpha+1)^{n!} + \frac{1}{n}$$

PERCIÓ POSSIAMO CALCOLARNE DIRETTAMENTE IL LIMITE PER $n \to \infty$ IN QUESTO MODO:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[(\alpha+1)^{n!} + \frac{1}{n}\right]$$

NEL CASO IN CUI α SIA 0 AVREMO LIMITE PARI A 1, NEL CASO IN CUI α SIA > 0 AVREMO (DAL MOMENTO CHE NON ABBIAMO DEFINITO $\alpha^{\infty!}$ PROCEDIAMO PER CONFRONTO):

$$n! \geq n \iff (\alpha+1)^{n!} \geq (\alpha+1)^n \to \infty$$

LIMITI DI SUCCESSIONI

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

PER PER RISOLVERE IL LIMITE SARÀ UTILE PROCEDERE PER CONFRONTO, POSTO $a_n = \sqrt[n]{n}$ DIREMO:

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} \Rightarrow a_n = 1 + b_n, \quad \text{con } b_n \geq 0$$

E QUINDI, ~~MOLTIPLICANDO~~ ELEVANDO ENTRAMBI I MEMBRI ALLA N OTTENIAMO:

$$n = (1+b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k$$
$$= 1 + n b_n + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 + \dots$$
$$\geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE:

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 \qquad b_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$$

PERCIÓ PER $n \to \infty$ b_n, DAL MOMENTO CHE RISULTA MINORE DI 1, TENDERÀ A 0. PER TANTO PER $n \to \infty$ $a_n = 1 + b_n = 1 + 0 = 1$

ESERCIZIO:

$$\frac{\log n}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{n} = \log 1 = 0$$

POSSIAMO DIRE CIÓ PERCHÉ IL LOGARITMO È CONTINUO

DA QUESTO ESERCIZIO NOTIAMO CHE POICHÉ IL RISULTATO È 0 IL DENOMINATORE TENDE A $+\infty$ PIÙ VELOCEMENTE DEL NUMERATORE. È POSSIBILE SCRIVERE QUESTA OSSERVAZIONE CON LA NOTAZIONE O PICCOLO:

$$\log n = o(n)$$

IN GENERALE DIREMO CHE:

$$a_n = o(b_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Vittorio Alzetta

IL NUMERO DI EULERO

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE SUCCESSIONE

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

E
ESSA SI PRESENTA NELLA FORMA INDETERMINATA 1^∞. DI ESSA POSSIAMO DIRE CHE È COMPRESA TRA $[2,3]$, E CHE È STRETTAMENTE CRESCENTE. IL LIMITE ESISTE ED È PARI A:

$$e := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n \in [2,3]$$

LIMITE INFERIORE E SUPERIORE

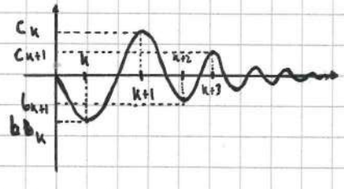
PRESA UNA SUCCESSIONE (a_n) SAPPIAMO CHE ESSA POTREBBE NON AVERE LIMITE, COME NEL CASO $(-1)^n$ O $\sin n$. TUTTAVIA È POSSIBILE DEFINIRE FACILMENTE DELLE SOTTOSUCCESSIONI DOTATE DI LIMITE:

$$b_k := \inf_{n\geq k} a_n \qquad c_k := \sup_{n\geq k} a_n$$

IN SOSTANZA STIAMO DICENDO CHE, FISSATO UN $k \in \mathbb{N}$, E CONSIDERATO L'ESTREMO INFERIORE (O SUPERIORE) DELL'INSIEME FORMATO DAGLI a_n CON $n \geq k$, LA SUCCESSIONE DEFINITA DA QUESTI ESTREMI INFERIORI (O SUPERIORI) È DEBOLMENTE CRESCENTE (O DECRESCENTE). QUEST'ULTIMA OSSERVAZIONE È FACILE DA VERIFICARE SE PENSIAMO (PER ESEMPIO AL CASO b_k, MA PER c_k VALE LO STESSO) CHE L'ESTREMO INFERIORE DI a_n CON $n \geq k+1$ È (NON È PER FORZA) ESTREMO INFERIORE * DI a_n CON $n \geq k$, IN QUANTO a_k POTREBBE ESSERE UN VALORE AN BASSO.

$$b_{k+1} = \inf_{n\geq k+1} a_n \geq \inf_{n\geq k} a_n = b_k$$

$$c_{k+1} = \sup_{n\geq k+1} a_n \leq \sup_{n\geq k} a_n = c_k$$



DEFINIAMO QUINDI IL LIMITE INFERIORE E IL LIMITE SUPERIORE DI (a_n), RISPETTIVAMENTE:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n$$

NE CONSEGUE CHE:

- $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n$
- $\lim$ INF E $\lim$ SUP ESISTONO SEMPRE
- $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$

ESISTENZA DEL LIMITE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = l$$

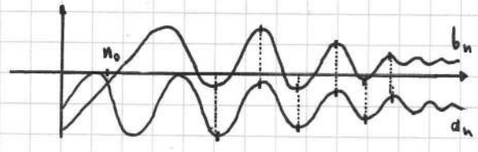
TEOREMA DEL CONFRONTO

SE ESISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE:

$$a_n \leq b_n \quad \forall\, n \geq n_0$$

ALLORA AVREMO CHE:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n \quad \wedge \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$



Vittorio Alzetta

IL CRITERIO DELLA RADICE

SIA (a_n) UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI. VARRÁ CHE:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0$$

dim: SIA $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{n\geq k} \sqrt[n]{|a_n|} = l < 1$

PER DEFINIZIONE DI LIMITE AVREMO CHE:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ l - \varepsilon < \sup_{n\geq k} \sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon \quad \forall k > k_\varepsilon$$

SICCOME TRA TUTTI GLI $n \geq k$ C'É ANCHE k STESSO POSSIAMO RISCRIVERE LA DEFINIZIONE COSÍ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sqrt[k]{|a_n|} < l + \varepsilon \quad \forall k > k_\varepsilon$$

IN CONCLUSIONE POSSIAMO AFFERMARE CHE:

$$0 \leq |a_n| < (l+\varepsilon)^k \quad \forall k > k_\varepsilon$$

E QUINDI, PASSO UN ε SUFFICIENTEMENTE PICCOLO DA RENDERE $l + \varepsilon < 1$ OTTERREMO $(l+\varepsilon)^k \to 0$, E CONSEGUENTEMENTE:

$$0 \leq a_n < 0 \quad \Rightarrow a_n \to 0$$

ESEMPIO:

SIANO $p > 0$ E $a > 1$ E SI ABBIA IL SEGUENTE LIMITE:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^p}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^p}}{a} = \frac{1^p}{a} = \frac{1}{a} < 1$$

ABBIAMO CONSIDERATO $a_n = \frac{n^p}{a^n}$, NE ABBIAMO CALCOLATO LA RADICE n-ESIMA E ABBIAMO NOTATO CHE QUESTA É MINORE DI 1. DUNQUE, PER IL TEOREMA DELLA RADICE $a_n \to 0$, QUINDI:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$$

POSSIAMO AFFERMARE CHE L'ESPONENZIALE A BASE $a > 1$ TENDE A $+\infty$ PIÚ VELOCEMENTE DI QUALSIASI POTENZA, IN SINTESI $n^p = o(a^n)$.

LE SUCCESSIONI DELLE MEDIE

CONSIDERIAMO DI NUOVO LA MEDIA ARITMETICA, GEOMETRICA E ARMONICA:

MEDIA ARITMETICA $\quad \alpha_n := \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$

MEDIA GEOMETRICA $\quad \gamma_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (a_n > 0)$

MEDIA ARMONICA $\quad h_n := \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}} \quad (a_n \neq 0)$

COSA SUCCEDE QUANDO ANDIAMO A CALCOLARE IL LIMITE DI QUESTE MEDIE?

PROVIAMO A CONSIDERARE LA SUCCESSIONE PIÚ SEMPLICE, LA COSTANTE:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{CON} \quad a_n = l$$

CI ASPETTIAMO CHE LE LIMITE DELLE MEDIE TENDANO ALLO STESSO LIMITE DELLE SUCCESSIONI, INFATTI $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{n \cdot l}{n} = l$. IN GENERALE AVREMO:

$$a_n \to l \iff \alpha_n \to l, \ \gamma_n \to l, \ h_n \to l$$

(TEOREMA DI CESARO)

ESEMPIO:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n)}{n} =$$

QUESTO PERCHÉ $\log(n!) \geq \log(n)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log n}{n} \iff \lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$$

É LA MEDIA ARITMETICA DI $a_n = \log n$

Vittorio Alzetta

CRITERIO DEL RAPPORTO

SE $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ALLORA AVREMO CHE:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to l$$

dim: CONSIDERIAMO $b_{n+1} := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ E $a_0 = 1$, AVREMO:

$$\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{a_n}$$

SAPPIAMO CHE FARE IL LIMITE DI b_{n+1} O DI b_n É LA STESSA COSA (UNA LA SOTTOSUCCESSIONE DELL'ALTRA). INOLTRE, CALCOLARE IL LIMITE DI b_n O DELLA SUA MEDIA GEOMETRICA É LA STESSA COSA, QUINDI POICHÉ ESSA É UGUALE A $\sqrt[n]{a_n}$ LA DIMOSTRAZIONE É FINITA.

ALTRI LIMITI RILEVANTI

CONSIDERIAMO IL LIMITE $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ E, PER RISOLVERLO, SFRUTTIAMO IL CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$a_n = \frac{b^n}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} = 0$$

POSSIAMO QUINDI AFFERMARE CHE $n!$ VA ALL'INFINITO PIÚ VELOCEMENTE DI b^n. QUINDI:

$$b^n = o(n!), \quad n^p = o(b^n), \quad n^p = o(n!)$$

CONSIDERIAMO IL LIMITE $\frac{n^n}{n!} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ E, COME FATTO SOPRA SFRUTTIAMO IL CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

DI CONSEGUENZA PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO AVREMO:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e$$

QUINDI, EFFETTUANDO QUALCHE CAMBIAMENTO DI FORMA, POSSIAMO OTTENERE:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

E QUINDI, IN CONCLUSIONE:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

DUNQUE n^n TENDE A $+\infty$ PIÚ VELOCEMENTE DI $n!$, PERMETTENDOCI DI SCRIVERE: $n! = o(n^n)$

LIMITE FONDAMENTALE

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

PER RISOLVERE QUESTO LIMITE DOVREMMO DIMOSTRARE CHE TUTTE LE SOTTOSUCCESSIONI DI $f(x)$ TENDONO A e, MENTRE LO SAPPIAMO SOLO PER $x_n = n$. PER PROCEDERE OCCORRE DEFINIRE UN CONCETTO. EH

DATO $x \in \mathbb{R}$ CHIAMEREMO PARTE INTERNA DI x IL NUMERO COSÍ DEFINITO:

$$[x] := \max\{p \in \mathbb{Z} : p \le x\}$$

CIOÉ, A PAROLE, IL PIÚ GRANDE INTERO MINORE O UGUALE A x.

POSSIAMO OSSERVARE CHE PRESO $x \in \mathbb{R}$ AVREMO: $[x] \le x \le [x] + 1$, DI CONSEGUENZA:

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Vittorio Alzetta

SOSTITUENDO $[x]$ CON n OTTENIAMO:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

PONIAMO a UGUALE AL PRIMO TERMINE E b UGUALE AL TERZO. LA FUNZIONE DI CUI VOGLIAMO CALCOLARE IL LIMITE È COMPRESA FRA 2 SUCCESSIONI, STUDIAMOLE:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = e$$

(IL NUMERATORE È UNA SOTTOSUCCESSIONE DI $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, QUINDI STESSO LIMITE)

QUINDI: $e \leq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq e \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

LIMITE FONDAMENTALE

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\log^{p} x}{x^{\varepsilon}} = 0}$$

SFRUTTIAMO, IN QUESTO CASO, IL ~~LIMITE~~ CAMBIAMENTO DI VARIABILE, PONENDO $x = e^{y}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log^{p} x}{x^{\varepsilon}} \underset{x=e^{y}}{=} \lim_{y\to\infty}\frac{\log^{p} e^{y}}{e^{y\varepsilon}} = \frac{y^{p}}{(e^{\varepsilon})^{y}} = 0$$

(POICHÉ L'ESPONENZIALE TENDE A $+\infty$ PIÙ VELOCE)

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^{\varepsilon}\log^{p} x = 0}$$

ALLO STESSO MODO EFFETTUIAMO UN CAMBIO DI VARIABILE, PONENDO $x = \frac{1}{y}$:

$$\lim_{x\to 0} x^{\varepsilon}\log^{p} x \underset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^{\varepsilon}}\cdot\log^{p}\frac{1}{y} = \lim_{y\to\infty}\frac{(-1)(\log^{p} y)}{y^{\varepsilon}} = 0$$

(LIMITE PRECEDENTE $\cdot(-1)$)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

PER CALCOLARE QUESTO LIMITE SARANNO NECESSARI 2 CAMBIAMENTI DI VARIABILE:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \underset{x=-y}{=} \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)} \underset{y-1=z}{=} \lim_{z\to\infty}\left(\frac{z+1}{z}\right)^{z+1} =$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right) = e\cdot 1 = e$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1}$$

PONIAMO $x = \frac{1}{y}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_{a}(1+x)}{x} \underset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to\infty}\frac{\log_{a}\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to\infty}\log_{a}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \log_{a} e$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \log a}$$

PONIAMO $x = \log(1+y)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} \underset{\text{CAMBIO VARIABILE}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{1+y-1}{\log(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}} = \frac{1}{\log_{a} e} = \frac{1}{\frac{\log e}{\log a}} = \log a$$

Vittorio Alzetta

CARDINALITÁ

QUANDO CONTIAMO GLI ELEMENTI DI UN INSIEME NON STIAMO FACENDO ALTRO CHE ASSOCIARE AD OGNI ELEMENTO UN NUMERO NATURALE. DI FATTO STIAMO DEFINENDO UNA FUNZIONE DI QUESTO TIPO:

$$\{1, 2, \dots, n\} = \mathbb{N}_n \longrightarrow A$$

$$1 \longmapsto a_1$$
$$2 \longmapsto a_2$$
$$3 \longmapsto a_3$$

DIREMO CHE UN INSIEME É FINITO SE É VUOTO O SE ESISTE UNA BIIEZIONE FRA TALE INSIEME E $\mathbb{N}_n$ (SOTTOINSIEME DI $\mathbb{N}$). TUTTI GLI ALTRI INSIEMI SARANNO INFINITI

DIREMO INOLTRE CHE 2 INSIEMI A E B SONO EQUIPOTENTI (O CON LA STESSA CARDINALITÁ) SE ESISTE UN'APPLICAZIONE BIIETTIVA $\varphi : A \to B$, E SCRIVEREMO:

$$\#(A) = \#(B)$$

CONSEGUE CHE SE E SOLO SE NON ESISTESSE L'APPLICAZIONE BIIETTIVA ALLORA NON AVRANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI.

INOLTRE, A É FINITO SE É EQUIPOTENTE A $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ CON $n \in \mathbb{N}$

INTERVALLI NUMERABILI

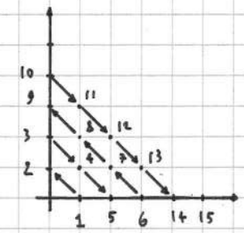
DIREMO CHE UN INSIEME A É NUMERABILE SE:

$$\#(A) = \#(\mathbb{N})$$

SI NOTI CHE POICHÉ L'APPLICAZIONE STABILITA É BIIETTIVA ASSOCIEREMO AD OGNI ELEMENTO DI A UNO ED UN SOLO ELEMENTO DI $\mathbb{N}$. NE CONSEGUE CHE:

$$\#(P) = \#(\mathbb{N}) \quad \text{con } P \text{ insieme dei numeri pari}$$

SI NOTI CHE ANCHE IL PRODOTTO CARTESIANO $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ É EQUIPOTENTE A $\mathbb{N}$. POSSIAMO IMMAGINARE DI SEGUIRE IL SEGUENTE PERCORSO:

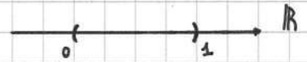


É ANCHE POSSIBILE STABILIRE UN PERCORSO PER IDENTIFICARE TUTTI I NUMERI RAZIONALI, DEFINITI DA $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$. $\mathbb{Q}$ É NUMERABILE.

CARDINALITÁ FINITE E INFINITE

ESISTE UNA CARDINALITÁ FINITA PER OGNI NUMERO NATURALE (PERCIÓ SONO INFINITE). TUTTAVIA NON TUTTI GLI INSIEMI SONO NUMERABILI, PRENDIAMO AD ESEMPIO L'INTERVALLO:

$$A = (0, 1)$$



SE TALE INTERVALLO FOSSE NUMERABILE ALLORA POTREMMO DISPORRE IN SUCCESSIONE I SUOI ELEMENTI:

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow (0, 1) \ni S$$

$$0 \longmapsto s_0 = 0, c_0^0\ c_1^0\ c_2^0 \dots$$
$$1 \longmapsto s_1 = 0, c_0^1\ c_1^1\ c_2^1 \dots$$
$$2 \longmapsto s_2 = 0, c_0^2\ c_1^2\ c_2^2 \dots$$
$$3 \longmapsto s_3 = 0, c_0^3\ c_1^3\ c_2^3 \dots$$
$$4 \longmapsto s_4 = 0, c_0^4\ c_1^4\ c_2^4 \dots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$n \longmapsto s_n = 0, c_0^n\ c_1^n\ c_2^n \dots$$

ORA IMMAGINIAMO DI COSTRUIRE UN NUMERO $S \in (0, 1)$ TALE PER CUI L'n-ESIMA CIFRA SARÁ 7 SE $c_n^n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ E 2 SE $c_n^n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. IN QUESTO MODO S DIFFERIRÁ DI UNA CIFRA ALMENO DA TUTTI GLI s_n. DUNQUE $(0, 1)$ NON É NUMERABILE E CON CUI ANCHE $\mathbb{R}$ (ALTRIMENTI LO SAREBBE ANCHE $(0, 1)$).

SI OSSERVI CHE ALCUNI INSIEMI HANNO CARDINALITÁ SUPERIORE AD $\mathbb{R}$, AD ESEMPIO $\mathcal{P}(R)$.

CALCOLO COMBINATORIO

DEFINIREMO ORA LA CARDINALITÁ DI ALCUNI INSIEMI RILEVANTI NELLE APPLICAZIONI.

DISPOSIZIONI

SIANO Ω_1 E Ω_2 DUE INSIEMI FINITI, AVREMO ALLORA CHE:

$$\#(\Omega_1 \times \Omega_2) = \#\Omega_1 \cdot \#\Omega_2$$

SE QUINDI CHIAMIAMO $\#\Omega_1 = n$ ALLORA $\#\Omega_1^k = n^k$. CHIAMEREMO K-UPLE ORDINATE DI GLI ELEMENTI DI Ω_1^k. ESSE VERRANNO ANCHE DETTE DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE.

ESEMPIO: LANCIAMO 7 VOLTE UNA MONETA, QUANTI SARANNO I POSSIBILI RISULTATI?

$\Omega_1 = \{T, C\}$ $\#\Omega_1^7 = 2^7 = 128$ → LA CARDINALITÀ DELL'INSIEME COMPOSTO DALLE 7-UPLE DI Ω_1

PROVIAMO ORA A CALCOLARE IL NUMERO DI FUNZIONI INIETTIVE INSTAURABILI TRA UN INSIEME A CON k ELEMENTI E UN INSIEME B CON n ELEMENTI. IN SOSTANZA CI STIAMO CHIEDENDO IN QUANTI MODI POSSIAMO ASSOCIARE TUTTI I k ELEMENTI DI A ALLE n "SCATOLE" DI B, SAPENDO CHE ALCUNE SCATOLE POTREBBERO RIMANERE VUOTE E POSSONO CONTENERE AL MASSIMO 1 ELEMENTO $(n \geq k)$.

$A \to B$

$1 \mapsto f(1)$ PUÓ ESSERE ASSOCIATO A n DIVERSI VALORI

$2 \mapsto f(2)$ PUÓ ESSERE ASSOCIATO A $n-1$ DIVERSI VALORI (1 É GIÁ STATO UTILIZZATO)

$\vdots$

$k \mapsto f(k)$ PUÓ ESSERE ASSOCIATO A $n-(k-1)$ DIVERSI VALORI ($k-1$ SONO GIÁ STATI UTILIZZATI)

QUINDI IN FORMULE: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] = \frac{n!}{(n-k)!}$

POSSIAMO VEDERE QUESTO NUMERO COME IL NUMERO DI k-UPLE ORDINATE DI ELEMENTI DI B, ~~CHIAMEREMO~~ IN CUI OGNI ELEMENTO PUÓ COMPARIRE UNA VOLTA SOLA. PERCIÓ LE CHIAMEREMO DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE

PERMUTAZIONI

Vittorio Alzetta

SI OSSERVI CHE NEL CASO PARTICOLARE IN CUI $k = n$ LE FUNZIONI INIETTIVE SARANNO ANCHE SURIETTIVE, E PERCIÓ BIETTIVE. DUNQUE AVREMO CHE LE POSSIBILI BIEZIONI SARANNO:

$$D_{n,n} = P_n = n! \quad \text{(PERMUTAZIONI SENZA RIPETIZIONE)}$$

NEL CASO IN CUI FOSSE AMMESSA LA RIPETIZIONE DEGLI ELEMENTI IL RISULTATO ANDREBBE DIVISO PER IL NUMERO DI PERMUTAZIONI POSSIBILI CON TALI ELEMENTI.

COMBINAZIONI

PROVIAMO A CALCOLARE IL NUMERO DI SOTTOINSIEMI EQUIPOTENTI A DI B, CON $\#(A) = k$ E $\#(B) = n$ E $n \geq k$.

OSSERVIAMO CHE OGNI FUNZIONE INIETTIVA IDENTIFICA UN SOTTOINSIEME DI B, TUTTAVIA LA FUNZIONE CHE A 1 E 2 ASSOCIA a E b O QUELLA CHE GLI ASSOCIA b E a SONO DIVERSE, NONOSTANTE I SOTTOINSIEMI INDIVIDUATI SIANO GLI STESSI (MA PERMUTATI). PER QUESTO MOTIVO DIVIDEREMO PER IL NUMERO DI PERMUTAZIONI POSSIBILI. E CHIAMEREMO IL RISULTATO COMBINAZIONI SENZA RIPETIZIONE:

$$C_{k,n} = \frac{D_{k,n}}{P_k} = \frac{D_{k,n}}{D_{n,n}} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

SE INVECE CONSIDERIAMO TUTTI I POSSIBILI SOTTOINSIEMI DI B OTTENIAMO LA CARDINALITÁ DELL'INSIEME DELLE PARTI DI B, CALCOLIAMOLA:

$$\#(\wp(B)) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$ ← SOMMA DELLE CARDINALITÁ DI TUTTI I SOTTOINSIEMI EQUIPOTENTI

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^n \cdot 1^{n-k}$$ ← HO AGGIUNTO 1 E 1 PER OTTENERE LA FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

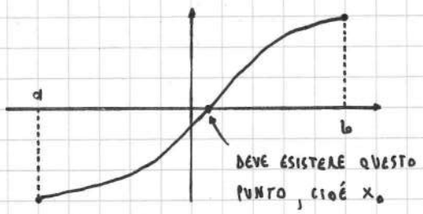
LA CARDINALITÁ DI $\mathcal{P}(B)$ É $(1+1)^n = 2^n$, CHIAMEREMO TALE NUMERO COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

TEOREMA DEGLI ZERI

DATA UNA FUNZIONE $f: A \to \mathbb{R}$, GLI ELEMENTI $a \in A$ TALI CHE $f(a) = 0$ SONO DETTI **ZERI** DELLA FUNZIONE

TEOREMA: SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA TALE CHE $f(a) \cdot f(b) < 0$, ALLORA ESISTERÁ $x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $f(x_0) = 0$



dim:

SUPPONIAMO, POICHÉ NON PERDIAMO DI GENERALITÁ, CHE $f(a) < 0$ E $f(b) > 0$.

SIA $c = \frac{a+b}{2}$.

SE $f(c) = 0$ ABBIAMO TROVATO LO ZERO (TERMINA LA DIMOSTRAZIONE)

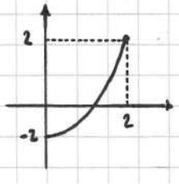
SE $f(c) \neq 0$ OTTERREMO 2 INTERVALLI:

$$[a,c] \quad \wedge \quad [c,b]$$

DEI DUE TERREMO QUELLO I CUI ESTREMI HANNO SEGNO DISCORDE E CHIAMEREMO TALE INTERVALLO $[a_1, b_1]$. PROCEDEREMO ALLO STESSO MODO CALCOLANDO c_1 E POI c_2 E AVANTI COSÍ FINO A n. L'n-ESIMO INTERVALLO AVRÁ LUNGHEZZA:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

PROCEDENDO COSÍ TROVEREMO UN X_0 TALE CHE $f(X_0) = 0$? NO, INFATTI:



PRESA $f(x) = x^2 - 2$, $x \in [0,2]$

$f(x) = 0 \iff x = \sqrt{2}$, TUTTAVIA PROCEDENDO PER BISEZIONI OTTERREMO SOLO NUMERI RAZIONALI, NON ARRIVEREMO MAI A TROVARE $\sqrt{2}$

Vittorio Alzetta

SAPPIAMO CHE $f(a_n) < 0$ E $f(b_n) > 0$, TALI SUCCESSIONI SONO ANCHE LIMITATE E MONOTONE (PER COSTRUZIONE). PER IL TEOREMA SUL LIMITE DELLE SUCCESSIONI MONOTONE AVREMO CHE ESISTE:

$$\lim_{n\to\infty} a_n =: X_0 \in [a,b]$$

DA QUESTA OSSERVAZIONE POSSIAMO OTTENERE CHE:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} + a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = X_0$$

PERCIÓ, POICHÉ f É UNA FUNZIONE CONTINUA POSSIAMO SCRIVERE:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$$

DA CUI SI RICAVA:

$$f(X_0) \leq 0 \quad \wedge \quad f(X_0) \geq 0$$

E QUINDI $f(X_0) = 0$ □

ESERCIZIO: QUANTE SOLUZIONI HA $2x^3 + 3x - 3 = 0$ NEL CAMPO REALE, APPROSSIMARLE CON UN ERRORE INFERIORE A 2^{-4}.

Hp [- ANZITUTTO NOTIAMO CHE AGLI ESTREMI ASSUME VALORI DISCORDI: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- LA FUNZIONE É CONTINUA (~~COMPOSIZIONE~~ SOMMA DI FUNZIONI CONTINUE)

*

INIZIAMO AD APPROSSIMARE:

$f(0) = -3 < 0 \Rightarrow \exists\, X_0 \in (0, +\infty)$ $\quad f(5/8) = -\frac{183}{256} < 0 \Rightarrow X_0 \in (5/8, 3/4)$

$f(1) = 2 > 0 \Rightarrow X_0 \in (0,1)$ $\quad$ IL VALORE APPROSSIMATO DI X_0 SARÁ QUINDI: $\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\right) : 2 = \frac{11}{16}$

$f(1/2) = -\frac{5}{4} < 0 \Rightarrow X_0 \in (1/2, 1)$

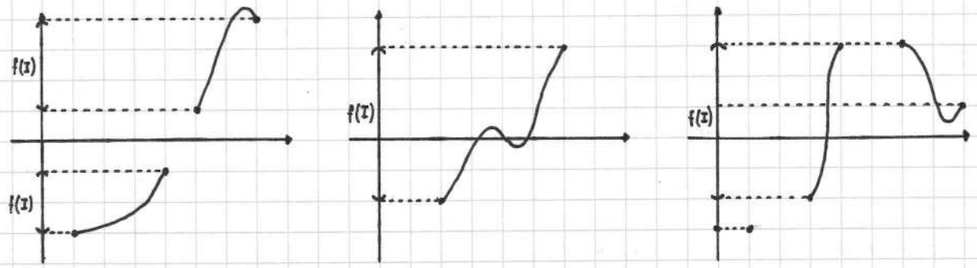
$f(3/4) = 3/32 > 0 \Rightarrow X_0 \in (1/2, 3/4)$

* SI OSSERVI CHE LA FUNZIONE É MONOTONA CRESCENTE, PERCHÉ SOMMA DI FUNZIONI MONOTONE CRESCENTI

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

SIA $f : I \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA. SE I É UN INTERVALLO ALLORA ANCHE $f(I)$ É UN INTERVALLO.

DI QUESTO TEOREMA NON VEDREMO LA DIMOSTRAZIONE, TUTTAVIA PER COMPRENDERNE MEGLIO L'ENUNCIATO MOSTRERÓ ALCUNI GRAFICI:



TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS

IL TEOREMA AFFERMA CHE DATA UNA SUCCESSIONE (a_n) DI NUMERI REALI VALE:

$$(a_n) \text{ LIMITATA} \Rightarrow \exists \text{ UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE}$$

DAL TEOREMA SEGUE UN COROLLARIO DI MINOR IMPORTANZA:

> OGNI SUCCESSIONE DI NUMERI REALI (NON PER FORZA LIMITATA) POSSIEDE UNA SOTTOSUCCESSIONE CHE HA LIMITE. (EVENTUALMENTE $+\infty$ O $-\infty$)

MINIMO LIMITE E MASSIMO LIMITE

DEFINIAMO L'INSIEME $\text{Lim}(a_n) := \{\lambda \in \overline{\mathbb{R}} : \exists\, a_{n_k} \to \lambda\}$. TALE INSIEME AMMETTE MASSIMO E MINIMO, VARRANNO INOLTRE LE SEGUENTI UGUAGLIANZE:

$$\min \text{Lim}(a_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

$$\max \text{Lim}(a_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

INTUITIVAMENTE DA UNA PARTE ABBIAMO IL LIMITE PER $n\to\infty$ DI UNA SUCCESSIONE FORMATA DAI MINIMI DELLE SUE SOTTOSUCCESSIONI, DALL'ALTRA IL LIMITE PER $n\to\infty$ PIÚ BASSO A CUI TENDONO LE SOTTOSUCCESSIONI DI a_n VALE LO STESSO PER LA SECONDA UGUAGLIANZA

CHIAMEREMO IL $\liminf$ MINIMO LIMITE (É IL PIÚ BASSO DI TUTTI) E IL $\limsup$ MASSIMO LIMITE (É IL PIÚ ALTO DI TUTTI).

IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a,b]$. ALLORA f ASSUME $\max$ E $\min$ IN $[a,b]$, CIOÉ ESISTONO:

$$\min_{[a,b]} f \quad \text{E} \quad \max_{[a,b]} f$$

dim: ~~VOLEVA~~ VOLLIAMO DIMOSTRARE ~~DIMOSTRARE~~ L'ESISTENZA DEL MINIMO. PARTIAMO DAL FATTO CHE ESISTE L'ESTREMO INFERIORE:

$$\inf_{[a,b]} f = \inf \{f(x) : x \in [a,b]\}$$

PER DIMOSTRARE LA TESI BASTA MOSTRARE CHE L'$\inf$ SIA APPARTENENTE AD $[a,b] = A$ CIOÉ DEVE ESISTERE UN $\bar{x}$ TALE CHE:

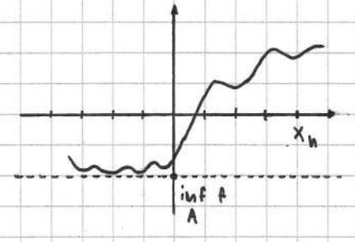
$$\bar{x} \in [a,b] \quad \text{E} \quad \inf_{[a,b]} f = f(\bar{x})$$

LEMMA

LEMMA SULL'ESISTENZA DI UNA SUCCESSIONE MINIMIZZANTE, OVVERO, SIANO $A \neq \emptyset$ E $f : A \to \mathbb{R}$, ESISTERÁ UNA SUCCESSIONE (x_n) TALE CHE:

$$x_n \in A \quad \text{E} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf_A f$$

GRAFICAMENTE POSSIAMO OSSERVARE CHE:



É CHIARO CHE I VALORI CHE LA FUNZIONE ASSUME IN x_n SI DEVONO AVVICINARE ALL'ESTREMO INFERIORE DI f

Vittorio Alzetta

CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE MINIMIZZANTE IN $[a,b]$:

$$x_n \in [a,b]$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{[a,b]} f$$

NOTIAMO CHE SE x_n DOVESSE CONVERGERE AD UN $\bar{x}$ ALLORA IL LIMITE PER $n\to\infty$ DI $f(x_n)$ SAREBBE $f(\bar{x})$ PERCHÉ f É CONTINUA. E INOLTRE L'inf SAREBBE UN PUNTO DI $[a,b]$.

DOBBIAMO QUINDI DIMOSTRARE CHE x_n SIA CONVERGENTE.

SAPPIAMO, PER ORA, CHE x_n É LIMITATA. MA PER IL TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS SAPPIAMO CHE ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE DI (x_n) CONVERGENTE, LA CHIAMEREMO x_{n_k}.

IN FORMULE: $\exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: \bar{x} \in [a,b]$, INFATTI $a \le x_{n_k} \le b$

TUTTAVIA SAPPIAMO ANCHE CHE x_n HA LIMITE PER $n\to\infty$, E QUINDI LO HANNO ANCHE TUTTE LE SOTTOSUCCESSIONI, COMPRESA x_{n_k}. AVREMO QUINDI:

$$f(\bar{x}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{[a,b]} f$$

($f(\bar{x})$: CONTINUITÁ) □

ESERCIZIO: DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE $f(x) = x^2 + x\sin x + \cos x$ HA MINIMO IN $\mathbb{R}$.

$f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ É CONTINUA (SOMMA DI FUNZIONI CONTINUE)

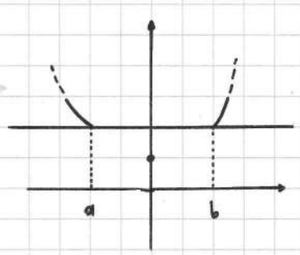
$\mathbb{R}$ É CHIUSO MA NON LIMITATO

$$\lim_{x\to+\infty} = x^2 + x\sin x + \cos x > x^2 - x - 1 = x(x-1) - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} = x^2 + x\sin x + \cos x \overset{>}{\blacktriangleleft} x^2 \mp x \mp 1 = +\infty$$

PER $x=0$ AVREMO $f(0) = 1$, POICHÉ AGLI ESTREMI TENDE A $+\infty$

POSSIAMO AFFERMARE CHE PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS LA FUNZIONE f ASSUME MINIMO NELL'INTERVALLO $[a,b]$

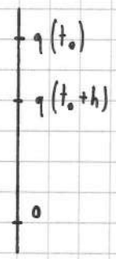


PARENTESI ULTIMA PAGINA

CALCOLO DIFFERENZIALE

Vittorio Alzetta

IMMAGINIAMO DI VOLER CALCOLARE LA VELOCITÁ ISTANTANEA DI UN GRAVE IN CADUTA LIBERA.



LA VARIAZIONE DI QUOTA IN $[t_0, t_0+h]$ É CALCOLABILE COSÍ: FACENDO $q(t_0+h) - q(t_0)$. LA VELOCITÁ MEDIA MANTENUTA IN QUESTO INTERVALLO DI TEMPO É:

$$\bar{v} = \frac{q(t_0+h) - q(t_0)}{h}$$

INTUITIVAMENTE DIREMO CHE PER CALCOLARE LA VELOCITÁ ISTANTANEA BISOGNEREBBE CONSIDERARE IL LIMITE DI $\bar{v}(h)$ CON $h\to 0$.

DATA $f: A \to \mathbb{R}$ E DATO IL PUNTO $x_0 \in A \cap A'$ (x_0 DEVE APPARTENERE AL DOMINIO PERCHÉ BISOGNERÁ CALCOLARE $f(x_0)$), DIREMO CHE f É DERIVABILE IN x_0 SE ESISTE ED É FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

CHIAMEREMO TALE LIMITE DERIVATA DI f IN x_0 E LA INDICHEREMO COME:

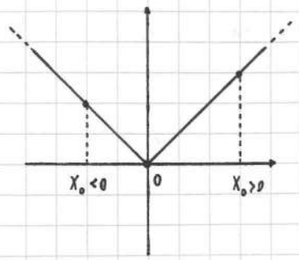
$$f'(x_0) \quad , \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad , \quad Df(x_0)$$

É POSSIBILE INOLTRE EFFETTUARE IL CAMBIAMENTO DI BASE $x = x_0 + h$, IN MODO DA OTTENERE LA FORMA:

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

DIREMO CHE f É DERIVABILE SE LO É PER OGNI PUNTO DEL SUO DOMINIO

ESERCIZIO: CONSIDERIAMO LA FUNZIONE VALORE ASSOLUTO $f(x) = |x|$



CALCOLIAMONE LA DERIVATA: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$

IN $x_0 > 0$ VALE 1, IN $x_0 < 0$ VALE -1, IN $x_0 = 0$ NON ESISTE

INFATTI AVREMO $\lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ CHE É LA FUNZIONE SEGNO

IL CUI LIMITE DESTRO E SINISTRO É DIVERSO $(x \to 0^+ = 1 \;,\; x \to 0^- = -1)$

ESERCIZIO: CONSIDERIAMO LA RETTA DI EQUAZIONE $f(x) = mx + q$, CON $m \in q \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{mx_0 + mh + q - mx_0 - q}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

GEOMETRICAMENTE LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO CORRISPONDE ALL'INCLINAZIONE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO IN QUEL PUNTO.

DERIVABILITÁ E CONTINUITÁ

TEOREMA DI CONTINUITÁ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

IL TEOREMA AFFERMA CHE SE f É DERIVABILE IN X_0 ALLORA f SARÁ CONTINUA IN X_0.

dim: PREMESSO CHE X_0 NON PUÓ ESSERE UN PUNTO ISOLATO, PER DEFINIZIONE DI DERIVATA, SAPPIAMO CHE DOVRÁ ESSERE PUNTO DI ACCUMULAZIONE E DOVRÁ VALERE:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

POSSIAMO, A QUESTO PUNTO, ALLUNGARE IL TERMINE $(x - x_0)$ PER OTTENERE LA DEFINIZIONE DI DERIVATA:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = 0$$

IL PRIMO TERMINE, RAPPRESENTA LA DERIVATA, CHE, PER IPOTESI, ASSUME UN VALORE FINITO (ED ESISTE). IL SECONDO TERMINE INVECE TENDE A 0, E SAPPIAMO CHE IL PRODOTTO DI UNA FUNZIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA É 0. □

FORMULE DI DERIVAZIONE

Vittorio Alzetta

SE f E g SONO FUNZIONI DERIVABILI IN UN PUNTO x ALLORA LO SARANNO ANCHE:

- $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$

DERIVATA DELLA POTENZA

ANZITUTTO CALCOLIAMO LA DERIVATA DI x^2:

PASSO BASE: $\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx} x \cdot x + x \cdot \frac{d}{dx} = 2x$

ORA DIMOSTRIAMO IL PASSO INDUTTIVO, INTUENDO CHE LA FORMULA ~~SIA~~ SARÁ $n x^{n-1}$:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^{n+1}) = \boxed{(n+1) x^n}$$

dim: $\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = \frac{d}{dx}(x^n \cdot x) = \frac{d}{dx} x^n \cdot x + \frac{d}{dx} x \cdot x^n = n x^{n-1} \cdot x + x^n = (n+1) x^n$ ✓

DERIVATA DELL'ESPONENZIALE

CONSIDERIAMO $f(x) = a^x$, LA DERIVATA SARÁ:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \frac{(a^h - 1)}{h} = \boxed{a^x \cdot \log a}$$

↑ LIMITE FONDAMENTALE

DERIVATA DEL LOGARITMO

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x) = \log_a x$, CALCOLIAMONE LA DERIVATA:

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\star\right) \cdot \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{1}{x} \cdot \log_a e}$$

DERIVATE DELLE FUNZIONI CIRCOLARI

PER BREVITÁ SCRIVERÓ IL PROCEDIMENTO PER IL CALCOLO DELLA DERIVATA DI SENO E COSENO, LASCIANDO TANGENTE E ALTRE FUNZIONI CIRCOLARI SENZA RISOLUZIONE:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} = h \cdot \sin x \cdot \frac{-(1-\cos h)}{h^2} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

$$= 0 + \cos x \cdot 1 = \boxed{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) + \cos(x)}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} = h \cdot \cos x \cdot \frac{-(1-\cos h)}{h^2} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

$$= 0 - \sin x \cdot 1 = \boxed{-\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \star\ \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1 + \tan^2 x$$

DERIVATA DELLE FUNZIONI COMPOSTE

DATE DUE FUNZIONI f E g TALI CHE g SIA DERIVABILE IN x E f IN $g(x)$ ALLORA:

$$(f \circ g)(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Vittorio Alzetta

ANZICHÉ MOSTRARE SUBITO UN ESEMPIO, CON UNA FUNZIONE NOTA, DI COME SI POSSA SFRUTTARE LA DERIVATA DELLE FUNZIONI COMPOSTE PER CALCOLARE LA DERIVATA DELL'INVERSA, MOSTRERÓ SUBITO IL CASO GENERALE:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right] = \left[f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x)\right] = 1$$

DA CUI SI RICAVA IMMEDIATAMENTE:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

ESERCIZIO:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

LA FUNZIONE f É DERIVABILE, CONTINUA E LA SUA DERIVATA É CONTINUA?

- ANZITUTTO NOTIAMO CHE PER $x \neq 0$ É CONTINUA, PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE.

  IN $x=0$ BISOGNERÁ CALCOLARE IL LIMITE DESTRO E SINISTRO

  $\lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ (PRODOTTO DI INFINITESIMA PER LIMITATA) $= f(0)$

  DUNQUE $f(x)$ É CONTINUA IN $\mathbb{R}$

- NE CALCOLIAMO ORA LA DERIVATA, NOTANDO CHE ABBIAMO UN PRODOTTO SCRIVIAMO:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

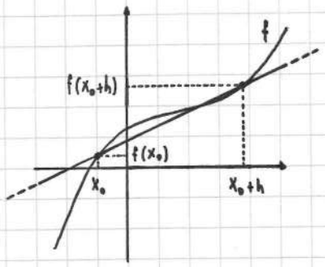
LA DERIVATA IN $x=0$ VA CONTROLLATA DIRETTAMENTE, CON LA DEFINIZIONE:

$$\frac{d}{dx}f(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = h \cdot \sin\frac{1}{h} = 0$$

- f É DERIVABILE E CONTINUA IN $\mathbb{R}$

RETTA TANGENTE

PROVIAMO A CALCOLARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA SECANTE AD UN GRAFICO NEI PUNTI $(x_0, f(x_0))$ E $(x_0+h, f(x_0+h))$ AL TENDERE DI h A 0. OCCORRERÀ METTERE A SISTEMA DUE EQUAZIONI DI RETTE A CUI SOSTITUIREMO LE COORDINATE DEI PUNTI QUI SOPRA DESCRITTI:



$$\begin{cases} f(x_0) = m x_0 + q \\ f(x_0+h) = m(x_0+h) + q \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x_0) - m x_0 = q \\ f(x_0+h) - m(x_0+h) = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x_0) - m x_0 = f(x_0+h) - m x_0 - mh \\ f(x_0) - f'(x_0) x_0 = q \end{cases} \qquad \begin{cases} m = f'(x_0) \\ q = f(x_0) - f'(x_0) x_0 \end{cases}$$

ABBIAMO POTUTO SCRIVERE CHE $m = f'(x_0)$ PER IL SEMPLICE FATTO CHE STIAMO CONSIDERANDO LA SECANTE AL GRAFICO ALL'AVVICINARSI DI h A 0, QUELLA CHE ABBIAMO OTTENUTO, PERTANTO, È LA DEFINIZIONE DI DERIVATA.

SE f È DERIVABILE IN x_0 E $h \to 0$ LA RETTA TANGENTE A f IN x_0 SARÀ:

$$y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$$

PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO

Vittorio Alzetta

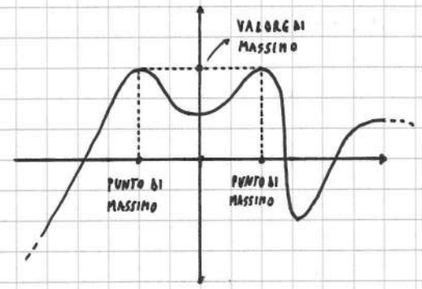
PUNTI DI MASSIMO E MINIMO

DATA UNA FUNZIONE $f: A \to \mathbb{R}$ DIREMO CHE $x_0 \in A$ È PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO SE:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$$

SARÀ INVECE PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO SE:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

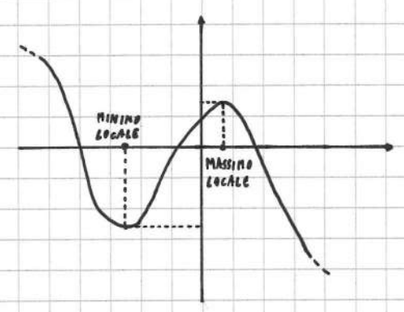


IL VALORE CHE LA FUNZIONE ASSUMERÀ IN QUESTI PUNTI VERRÀ DETTO VALORE DI MINIMO O VALORE DI MASSIMO. MENTRE DI QUESTI ULTIMI CE NE SARANNO AL MASSIMO 2, DI PUNTI DI MASSIMO O MINIMO POTRANNO ESSERCENE ANCHE INFINITI.

PUNTI DI ESTREMO LOCALE (O RELATIVO)

SIA $f: A \to \mathbb{R}$ CON $A \subseteq \mathbb{R}$, DIREMO CHE $x_0 \in A$ È PUNTO DI MASSIMO LOCALE SE ESISTE UN INTORNO U DI x_0 TALE CHE:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap U$$



ANALOGAMENTE SARÀ PUNTO DI MINIMO LOCALE SE:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap U$$

SICCOME IN OGNI INTORNO U DI x_0 È CONTENUTO UN ε-INTORNO DI x_0 POSSIAMO DIRE:

MASSIMO LOCALE: $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A : |x - x_0| < \varepsilon$

MINIMO LOCALE: $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A : |x - x_0| < \varepsilon$

SI NOTI CHE ESISTONO ALCUNE FUNZIONI PRIVE DI MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI E RELATIVI, AD ESEMPIO LE FUNZIONI AFFINI (RETTE) O IL SENO RISTRETTO A $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Vittorio Alzetta

RICERCA DEI MASSIMI E DEI MINIMI LOCALI

SE I PUNTI DI MASSIMO E MINIMO SONO INTERNI AL DOMINIO ALLORA LA TANGENTE IN QUESTI PUNTI, SE ESISTE, SARÀ ORIZZONTALE.

TUTTAVIA LA NOSTRA RICERCA NON DOVREBBE FERMARSI QUI, INFATTI GLI ESTREMI POTREBBERO A LORO VOLTA ESSERE MINIMI O MASSIMI, SENZA PRESENTARE TANGENTE ORIZZONTALE.

INFINE CI DOVREMO CHIEDERE SE I PUNTI NON DERIVABILI SIANO MASSIMI O MINIMI, CALCOLANDO IL VALORE CHE LA FUNZIONE ASSUME IN QUESTI VALORI.

TEOREMA DEI PUNTI CRITICI (O STAZIONARI)

SIA $f: A \to \mathbb{R}$ E SIA X_0 UN PUNTO DI DI MASSIMO O MINIMO LOCALE. SE VALGONO:

- f É DERIVABILE IN X_0
- X_0 É INTERNO AD A

ALLORA AVREMO $f'(x_0) = 0$

Dim: SUPPONIAMO CHE X_0 SIA PUNTO DI MINIMO LOCALE (LO STESSO VALE PER PUNTI DI MASSIMO)

$$\exists\, U \in \mathcal{U}(x_0) : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap U$$

CALCOLIAMO ORA LA DERIVATA DESTRA E SINISTRA NEL PUNTO X_0, E OSSERVEREMO CHE:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{matrix} \to \geq 0 \\ \to > 0 \end{matrix} \geq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{matrix} \to \geq 0 \\ \to < 0 \end{matrix} \leq 0$$

É IMMEDIATO E INTUITIVO CAPIRE CHE POICHÉ $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ VALE $f'(x_0) = 0$ □

ESERCIZIO: TROVARE, SE ESISTONO, I PUNTI DI MASSIMO E MINIMO DELLA FUNZIONE $f(x) = x^3 - 3x + 2$ SULL'INTERVALLO $[0, 2]$

PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS, POICHÉ $f(x)$ É CONTINUA IN $[0,2]$ MASSIMO E MINIMO ESISTONO.

$f'(x) = 3x^2 - 3$, AVREMO MASSIMI O MINIMI PER $3x^2 - 3 = 0 \quad x^2 = \pm 1$

POICHÉ -1 É FUORI DALL'INTERVALLO CONSIDERATO LO SCARTIAMO.

CONSIDERIAMO I PUNTI DI FRONTIERA 0 e 2, OTTENIAMO COSÍ:

$$f(0) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(1) = 0$$

IL PUNTO DI MINIMO É 1, IL PUNTO DI MASSIMO É 2.

TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI

TEOREMA DI ROLLE

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA . SUPPONIAMO CHE

① f SIA DERIVABILE IN (a,b)

② $f(a) = f(b)$

ALLORA $\exists\, c \in (a,b) : f'(c) = 0$

dim:

DAL MOMENTO CHE SONO SODDISFATTE LE IPOTESI DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS ESISTONO:

$$m := \min_{[a,b]} f = f(x_0) \qquad M := \max_{[a,b]} f = f(x_1)$$

- SE X_0 É INTERNO ALLORA $f'(x_0) = 0$ (T. PUNTI CRITICI), QUINDI $c = x_0$
- SE X_1 É INTERNO ALLOM $f'(x_1) = 0$ (T. PUNTI CRITICI), QUINDI $c = x_1$
- SE X_1 E X_0 NON SONO INTERNI AVREMO CHE $m = M$, PER IPOTESI, MA CIÓ IMPLICHEREBBE CHE f SIA COSTANTE E QUINDI $f'(x) = 0 \;\forall x \in (a,b)$ □

TEOREMA DI CAUCHY

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ E $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE . SUPPONIAMO CHE

① f E g SIANO DERIVABILI IN (a,b)

② $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

ALLOM AVREMO CHE $g(a) \neq g(b)$ ED ESISTE $c \in (a,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

dim:

Vittorio Alzetta

PARTIAMO DAL FATTO CHE SE $g(a) = g(b)$ PER IL TEOREMA DI ROLLE SI AVREBBE UN C TALE PER CUI $g'(c) = 0$, IL CHE DIMOSTREREBBE SUBITO L'ENUNCIATO $(0=0)$

NEL CASO IN CUI $g(a) \neq g(b)$ POSSIAMO CONSIDERARE IL NUMERO:

$$R = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ESSO CI PERMETTE DI DEFINIRE LA FUNZIONE $h(x)$ IN QUESTO MODO:

$$h(x) = f(x) - R\,g(x)$$

TALE FUNZIONE RISPETTA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE, É INFATTI CONTINUA POICHÉ DIFFERENZA DI FUNZIONI CONTINUE E VALE:

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,g(a) = \frac{f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - f(b)g(a) + \cancel{f(a)g(a)}}{g(b) - g(a)}$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,g(b) = \frac{\cancel{f(b)g(b)} - f(b)g(a) - \cancel{f(b)g(b)} + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)}$$

$$\Rightarrow h(a) = h(b)$$

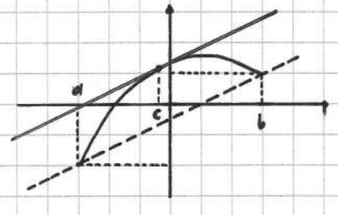
ESISTERÁ QUINDI UN $c \in (a,b)$ TALE PER CUI $h'(c) = 0$, DA CUI POSSIAMO RICAVARE:

$$h'(c) = f'(c) - R\,g'(c) \iff f'(c) = R\,g'(c) \iff R = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \square$$

TEOREMA DI LAGRANGE

SCRIVENDO IL TEOREMA DI CAUCHY PONENDO $g(x) = x$ OTTENIAMO LA SEGUENTE FORMULA:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



LA RETTA TANGENTE AL PUNTO C HA LA CARATTERISTICA DI ESSERE PARALLELA ALLA RETTA CONGIUNGENTE I DUE ESTREMI DELL'INTERVALLO

EQUAZIONE DIFFERENZIALE

DATA L'EQUAZIONE $y'(x) = y(x)$ TROVARE TUTTE LE FUNZIONI $y(x)$ CHE SODDISFANO TALE EQUAZIONE, CIOÉ LA CUI DERIVATA SIA UGUALE ALLA FUNZIONE STESSA.

NOTIAMO IMMEDIATAMENTE LE SOLUZIONI:

$$e^x \;:\; y(x) = y'(x)$$

$$0 \;=\; y(x) = y'(x)$$

MA POI CI ACCORGIAMO CHE L'EQUAZIONE É RISOLTA DA TUTTI I ce^x CON $c \in \mathbb{R}$, TUTTAVIA É NECESSARIA UNA DIMOSTRAZIONE PER MOSTRARE CHE QUESTE ULTIME SONO TUTTE E SOLE LE SOLUZIONI CHIAMATI S L'INSIEME DELLE SOLUZIONI ED E L'INSIEME DEI ce^x AVREMO:

$E \subseteq S$ OVVIO, GIÁ VERIFICATO

$S \subseteq E$ DIMOSTRABILE CON LA DEFINIZIONE, $y \in S \Rightarrow y \in E$

SIA $y \in S$ E CONSIDERIAMO $\dfrac{d}{dx}\dfrac{y(x)}{e^x} = \dfrac{y'(x)e^x - y(x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{y'(x) - y(x)}{e^x}$

PER IPOTESI $y \in S$, QUINDI $y(x) = y'(x)$, E QUINDI $\dfrac{d}{dx}\dfrac{y(x)}{e^x} = \dfrac{0}{e^x} = 0$

POICHÉ LA DERIVATA É NULLA LA FUNZIONE DI PARTENZA SARÁ COSTANTE, E QUINDI POTREMO SCRIVERE CHE:

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \;:\; \frac{y(x)}{e^x} = c \iff y(x) = ce^x \iff y \in E \qquad \square$$

CHIAMEREMO ce^x LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y(x) = y'(x)$.

SI OSSERVI CHE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI HANNO NUMEROSISSIME IMPLICAZIONI FISICHE

FUNZIONI CON DERIVATA LIMITATA IN UN INTERVALLO

Vittorio Alzetta

SIA I UN INTERVALLO E $f: I \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DERIVABILE IN I. SE TALE DERIVATA É LIMITATA ALLORA f É LIPSCHITZIANA.

dim: DAL MOMENTO CHE LA DERIVATA É LIMITATA AVREMO $|f'(x)| \le M$, SE ORA APPLICHIAMO IL TEOREMA DI LAGRANGE AD UN SOTTOINTERVALLO DI I $[x, y]$ OTTENIAMO:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \le M|x - y| \qquad \square$$

ANDAMENTO DI CRESCITA DELLE FUNZIONI DERIVABILI

IN BASE AL SEGNO CHE LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE ASSUME IN UN PUNTO É POSSIBILE DEDURNE LA CRESCENZA O DECRESCENZA. IN PARTICOLARE, COME AFFERMA IL CRITERIO DI MONOTONIA, SI AVRÁ:

$$f'(x) \ge 0 \quad \forall\, x \in (a,b) \iff f \text{ É DEBOLMENTE CRESCENTE IN } (a,b)$$

$$f'(x) \le 0 \quad \forall\, x \in (a,b) \iff f \text{ É DEBOLMENTE DECRESCENTE IN } (a,b)$$

dim: DIMOSTRERÓ LA PRIMA EQUIVALENZA DISTINGUENDO LE DUE IMPLICAZIONI:

($\Rightarrow$) PRESO UN INTERVALLO $[x, y]$ CON $x < y$ VARRANNO LE IPOTESI DEL TEOREMA DI LAGRANGE, PERTANTO, ESISTERÁ $c \in (x, y)$ TALE PER CUI:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

POICHÉ LA DERIVATA $f'(c) \ge 0$ VARRÁ $f(y) - f(x) \ge 0$ E QUINDI $f(y) \ge f(x)$ $\square$

($\Leftarrow$) SUPPONENDO f CRESCENTE AVREMO $x \ge x_0 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)$, QUINDI:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;\underset{\ge 0}{\underset{\ge 0}{\to}}\; \ge 0 \qquad \square$$

TEOREMA DELL'HÔPITAL

QUESTO TEOREMA É SPESSO UTILE PER IL CALCOLO DI LIMITI IN FORMA INDETERMINATA $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. LE IPOTESI PREVEDONO UN PUNTO APPARTENENTE AD $[a,b]$, 2 FUNZIONI f, g CONTINUE IN $[a,b]$ E DERIVABILI IN $(a,b)\setminus\{x_0\}$, DAL MOMENTO CHE NON CI INTERESSA CALCOLARE IL LIMITE IN x_0, TALI CHE:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)\setminus\{x_0\}$$

ESISTE IL LIMITE $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

ALLORA AVREMO $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, CON $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)\setminus\{x_0\}$

APPROSSIMAZIONE DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Vittorio Alzetta

VOLLIAMO APPROSSIMARE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO, MEDIANTE UNA RETTA. ANZITUTTO SPECIFICHIAMO IL PUNTO $(x_0, f(x_0))$, LE RETTE ~~non~~ CHE ANDREMO A CONSIDERARE SARANNO

$$y(x) = f(x_0) + m(x - x_0) \quad , m \in \mathbb{R}$$

POICHÉ TALI RETTE PASSANO PER IL PUNTO SOPRA SPECIFICATO IL LIMITE:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - y(x)] = 0$$

POSSIAMO TUTTAVIA CHIEDERE CHE TALE LIMITE TENDA A 0 PIÚ VELOCEMENTE DI QUANTO LO FACCIA IL LIMITE PER $x \to x_0$ DI $x - x_0$. TRADURRE IN FORMULE QUESTA RICHIESTA É PIUTTOSTO SEMPLICE:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) \mp m(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

DA CUI SI RICAVA:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = 0 \iff f'(x_0) = m$$

PERTANTO LA RETTA CHE MEGLIO APPROSSIMA LA FUNZIONE IN x_0 HA $m = f'(x_0)$, SARÁ QUINDI CHIAMATA RETTA TANGENTE.

SE ORA VOLESSIMO CHIEDERE DI PIÚ ALLA NOSTRA APPROSSIMAZIONE ANDANDO A CONSIDERARE IL POLINOMIO DI GRADO 2 (PARABOLA) CHE MEGLIO APPROSSIMA IL GRAFICO DI FUNZIONE DOVREMMO SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLE PARABOLE PASSANTI PER $(x_0, f(x_0))$:

$$y(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

PONIAMO ORA LA STESSA CONDIZIONE DI PRIMA, CIOÉ CHE $f(x) - y(x)$ TENDA A 0 PIÚ VELOCEMENTE DI $x - x_0$.

Vittorio Alzetta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-y(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)-b(x-x_0)^2}{x-x_0} = f'(x_0)-a-0 = 0$$

ABBIAMO OTTENUTO CHE LE PARABOLE CON $a = f'(x_0)$ APPROSSIMANO MEGLIO IL GRAFICO DI FUNZIONE DELLE ALTRE. É POSSIBILE PERÓ CHIEDERE ANCORA DI PIÚ ALL'APPROSSIMAZIONE, AD ESEMPIO CONSIDERANDO AL DENOMINATORE $(x-x_0)^2$, CHE TENDE A 0 PIÚ VELOCEMENTE DI $(x-x_0)$. CIÓ RESTITUIREBBE UN RISULTATO PIÚ PRECISO:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-\overset{\text{È UN NUMERO QUESTO}}{\overset{\downarrow}{f(x_0)}}-f'(x_0)(x-x_0)-b(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} \overset{\text{HÔPITAL}}{\uparrow} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)-2b(x-x_0)}{2(x-x_0)} = 0$$

PER QUESTO PASSAGGIO ASSUMIAMO CHE f' SIA DERIVABILE. PERTANTO SE ESISTERÁ LA DERIVATA SECONDA (POLINOMIO DI GRADO 2 $\Rightarrow$ DERIVATA SECONDA) ARRIVEREMO A:

$$\frac{f''(x_0)}{2} - b = 0$$

FORMULA DI TAYLOR

É POSSIBILE GENERALIZZARE I RISULTATI OTTENUTI PER POLINOMI DI GRADO n TRAMITE IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE n E CENTRO x_0, DEFINITO COSÍ:

$$P_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

DOVE SI ASSUME CHE LA FUNZIONE f SIA DERIVABILE n VOLTE e. IL POLINOMIO AVRÁ LA FORMA:

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

CHIAMEREMO IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE 2 E CENTRO x_0 PARABOLA OSCULATRICE.

NEL CASO IN CUI $x_0 = 0$ IL POLINOMIO É ANCHE DETTO POLINOMIO DI MAC LAURIN ED É INDICATO DA $P_n(x)$.

e n VOLTE IN x_0, $n-1$ VOLTE IN (a,b)

SOSTITUENDO IL POLINOMIO DI TAYLOR ALLA FUNZIONE SI GENERERÁ UN ERRORE, CALCOLABILE EFFETTUANDO LA DIFFERENZA TRA I VALORI CHE LE FUNZIONI ASSUMONO. CHIAMEREMO RESTO DI ORDINE n E CENTRO x_0:

$$R_{n,x_0}(x) := f(x) - P_{n,x_0}(x)$$

CHIAMEREMO INVECE FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE n E CENTRO x_0 L'EQUAZIONE DIRETTAMENTE RICAVABILE DALLA PRECEDENTE DEFINIZIONE:

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$$

TEOREMA DI TAYLOR

SIANO $f: A \to \mathbb{R}$ CON $A = (a,b)$ E $x_0 \in (a,b)$.

SE f É DERIVABILE $n-1$ VOLTE IN A (APPLICHIAMO DE L'HÔPITAL A PARTIRE DAL SECONDO PASSAGGIO) E n VOLTE IN x_0 (CALCOLIAMO LA DERIVATA IN x_0 DA SUBITO) ALLORA AVREMO:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,x_0}}{(x-x_0)^n} = 0$$

SE, OLTRE A QUANTO APPENA DETTO, f É DERIVABILE $n+1$ VOLTE IN A UN INTERVALLO COMPRESO STRETTAMENTE TRA x E x_0 ALLORA POSSIAMO FARE QUALCHE CONSIDERAZIONE:

SCRIVENDO NELLA FORMULA DI TAYLOR IL POLINOMIO P_{n,x_0} PER ESTESO OTTENIAMO:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n,x_0}(x)$$

IMMAGINIAMO DI AGGIUNGERE UN TERMINE ALLA SOMMATORIA, PONENDOLO UGUALE A $R_{n,x_0}(x)$:

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(1+n)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} \quad [1]$$

LA SOMMATORIA DERIVANTE SAREBBE UN POLINOMIO, E NEL CASO IN CUI f NON LO FOSSE NON POTREBBE VALERE LA [1]. CI BASTERÁ CAMBIARE x_0 CON ξ_x, OVVERO UN TERMINE VARIABILE IN FUNZIONE DI x:

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$ (RESTO NELLA FORMA DI LAGRANGE)

I SIMBOLI o E O DI LANDAU

IL RESTO $R_{n,x_0}(x)$ PUÓ ANCHE ESSERE ESPRESSO COME UN o PICCOLO DI $(x-x_0)^n$:

$$R_{n,x_0}(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{PER } x \to x_0$$

IL SIMBOLO O RAPPRESENTA GLI o GRANDI, SE VALE:

$$\varphi(x) = O\left((x-x_0)^n\right)$$

ALLORA IL RAPPORTO TRA $\varphi(x)$ E $(x-x_0)^n$ NON DÁ NECESSARIAMENTE 0 COME RISULTATO, MA LA FUNZIONE GENERATA DA QUESTO RAPPORTO SARÁ LIMITATA AD UN INTORNO DI x_0.

IRRAZIONALITÁ DI e

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x) = e^x$ E SCRIVIAMONE LA FORMULA DI MAC LAURIN (QUINDI CON $x_0 = 0$) CON RESTO DI LAGRANGE.

AVREMO CHE $\forall x > 0 \;\; \exists \xi_x \in (0,x)$:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

CONSIDERIAMO ORA $x = 1$, COSÍ $\xi \in (0,1)$, SI AVRÁ CHE SE PER ASSURDO PONESSIMO $\frac{q}{p} = e$ CON $q, p \in \mathbb{Z}$ OTTERREMO:

$$\frac{q}{p} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

MOLTIPLICANDO ENTRAMBI I MEMBRI PER $n!$ CON $n \geq p$ OTTENIAMO:

$$\frac{q}{p}\cdot n! = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)n! + \frac{e^{\xi}}{n+1}$$

IL SECONDO TERMINE AL SECONDO MEMBRO DOVREBBE ESSERE INTERO (DIFFERENZA DI NATURALI), MA PRESO $n \geq 2$ SI AVRÁ:

$$0 < \frac{e^{\xi}}{n+1} < \frac{e}{n+1} < \frac{3}{n+1} \leq 1$$

↳ NON É INTERO, CONTRADDIZIONE

CALCOLO APPROSSIMATO

Vittorio Alzetta

SUPPONIAMO DI VOLER COSTRUIRE UN CALCOLATORE IN GRADO DI CALCOLARE $e^{\frac{1}{2}}$ CON UNA PRECISIONE INFERIORE A 10^{-2}. L'IDEA É QUELLA DI SFRUTTARE IL POLINOMIO DI TAYLOR PER n ITERAZIONI. PER TROVARE IL NUMERO MINIMO DI ITERAZIONI POSSIAMO SCRIVERE:

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!}x^{n+1} \leq 10^{-2}$$

ORA SOSTITUIAMO $\frac{1}{2}$ A x E OSSERVIAMO CHE POICHÉ $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ ALLORA $e^{\xi} < e < 3$:

$$R_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{3}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-2}$$

LA SOLUZIONE SARÁ, PERTANTO, : $n \geq 3$. PER $n=3$ OTTENIAMO:

$$\sqrt{e} \simeq P_3\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{3}\frac{(1/2)^k}{k!}$$

$$\simeq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^1\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!} = 1{,}645\,8\overline{3}$$

PROPRIETÁ DEL POLINOMIO DI TAYLOR

É POSSIBILE EFFETTUARE LE CLASSICHE OPERAZIONI ANCHE CON I POLINOMI DI TAYLOR:

$$P_{n,x_0}(g+h) = P_{n,x_0}(g) + P_{n,x_0}(h)$$

SE VOLESSIMO FARE IL PRODOTTO BASTEREBBE ELIMINARE I TERMINI DI GRADO MAGGIORE DI n:

$$P_{n,x_0}(g\cdot h) = P_{n,x_0}\left(P_{n,x_0}(g)\cdot P_{n,x_0}(h)\right)$$

PER LA DIVISIONE É POSSIBILE CALCOLARE IL QUOZIENTE (CON DENOMINATORE $\neq 0$) MEDIANTE DIVISIONE PER POTENZE CRESCENTI, FERMANDOSI AL GRADO n.

SI OSSERVI CHE IN PRESENZA DI UN POLINOMIO, IL RELATIVO POLINOMIO DI TAYLOR SARÁ UGUALE

ESISTONO DELLE TABELLE CHE CONTENGONO I POLINOMI DI TAYLOR DI ALCUNE FUNZIONI RILEVANTI

Vittorio Alzetta

ESEMPIO: CALCOLIAMO: $P_2(h) = P_2\left(\frac{1}{1+2x+3x^2+x^4}\right)$

ESSENDOCI GIÀ DEI POLINOMI POSSIAMO EFFETTUARE LA DIVISIONE:

$$\begin{array}{l|l} 1+0x+0x^2+0x^3+0x^4 & 1+2x+3x^2+x^4 \\ -1-2x-3x^2+0x^3-x^4 & \underbrace{1-2x+x^2}_{\text{POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE 2}} \\ 0-2x-3x^2+0x^3-x^4 & \\ \quad +2x+4x^2+6x^3+0x^4+2x^5 & \\ 0+x^2+6x^3+0x^4+2x^5 & \\ \quad -x^2-2x^3-3x^4+0x^5-x^6 & \end{array}$$

ESEMPIO: DETERMINIAMO IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE 4 E CENTRO 0 DELLA FUNZIONE $f(x) = \cos(\sin x)$

$$P_4(\sin x) = x - \frac{x^3}{3!} \qquad P_4(\cos y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!}$$

FACCIO LA COMPOSIZIONE DEI 2 POLINOMI, LI SVILUPPO ED ELIMINO I TERMINI DI GRADO $n > 4$:

$$P_4\left(\cos(\sin x)\right) = P_4\left(1 - \frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2}{2} + \frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^4}{4!}\right)$$

$$= P_4\left(1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{72} - \frac{x^4}{6}\right)\left(-1 + \frac{x^2}{12} + \frac{x^6}{36\cdot 12} - \frac{x^4}{36}\right)\right)$$

HO ELIMINATO TUTTI I TERMINI DI GRADO $n > 4$ $= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 =$ POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE 4 E CENTRO 0

ESEMPIO: DETERMINARE IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE 2 E CENTRO 0 DI $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

SE PRENDESSI SUBITO I P_2 DI NUMERATORE E DENOMINATORE AVREI DENOMINATORE PARI A 0, QUINDI FACCIO COSÍ:

$$P_2\left(\frac{P_3(x)}{P_3(\sin x)}\right) = P_2\left(\frac{x}{x-\frac{x^3}{3!}}\right) = P_2\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}}\right)$$

ESEMPIO: DETERMINARE $a \in \mathbb{R}$ IN MODO CHE RISULTI FINITO IL LIMITE $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-(ax)^2} - \frac{\sin x}{x}}{x^4}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{P_4(x) + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{P_4(x)}{x^4} + \frac{o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{P_4(x)}{x^4}$$

TROVIAMO QUINDI IL POLINOMIO DI TAYLOR DEL NUMERATORE:

$$P_4\left(\sqrt{1-(ax)^2}\right) = P_4\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\right] = 1 + \frac{1}{2}\left(-a^2x^2\right) - \frac{1}{8}\left(-a^4x^4\right)$$

(CON $x = -a^2x^2$)

$$P_4\left(\frac{\sin x}{x}\right) = P_4\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{x}\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$$

METTIAMO INSIEME I POLINOMI: $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + 1 + \frac{a^4x^4}{8} - \frac{a^2x^2}{2} = \left(\frac{1}{3!} - \frac{a^2}{2}\right)x^2 - \left(\frac{a^4}{8} + \frac{1}{5!}\right)x^4$

CALCOLIAMO ORA IL LIMITE: $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{3!} - \frac{a^2}{2}\right)x^2 - \left(\frac{a^4}{8} + \frac{1}{5!}\right)x^4}{x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \frac{1}{6} - \frac{a^2}{2} > 0 \\ -\infty & \text{se } \frac{1}{6} - \frac{a^2}{2} < 0 \\ * & \text{se } \frac{1}{6} - \frac{a^2}{2} = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{0 - \left(\frac{a^4}{8} + \frac{1}{5!}\right)x^4}{x^4} = \frac{a^4}{8} + \frac{1}{5!} : \text{LIMITE FINITO}$$

PERCIÓ $\frac{1}{6} - \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ SONO LE SOLUZIONI

CONFRONTO DI INFINITESIMI

SIANO $f, g : A \to \mathbb{R}$ CON $A \subseteq \mathbb{R}$ E $x \in A' \in \overline{\mathbb{R}}$. SUPPONIAMO CHE f E g SIANO INFINITESIME PER $x \to x_0$, CIOÉ $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

SE ESISTE:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)^\alpha} = K \in \mathbb{R} - \{0\}$$

ALLORA DIREMO CHE:

- f E g^α ($g(x)$ VIENE CHIAMATO INFINITESIMO CAMPIONE) SONO DELLO STESSO ORDINE
- f É DI ORDINE α RISPETTO A g
- $K g^\alpha$ VIENE CHIAMATA PARTE PRINCIPALE DI f RISPETTO A g

SE $K = 1$ SI DICE CHE f E g^α SONO FORTEMENTE EQUIVALENTI E SI SCRIVE $f \sim g^\alpha$

Vittorio Alzetta

SI PUÓ OSSERVARE CHE UNA FUNZIONE CHE PER $x \to x_0$ TENDE SEMPRE A 0 É $(x - x_0)$. EBBENE QUANDO DIREMO CHE $f(x)$ É UN INFINITESIMO DI ORDINE α SENZA SPECIFICARE $g(x)$ SOTTINTENDEREMO PROPRIO $g(x) = x - x_0$.

NEL CASO DEGLI INFINITI SI PUÓ PRENDERE IL RECIPROCO DI QUANTO TROVATO PER GLI INFINITESIMI.

NEL CASO IN CUI IL LIMITE DEL RAPPORTO NON DOVESSE ESISTERE I DUE INFINITI O INFINITESIMI SI DIRANNO NON CONFRONTABILI.

ESEMPIO: SIA $f(x) = \sin\left(\log \frac{1+x}{1-2x}\right)$, SI TROVI ORDINE E PARTE PRINCIPALE (CON $x \to 0$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\log \frac{1+x}{1+2x}\right)}{x^{\alpha}} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

POSSIAMO CALCOLARE $P_1\left(\sin\left(\log \frac{1+x}{1+2x}\right)\right) = 3x + o(x)$

E QUINDI $\lim_{x \to 0} \frac{3x + o(x)}{x} = 3$ ORDINE: 1, PARTE PRINCIPALE: $3x$

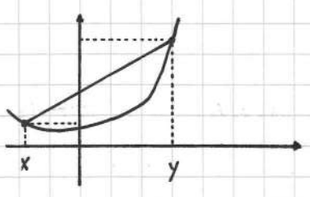
CONCAVITÁ E CONVESSITÁ

PER DEFINIRE UNA FUNZIONE CONCAVA O CONVESSA POSSIAMO SVILUPPARE PIÚ DEFINIZIONI.

INTUITIVAMENTE UNA FUNZIONE É CONCAVA SE HA UNA FORMA DEL TIPO $\cap$ ED É INVECE CONVESSA SE ASSUME UNA FORMA DEL TIPO $\cup$.

UNA PRIMA DEFINIZIONE DI CONVESSITÁ SI BASERÁ SUL FATTO CHE COMUNQUE PRENDIAMO DUE PUNTI DELLA FUNZIONE, IL SEGMENTO CHE LI CONGIUNGERÁ STARÁ TUTTO SOPRA IL GRAFICO DI FUNZIONE.

TALE DEFINIZIONE NON RICHIEDE PARTICOLARI IPOTESI (f NON DEVE NECESSARIAMENTE ESSERE DERIVABILE). IN FORMULE AVREMO:



SIA I UN INTERVALLO E $f: I \to \mathbb{R}$, f É CONVESSA SE

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad [1]$$

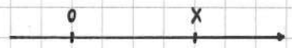
$\forall\, x, y \in I$ E $\forall\, \lambda \in [0,1]$

PER COMPRENDERE LA NATURA DI QUESTA DEFINIZIONE RAGIONIAMO.

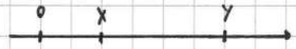
ABBIAMO BISOGNO DI TRADURRE IN FORMULE IL FATTO CHE I VALORI ASSUNTI DAI PUNTI DEL SEGMENTO SIANO MINORI O UGUALI DEI VALORI ASSUNTI DALLA FUNZIONE NEGLI STESSI PUNTI.

ABBIAMO A DISPOSIZIONE $\lambda \in [0,1]$ PER ATTRAVERSARE I PUNTI DA x A y.

NEL CASO IN CUI:



PER PASSARE SU TUTTI I PUNTI BASTA SCRIVERE $\lambda \cdot x$, IN QUESTO CASO INVECE:



DOVREMO SCRIVERE $(y-x)\lambda + x$ PER PASSARE SOPRA TUTTI I PUNTI CONTENUTI IN $[x, y]$.

AVREMO QUINDI CHE I VALORI ASSUNTI DALLA FUNZIONE IN $[x, y]$ SARANNO:

$$f\left[(x-y)\lambda + y\right] = f\left(x\lambda + (1-\lambda)y\right)$$

NON É SBAGLIATO INVERTIRE x CON y. PER QUANTO RIGUARDA I VALORI ASSUNTI DAI PUNTI DEL SEGMENTO BASTERÁ FARE LO STESSO RAGIONAMENTO SAPENDO CHE GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO DA CONSIDERARE SONO $f(x)$ E $f(y)$, PER CUI:

$$\left(f(x) - f(y)\right)\lambda + f(y)$$

DA CUI POI SI RICAVA LA [1]

FUNZIONI CONVESSE IN UN PUNTO

DIREMO CHE UNA FUNZIONE $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN $x_0 \in (a,b)$ É CONVESSA IN x_0 SE ESISTE UN INTORNO DI x_0 IN CUI IL GRAFICO STA SOPRA LA RETTA TANGENTE AL PUNTO $(x_0, f(x_0))$. IN FORMULE:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall\, x \in U$$

IL MOTIVO PER IL QUALE ABBIAMO PRIMA DEFINITO UNA FUNZIONE CONVESSA IN UN INTERVALLO E SOLO POI IN UN PUNTO É CHE PER LA SECONDA DEFINIZIONE ABBIAMO AGGIUNTO UN VINCOLO, LA DERIVABILITÁ.

CONVESSITÁ FUNZIONI DERIVABILI DUE VOLTE

SI PUÓ OSSERVARE COME IL VERSO DELLA PARABOLA OSCULATRICE (DETERMINATO DAL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA) PERMETTA DI CAPIRE SE LA FUNZIONE É CONCAVA O CONVESSA, IN PARTICOLARE ENUNCIAMO IL SEGUENTE TEOREMA:

SIA $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ DERIVABILE 2 VOLTE IN (a,b), VARRÁ:

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ É CONVESSA IN X

$f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ É CONCAVA IN X

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO $h(x) = (x^2 - 3x + 2)\, e^{2x}$ $\quad h(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E DISEGNIAMONE UN GRAFICO APPROSSIMATIVO.

IL DOMINIO É $\mathbb{R}$, SOMMA E PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE.

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 2)\, e^{2x} = [x(x-3) + 2]\, e^{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 3x + 2)\, e^{2x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{2x} + \lim_{x \to -\infty} -3x e^{2x} + \lim_{x \to -\infty} 2e^{2x}$$

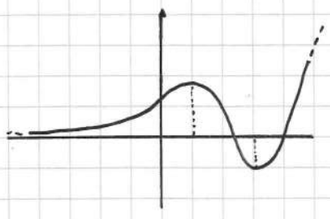
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-2x}} + \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{e^{-2x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-2e^{-2x}} + \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{-2e^{-2x}}$$

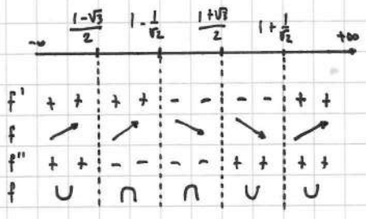
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2e^{-2x}} + 0 + 0 = 0$$

CALCOLIAMO ORA LA DERIVATA PRIMA E SECONDA PER STUDIARNE LA CRESCENZA E CONCAVITÁ:

$$h'(x) = (2x-3)e^{2x} + (x^2 - 3x + 2)\, 2e^{2x} \qquad h'(x) \geq 0 \iff x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h''(x) = 2e^{2x} + (2x-3)\, 2e^{2x} + (2x-3)\, 2e^{2x} + (x^2 - 3x + 2)\, 4e^{2x} \qquad h''(x) \geq 0 \iff x \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \vee x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$





IL CALCOLO INTEGRALE

Vittorio Alzetta

DEL CALCOLO INTEGRALE POSSONO ESSERE DATE VARIE DEFINIZIONI, LA PIÚ SEMPLICE TRA QUELLE GENERALI É QUELLA DI RIEMANN. VE N'É UNA MOLTO PIÚ SEMPLICE (DI CAUCHY) MA VALE SOLO PER LE FUNZIONI CONTINUE.

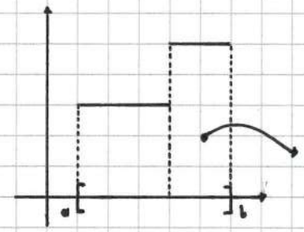
SOTTOGRAFICO DI UNA FUNZIONE

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}^+$ UNA FUNZIONE LIMITATA. SI CHIAMA SOTTOGRAFICO (O RETTANGOLOIDE O TRAPEZOIDE) DI f L'INSIEME:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

IN SOSTANZA STIAMO PARLANDO DELLA PORZIONE DI PIANO COMPRESA FRA LA FUNZIONE E L'ASSE X.

CONSIDERIAMO UN CASO SEMPLICE:



QUI CI BASTEREBBE CALCOLARE SEPARATAMENTE LE AREE DEI DUE RETTANGOLI

SE LA FUNZIONE FOSSE PIÚ COMPLICATA RISULTERÁ IMPOSSIBILE RICONDURSI A FORME GEOMETRICHE COSÍ SEMPLICI.

IMMAGINIAMO DI SUDDIVIDERE IL SOTTOGRAFICO E IN TANTI RETTANGOLI SOTTILI E DI SOMMARLI POI PER RICAVARE L'AREA FINALE.

PARTIZIONE DI UN INTERVALLO

PER STABILIRE LA BASE DI QUESTI RETTANGOLI INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI PARTIZIONE P DI $[a,b]$, OVVERO L'INSIEME FINITO DI PUNTI:

$$P = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ TALI CHE } a = x_0 < \dots < x_n = b$$

QUINDI AVREMO CHE $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] = [a, x_1] \cup \dots \cup [x_{n-1}, b]$

A QUESTO PUNTO ~~MANCANO~~ STABILIAMO L'ALTEZZA DA ASSEGNARE A QUESTI RETTANGOLI.

DUE SARANNO I VALORI CHE PRENDEREMO IN CONSIDERAZIONE:

$$\inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \qquad \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

DEFINIAMO ORA LA SOMMA INFERIORE E LA SOMMA SUPERIORE COME:

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \qquad \text{APPROSSIMAZIONE INFERIORE}$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \qquad \text{APPROSSIMAZIONE SUPERIORE}$$

OSSERVIAMO CHE AGGIUNGENDO PUNTI ALLA PARTIZIONE L'APPROSSIMAZIONE MIGLIORA. IN PARTICOLARE IL MEGLIO CHE POSSO OTTENERE APPROSSIMANDO DALL'ALTO È:

$$\inf \{ s(Q) : Q \in \pi([a,b]) \} \quad [1]$$

AL CONTRARIO, IL MEGLIO CHE POSSO FARE APPROSSIMANDO DAL BASSO È:

$$\sup \{ s(P) : P \in \pi([a,b]) \} \quad [2]$$

QUESTE CONSIDERAZIONI SEGUONO DAL FATTO CHE:

$$s(P) \leq S(R) \quad \forall P, Q \in \pi([a,b])$$

IN PARTICOLARE DEFINIREMO INTEGRALE SUPERIORE LA [1] E LO INDICHEREMO CON $\overline{\int_a^b}$

MENTRE INTEGRALE INFERIORE LA [2] E LO INDICHEREMO CON $\underline{\int_a^b}$.

FUNZIONI INTEGRABILI

Vittorio Alzetta

SIA f UNA FUNZIONE LIMITATA IN $[a,b]$ CHIUSO E LIMITATO, CON $a \leq b$.

SE:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

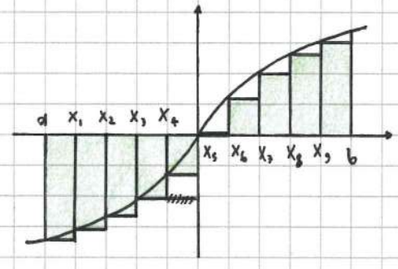
ALLORA f SI DICE INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SU $[a,b]$. DEFINIAMO IL VALORE COMUNE DEGLI INTERVALLI INFERIORE E SUPERIORE:

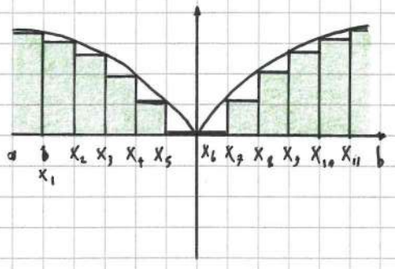
$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

LO CHIAMEREMO INTEGRALE DEFINITO DI f SU $[a,b]$, MENTRE "dx" SI PUÒ OMETTERE SE È CHIARO DAL CONTESTO DOVE TERMINA LA FUNZIONE.

SIGNIFICATO GEOMETRICO

POSSIAMO CHIEDERCI SE L'INTEGRALE FORNISCA L'AREA DEL SOTTOGRAFICO DI UNA FUNZIONE NEGATIVA. EBBENE SE FACESSIMO IL VALORE ASSOLUTO DI TALE FUNZIONE POTREMMO RICAVARE L'AREA DI ANCHE QUESTO SOTTOGRAFICO:





NEL PRIMO CASO AVVERREBBE UNA SOTTRAZIONE DI AREE, NEL SECONDO, GRAZIE AL MODULO DI f, SI PUÒ CALCOLARE CORRETTAMENTE L'AREA DEL SOTTOGRAFICO.

CONDIZIONE DI INTEGRABILITÁ DI RIEMANN

SIA f UNA FUNZIONE LIMITATA IN UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a,b]$ CON $a<b$. f É INTEGRABILE SU $[a,b]$ SE E SOLO SE $\forall \varepsilon>0 \ \exists P_\varepsilon$ DI $[a,b]$:

$$S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \varepsilon$$

IN SOSTANZA QUESTO TEOREMA AFFERMA CHE LA PRECISIONE DELLA NOSTRA APPROSSIMAZIONE PUÓ ESSERE MIGLIORATA A PIACERE.

dim: $(\Leftarrow)$ $\underline{\int_a^b} f \geq s(P_\varepsilon) > S(P_\varepsilon) - \varepsilon \geq \overline{\int_a^b} f - \varepsilon$

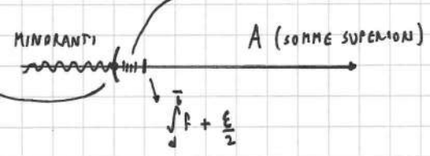
$\underline{\int_a^b} f$ É IL SUP DELLE SOMME INFERIORI; $s(P_\varepsilon)$ PER IPOTESI; $S(P_\varepsilon)$ É L'INF DELLE SOMME SUPERIORI

E QUINDI $\underline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^b} f - \varepsilon$ E PER $\varepsilon \to 0$ AVREMO $\underline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^b} f$

MA POICHÉ PER DEFINIZIONE $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$ AVREMO CHE $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ (FUNZ. INTEGRABILE PER RIEMANN)

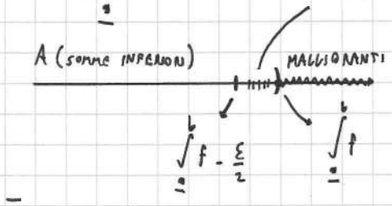
$(\Rightarrow)$ $\forall \varepsilon>0 \ \exists Q_\varepsilon \in \pi([a,b]) : S(Q_\varepsilon) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$

POICHÉ $\overline{\int_a^b} f$ È L'ESTREMO INFERIORE DELLE SOMME SUPERIORI AVREMO CHE:



ORA DICIAMO CHE $\exists R_\varepsilon \in \pi([a,b]) : s(R_\varepsilon) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$

ALLO STESSO MODO, POICHE $\underline{\int_a^b} f$ É L'ESTREMO SUPERIORE DELLE SOMME INFERIORI AVREMO CHE:



$S(Q_\varepsilon) - s(R_\varepsilon) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (POSSIAMO SOSTITUIRE A Q_ε e R_ε L'UNIONE $P_\varepsilon = Q_\varepsilon \cup R_\varepsilon$, TANTO COSÍ FACENDO AUMENTIAMO SOLO LA PRECISIONE DELL'APPROSSIMAZIONE) □

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

Vittorio Alzetta

DIREMO CHE UNA FUNZIONE f É UNIFORMEMENTE CONTINUA IN D (CON $f: D \to \mathbb{R}$) SE

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_\varepsilon>0 : x,y \in D, \ |x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

DIVERSAMENTE DALLE FUNZIONI CONTINUE, x E y SONO SCELTI DOPO AVER FISSATO δ_ε. OSS. É CHIARO QUINDI CHE VARRÁ L'IMPLICAZIONE:

f UNIFORMEMENTE CONTINUA IN $D \Rightarrow f$ CONTINUA IN D

ESEMPI: LE FUNZIONI LIPSCHITZIANE SONO UC, INFATTI POSSIAMO SCRIVERE:

DEFINIZIONE DI FUNZIONE LIPSCHITZIANA: $|f(x)-f(y)| < L|x-y| \quad \forall x,y \in D$

PER TROVARE δ_ε BASTERÁ SCRIVERE: $|f(x)-f(y)| \underset{H_f}{<} L|x-y| \underset{H_f}{<} L\delta_\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$

TEOREMA DI HEINE - CANTOR

DEL SEGUENTE TEOREMA NE ENUNCEREMO SOLTANTO LA TESI:

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CON $a,b \in \mathbb{R}$. SE f É CONTINUA NEL DOMINIO $[a,b]$ ALLORA f SARÁ UNIFORMEMENTE CONTINUA.

ESISTENZA DI FUNZIONI NON INTEGRABILI

DEFINIAMO LA FUNZIONE DI DIRICHLET COME:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

QUESTA FUNZIONE È LIMITATA MA NON INTEGRABILE SU $[0,1]$, INFATTI PER DEFINIZIONE, SE ~~IL~~ L'INTEGRALE ~~LIMITE~~ ESISTE, LA SOMMA SUPERIORE E QUELLA INFERIORE DEVONO ASSUMERE LO STESSO VALORE.

$$\underline{\int_0^1} D = \sup \{ s(P) : P \in \pi([a,b]) \} = 0$$

PRESA UNA QUALUNQUE PARTIZIONE AVREMO CHE L'inf DI f NELL'INTERVALLO $[x_{i-1}, x_i]$ SARÀ 0 (GLI IRRAZIONALI SONO DENSI IN $\mathbb{R}$)

$$\overline{\int_0^1} D = \inf \{ s(P) : P \in \pi([a,b]) \} = 1$$

PRESA UNA QUALUNQUE PARTIZIONE AVREMO CHE IL sup DI f NELL'INTERVALLO $[x_{i-1}, x_i]$ SARÀ 1 (PERCHÉ $\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$)

DUNQUE LA FUNZIONE DI DIRICHLET NON È INTEGRABILE, È ANCHE DISCONTINUA IN OGNI SUO PUNTO.

ESEMPI DI FUNZIONI INTEGRABILI

Vittorio Alzetta

TEOREMA: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ MONOTONA $\Rightarrow$ f È INTEGRABILE

dim: CONSIDERIAMO, SENZA PERDERE GENERALITÀ, CHE f SIA DEBOLMENTE CRESCENTE, QUINDI:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

AVREMO QUINDI CHE f È LIMITATA. PRENDIAMO ORA UNA PARTIZIONE $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ DI $[a,b]$

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$$

ORA CONSIDERIAMO LA PARTIZIONE P_n CHE DIVIDE n VOLTE $[a,b]$ NEL CALCOLO:

$$S(P_n) - s(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)$$

MA POICHÉ STIAMO DIVIDENDO IN n INTERVALLI UGUALI QUESTI POSSONO ESSERE PORTATI FUORI DALLA SOMMATORIA:

$$S(P_n) - s(P_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)$$

OSSERVIAMO ANCHE CHE SCRIVENDO PER ESTESO LA SOMMATORIA TUTTI I TERMINI SI SEMPLIFICANO AD ECCEZIONE DEL PRIMO E DELL'ULTIMO. PERTANTO, MIGLIORANDO AL MASSIMO L'APPROSSIMAZIONE, OTTERREMO:

$$S(P_n) - s(P_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(b) - f(a) \right) = 0$$

QUINDI $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \left(S(P_n) - s(P_n) \right) < \varepsilon \ \forall n > n_\varepsilon$, CIOÉ LA CONDIZIONE DI INTEGRABILITÀ DI RIEMANN. □

Vittorio Alzetta

TEOREMA: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow$ f É INTEGRABILE

dim: ANZITUTTO NOTIAMO CHE PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS f É LIMITATA (ASSUME MASSIMO E MINIMO IN $[a,b]$), MENTRE PER IL TEOREMA DI HEINE-CANTOR f É UNIFORMEMENTE CONTINUA. IN FORMULE:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

PRENDIAMO ORA UNA PARTIZIONE $P_\varepsilon = \{x_0, \dots, x_n\} \in \pi([a,b])$ TALE CHE $|x_i - x_{i-1}| < \delta\ \forall i$. E QUESTO CI FA PERMETTE DI RICAVARE:

$$S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \right) \leq \delta \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \right)$$

OSSERVIAMO CHE ALL'INTERNO DELL'INTERVALLO $[x_{i-1}, x_i]$ CI SONO DUE PUNTI CHE ASSUMONO PRI IL VALORE DEL SUP E DELL' inf. L'INTERVALLO DESCRITTO DA TALI PUNTI, POICHÉ INTERNO A $[x_{i-1}, x_i]$, SARÁ MINORE, E QUINDI MINORE DI δ. PER LE H_p FATTE f É UNIFORMEMENTE CONTINUA E QUINDI SUP - inf SARÁ MINORE DI ε.

PER $\delta < 1$ OTTENIAMO LA TESI:

$$S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \varepsilon \quad (\text{PER } \delta, \text{ MA É } < 1) \qquad \square$$

PROPRIETÁ FONDAMENTALI DELL'INTEGRALE

PER CONVENZIONE DIREMO CHE SE f É INTEGRABILE IN $[a,b]$:

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

E OVVIAMENTE SI OSSERVI CHE:

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0$$

INTUITIVAMENTE L'AREA DEL SOTTOGRAFICO DI f IN UN INTERVALLO DEGENERE (UN PUNTO) É NULLA.

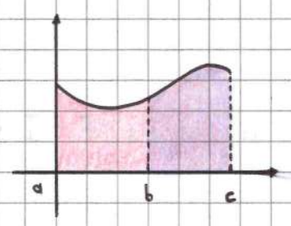
LINEARITÁ DELL'INTEGRALE

SIANO $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ FUNZIONI INTEGRABILI E $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ALLORA ANCHE LA COMBINAZIONE LINEARE $\alpha f + \beta g$ É INTEGRABILE E SI HA:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x)$$

ADDITIVITÁ DELL'INTEGRALE

SE a, b, c SONO 3 PUNTI DI UN INTERVALLO IN CUI f É INTEGRABILE AVREMO:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{bc} f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

UGUALE ALLE CONVENZIONI FATTE POSSIAMO PRENDERE $c \notin [a,b]$

MONOTONIA DELL'INTEGRALE

SE $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ SONO INTEGRABILI E SE $f(x) \leq g(x)$ PER OGNI x IN $[a,b]$ ALLORA:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

DA CUI RICAVIAMO CHE:

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

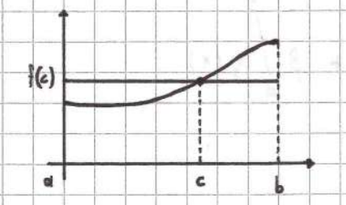
E E CHE:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|$$

↳ DA METTERE NELL'EVENTUALITÁ IN CUI $a > b$

MEDIA INTEGRALE

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE INTEGRABILE. CHIAMEREMO MEDIA INTEGRALE QUEL VALORE $f(c)$ TALE PER CUI L'AREA DEL SOTTOGRAFICO DI f NELL'INTERVALLO $[a,b]$ É UGUALE ALL'AREA DEL RETTANGOLO DI BASE $b-a$ E ALTEZZA $f(c)$. LO DENOTEREMO CON IL SIMBOLO:



$\fint$:= MEDIA INTEGRALE

LA FUNZIONE f DEVE ESSERE CONTINUA, ALTRIMENTI $f(c)$ POTREBBE NON APPARTENERE AL CODOMINIO.

PRIMITIVE

SIA I UN INTERVALLO E $f : I \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE. SI DICE CHE $F : I \to \mathbb{R}$ É UNA PRIMITIVA DI f IN I SE F É DERIVABILE IN I E:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

PUÓ RISULTARE UTILE VISUALIZZARE L'ENUNCIATO CON IL SEGUENTE SCHEMA:

$$F(x) \xmapsto{\text{DERIVANDO}} f(x) \xmapsto{\text{DERIVANDO}} f'(x)$$

PRIMITIVA — FUNZIONE — DERIVATA

ESEMPIO: CALCOLIAMO LA PRIMITIVA DI $f(x) = x$:

$$F'(x) = x \quad \Rightarrow \quad F = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{, INFATTI} \quad F' = \frac{2 \cdot x}{2} = x$$

(c: QUANDO DERIVO LA COSTANTE REALE SCOMPARE)

INDICHEREMO L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE CON $\int f\,dx$ E LO CHIAMEREMO INTEGRALE INDEFINITO. SCOPRIREMO CHE IL RUTILIZZO DEL SIMBOLO DI INTEGRALE É PARTICOLARMENTE AZZECCATO IN QUESTO SPECIFICO CONTESTO.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Vittorio Alzetta

SIA $f : I \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA SU UN INTERVALLO I E SIA $x_0 \in I$, LA FUNZIONE INTEGRALE DEFINITA COME:

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

É UNA PRIMITIVA DI f, CIOÉ VALE A DIRE CHE:

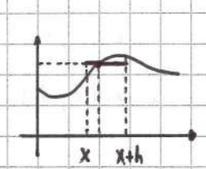
$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall x \in I$$

QUESTO TEOREMA DÁ GRATIS UNA PRIMITIVA DI $f(x)$.

dim: LA DIMOSTRAZIONE, PER QUANTO SEMPLICE, POTREBBE ESSERE SCRITTA SU DI UNA RIGA SOLTANTO:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

ORA, PER SEMPLICITÁ, RAPPRESENTERÓ LA SITUAZIONE CON UN GRAFICO:



PER IL TEOREMA SULLA MEDIA INTEGRALE SAPPIAMO CHE TRA x E $x+h$ ESISTE c_h TALE PER CUI $f(c_h)\cdot h$ É UGUALE ALL'AREA DEL SOTTOGRAFICO TRA x E $x+h$, MA POICHE $h \to 0$ AVREMO:

$$\frac{d}{dx} F(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(c_h) \cdot h = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$$

L'ULTIMO PASSAGGIO É GIUSTIFICATO DALLA CONTINUITÁ DI f E DAL FATTO CHE $x \le c_h \le x+h$, E PER $h \to 0$ SI OTTIENE $x \le c_h \le x$, OVVERO $c_h = x$ ∎

INTEGRALE INDEFINITO

SIA I UN INTERVALLO E $f: I \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE. SE F É UNA PRIMITIVA DI f SU I ALLORA:

$$\int f\,dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

↳ INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE

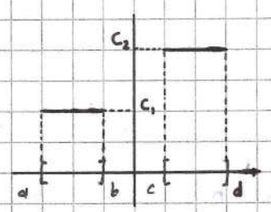
dim: PER DIMOSTRARE L'UGUAGLIANZA POSSIAMO SFRUTTARE IL FATTO CHE: $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$(A \subseteq B)$ SUPPONIAMO $G \in \int f\,dx$, PER DIMOSTRARE L'INCLUSIONE OSSERVIAMO CHE BASTEREBBE MOSTRARE $G \in \{F + c : c \in \mathbb{R}\} \iff G = F + c \iff G - F = c$, CIOÉ SOLO SE ESISTE c TALE PER CUI $G - F$ ASSUME VALORE COSTANTE $\forall x$, MA QUESTO VUOL DIRE CHE: $(G - F)' = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x$, E CIÓ CONFERMA ~~CE~~ ~~↦~~ LA TESI (DERIVATA NULLA → FUNZIONE COSTANTE).

$(B \subseteq A)$ PER DIMOSTRARE QUESTA AFFERMAZIONE BASTA DERIVARE $(F + c)' = F' + 0 = f(x)$. DUNQUE $F + c$ É UNA PRIMITIVA DI $f(x)$. □

SI OSSERVI CHE IL TEOREMA NON PUÓ VALERE SE LA FUNZIONE FOSSE DEFINITA SU PIÚ INTERVALLI, INFATTI:

IN TAL CASO LA ~~PRIMITIVA~~ PRIMITIVA DELLA FUNZIONE SAREBBE:



$$F(x) = \begin{cases} c_1 x + d_1 & x \in [a, b] \\ c_2 x + d_2 & x \in [c, d] \end{cases}$$

SE USASSIMO LA STESSA COSTANTE d_1 PER ENTRAMBI I CASI SAREMMO VINCOLATI A QUELL' $d_1 = d_2$, E NON STAREMMO CONSIDERANDO LE ALTRE, PERCIÓ QUI SERVONO 2 COSTANTI E IL TEOREMA NON VALE.

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Vittorio Alzetta

SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA SU $[a, b]$ E SIA F UNA PRIMITIVA DI f, VALE:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dim: PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE SAPPIAMO CHE: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$

E QUINDI AVREMO:

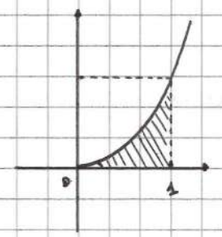
$$F(b) - F(a) = \int_a^b F(t)\,dt + c - \int_a^a f(t)\,dt - c = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \square$$

UTILIZZEREMO SPESSO LA SEGUENTE NOTAZIONE:

$$\int_a^b f(x)\,dx =: \Big[F(x)\Big]_a^b$$

ESEMPIO:

CALCOLIAMO L'AREA DEL SOTTOGRAFICO DI $f(x) = x^2$ TRA 0 E 1:



$$f(x) = x^2 \qquad F(x) = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

PROPRIETÁ DELLE PRIMITIVE

SIANO F E G PRIMITIVE DI f E g SULLO STESSO INTERVALLO, E SIA $\alpha \in \mathbb{R}$:

- αF É UNA PRIMITIVA DI αf
- $F + G$ É UNA PRIMITIVA DI $f + g$
- $F(x + \beta)$ É UNA PRIMITIVA DI $f(x + \beta)$
- SE $\alpha \neq 0$ $\dfrac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha}$ É UNA PRIMITIVA DI $f(\alpha x + \beta)$

ESERCIZI SUL CALCOLO INTEGRALE

- $\int g(x) = \int \frac{x+1}{x+2} = \int \frac{x+2-1}{x+2} = \int 1 - \frac{1}{x+2} = 1 - \log|x+2| + c$

AGGIUNGENDO LA COSTANTE C CONSIDERIAMO TUTTE LE SOLUZIONI (LE PRIMITIVE)

- $f(x) = \tan^2 x = \tan^2 x + 1 - 1 \Rightarrow F(x) = \tan x - x$

IN QUESTO CASO NON BASTA AGGIUNGERE UNA COSTANTE, LA FUNZIONE È DEFINITA AD INTERVALLI.

- DISCUTIAMO L'ESISTENZA DELL'INTEGRALE SEGUENTE:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

IL DOMINIO NATURALE È $\mathbb{R}$, INFATTI $\nexists x \in \mathbb{R} : x^2+x+1=0$. POSSIAMO QUINDI SCRIVERE

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - 0 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right) \quad \text{INTEGRALE IN TABELLA}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

SIANO f E g FUNZIONI DERIVABILI, ALLORA:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

SE f' E g' SONO CONTINUE IN $[a,b]$ ALLORA POSSIAMO INTEGRARE I 2 MEMBRI:

$$\int_a^b (fg)'(x) = \int_a^b f'(x)g(x) + \int_a^b f(x)g'(x)$$

DA CUI, RIORDINANDO E OSSERVANDO CHE IL PRIMO TERMINE È UGUALE A $\left[(GF)'\right]_a^b = \left[f(x)g(x)\right]_a^b$, OTTENIAMO:

$$\int_a^b f(x)g'(x) = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)$$

Vittorio Alzetta

ESEMPIO: CALCOLARE IL SEGUENTE INTEGRALE:

$$\int \underbrace{x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\log x}_{f(x)}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4} + c$$

ESEMPIO FONDAMENTALE:

$$\int \log x = \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\log x}_{f(x)} = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x} = x\log x - x + c = x(\log x - 1) + c$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

PER STABILIRE LA FORMULA DI INTEGRAZIONE PER LE FUNZIONI COMPOSTE PARTIREMO DA QUELLA DI DERIVAZIONE:

$$\frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$$

ORA IMMAGINIAMO DI VOLER DERIVARE DA ENTRAMBE LE PARTI, SI OSSERVI CHE AL PRIMO MEMBRO, QUANDO INTEGRIAMO LASCIAMO SOLO L'ARGOMENTO. ARGUI, QUANDO ALLUNGHIAMO DEGLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE CI INTERESSA SOLO LA DIFFERENZA:

$$\int_c^d \frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right) = \int_c^d f(g(x))\,g'(x)$$

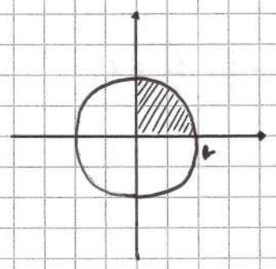
SEMPLIFICANDO IL PRIMO MEMBRO:

$$\int_c^d \frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right) = \left[F(g(x))\right]_c^d = \left[F(y)\right]_{g(c)}^{g(d)}$$

DA CUI OTTENIAMO:

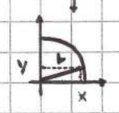
$$\int_{g(c)}^{g(d)} F(y)\,dy = \int_c^d f(g(x))\,g'(x) \overset{\text{ASSUMENDO CHE } g \text{ SIA INVERTIBILE}}{=} \int_c^d F(y)\,dy = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(x))\,g'(x)$$

ESERCIZIO: CALCOLIAMO L'AREA DEL CERCHIO C DI RAGGIO $r > 0$



$$A = 4 \int_0^r f(x)\, dx$$

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} = r \}$$



IN FORMULE AVREMO: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + f(x)^2 = r^2 \Rightarrow f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

POICHÉ A NOI INTERESSA LA PARTE SUPERIORE DEL GRAFICO CONSIDEREREMO SOLO IL CASO POSITIVO:

$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

A QUESTO PUNTO É NATURALE SOSTITUIRE LA x CON $r\cos t$, PER IL LORO LEGAME GEOMETRICO:

$$A = 4 \cdot \int_a^b \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 t}\, d\, r\cos t = 4 \cdot \int_a^b r\sqrt{1-\cos^2 x}\, d\, r\cos t$$

$$= 4r \int_a^b |\sin t|\, d\, r\cos t = 4r \int_a^b r \sin^2 t\, dt$$

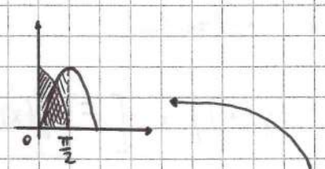
ORA NON CI RESTA CHE CAPIRE COSA SOSTITUIRE AL POSTO DI a E b:

$$x = 0 \Rightarrow r\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$x = r \Rightarrow r\cos t = r \Rightarrow t = 0$$

DA CUI RICAVIAMO:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4r^2 \sin^2 t\, dt$$



OSSERVIAMO CHE SOSTITUENDO AL POSTO DEL $\sin^2 t$, IL $\cos^2 t$ IL RISULTATO NON CAMBIA QUINDI POSSIAMO SCRIVERE:

$$A = 4r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = 4r^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = 4r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi r^2}$$

ESERCIZIO IMPORTANTE

Vittorio Alzetta

SIANO $a > 0$ E $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE INTEGRABILE NEL SUO DOMINIO.

DIMOSTREREMO CHE:

$$f \text{ DISPARI} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

dim:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx$$

ORA SFRUTTIAMO IL FATTO CHE f É DISPARI, CIOÉ $f(x) = -f(-x)$, OTTENENDO:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx \qquad [1]$$

ORA SOSTITUIAMO AL POSTO DI $-x$ LA $-y$:

$$x = 0 \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = -a \Rightarrow -y = -a \Rightarrow y = a$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\int_a^0 f(y)\, d(-y) + \int_0^a f(x)\, dx \qquad [2]$$

$$= \int_a^0 f(y)\, dy + \int_0^a f(x)\, dx = -\int_0^a f(y)\, dy + \int_0^a f(x)\, dx = 0 \quad \square$$

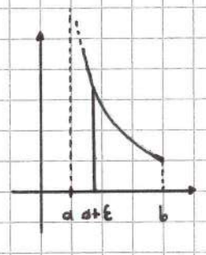
SI NOTI CHE NEL CASO IN CUI f SIA PARI NELLA [1] NON AVREMMO IL '$-$' AL SECONDO MEMBRO, DI CONSEGUENZA NELLA [2] DOPO AVER PORTATO FUORI IL '$-$' DA $d(-y)$ E DOPO AVER INVERTITO GLI ESTREMI DELL'INTEGRALE CI RITROVEREMMO CON:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$$

INTEGRALE GENERALIZZATO DI RIEMANN

SIA $f:(a,b] \to [1,+\infty)$ E $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, ALLORA f NON É LIMITATA E (NO CHIUSO E LIMITATO ↑)

QUINDI NON É DEFINITO L'INTEGRALE CON ESTREMI a, b DI $f(x)$. TUTTAVIA, RESTRINGENDO OPPORTUNAMENTE GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE:



$f|_{[a+\varepsilon,b]} : [a+\varepsilon, b] \to [1,+\infty)$ É CONTINUA, QUINDI INTEGRABILE

$\exists \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt$ L'AREA DEL SOTTOGRAFICO CRESCE VELOCEMENTE

CI ASPETTIAMO CHE L'AREA DEL SOTTOGRAFICO POSSA TENDERE AD UN NUMERO FINITO O INFINITO A SECONDA DELLA FUNZIONE INTEGRANDA. CONSIDERIAMO AD ESEMPIO:

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $\quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt$ E PONIAMOCI NELL'INTERVALLO $[0,1]$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} t^{-\alpha}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

ORA possiamo CALCOLARE IL LIMITE AL VARIARE DELL'ESPONENTE α:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{SE } 1-\alpha > 0 \\ +\infty & \text{SE } 1-\alpha \le 0 \end{cases}$$

INTEGRALE IMPROPRIO O GENERALIZZATO

SIA $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ LOCALMENTE INTEGRABILE (ALTRO MODO DI DIRE CONTINUA). DIREMO CHE f É INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO O GENERALIZZATO SU $(a,b]$ SE ESISTE IL LIMITE:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

CHE IN TAL CASO SARÁ DETTO INTEGRALE IMPROPRIO DI f SU $(a,b]$

FUNZIONI LOCALMENTE INTEGRABILI

Vittorio Alzetta

SIA I UN INTERVALLO. UNA FUNZIONE $f: I \to \mathbb{R}$ SI DICE LOCALMENTE INTEGRABILE SE É INTEGRABILE CON LA DEFINIZIONE USUALE SU OGNI INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO CONTENUTO IN I.

ULTERIORI GENERALIZZAZIONI

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE CASO, DOVE ESCLUDIAMO ENTRAMBI GLI ESTREMI. SIANO $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ CON $a < b$, $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, SE f É INTEGRABILE IN $(a,\xi]$ E $[\xi, b)$ ALLORA DEFINIAMO:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^\xi f(x)\,dx + \int_\xi^b f(x)\,dx$$

L'INTEGRALE COSÍ DEFINITO NON DIPENDE DA ξ (PROPRIETÁ DI ADDITIVITÁ).

LA DEFINIZIONE PERMETTE DI CALCOLARE ~~ANCHE~~ L'INTEGRALE ANCHE NEL CASO $a = -\infty, b = +\infty$

INTEGRALE IN $(-\infty, +\infty)$

NOTIAMO CHE SE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ É LOCALMENTE INTEGRABILE POTREMMO DEFINIRE:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx$

OSSERVIAMO ORA COME I DUE METODI PORTINO A RISULTATI DIVERSI (SI CALCOLA CORRETTAMENTE CON IL PUNTO):

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 x\,dx = \lim_{c\to-\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_c^0 = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{c^2}{2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{c\to+\infty} \int_0^c x\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^c = \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{c^2}{2}\right) = +\infty$$

CON IL SECONDO METODO OTTENIAMO:

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} x\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-c}^{c} = \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right] = 0$$

I RISULTATI OTTENUTI SONO DIVERSI, UNO NON ESISTE E L'ALTRO È 0.

ULTERIORI GENERALIZZAZIONI

SIA $f: (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, CON $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ E $x_0 \in (a,b)$. SE f È INTEGRABILE IN (a, x_0) E IN (x_0, b) ALLORA:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$$

ANCHE QUI, COME PRIMA, IL LIMITE POTREBBE NON ESISTERE QUANDO AVREMO $\infty - \infty$.

SI OSSERVA FACILMENTE CHE NEL CASO IN CUI f SIA LIMITATA IN $[a,b]$ TUTTE LE DEFINIZIONI COINCIDONO CON LA DEFINIZIONE DI RIEMANN.

CRITERIO DEL CONFRONTO

SUPPONIAMO CHE ESISTA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA E INTEGRABILE, ALLORA:

- SE $\int_a^b f(x)\,dx$ È FINITO CHIAMEREMO **CONVERGENTE** L'INTEGRALE
- SE $\int_a^b f(x)\,dx$ È INFINITO CHIAMEREMO **DIVERGENTE** L'INTEGRALE

SIANO $f, \varphi : [a,b) \to \mathbb{R}$ (CON b ANCHE $+\infty$) E SIA f LOCALMENTE INTEGRABILE SE:

- $|f(x)| \le \varphi(x) \quad \forall\, x \in [a,b)$
- $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ È CONVERGENTE

ALLORA ANCHE $\int_a^b f(x)\,dx$ È CONVERGENTE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Vittorio Alzetta

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ E SIA $x_0 \in A'$ IN $\overline{\mathbb{R}}$.

$f, g : A \to \mathbb{R}$ SONO **DEBOLMENTE EQUIVALENTI** PER $x \to x_0$ SE:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

E SCRIVEREMO $f \sim g$ PER $x \to x_0$

COROLLARIO

SE $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ (CON EVENTUALMENTE $b = +\infty$) SONO LOCALMENTE INTEGRABILI E SE:

$$f \sim g \quad \text{PER} \quad x \to b^-$$

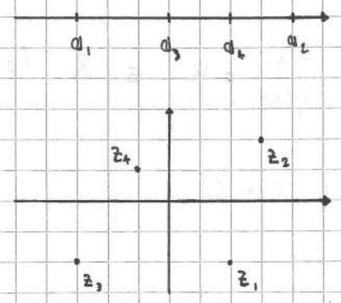
ALLORA

$$\int_a^b f \text{ CONVERGE} \iff \int_a^b g \text{ CONVERGE}$$

SUCCESSIONI DI NUMERI COMPLESSI

RICORDIAMO GRAFICAMENTE IL SIGNIFICATO DI SUCCESSIONE DI REALI

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n$$



$$\mathbb{N} \to \mathbb{C}$$
$$n \mapsto z_n$$

UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI È CONVERGENTE QUANDO $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ È FINITO

ORA, COME FACCIAMO A DEFINIRE LA CONVERGENZA DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI COMPLESSI, CIOÉ, COSA VOGLIAMO INTENDERE CON CONVERGENZA?

POTREMMO DIRE CHE I PUNTI DELLA SUCCESSIONE SIANO SEMPRE PIÚ VICINI A Z PERCHÉ VENGA CHIAMATA CONVERGENTE.

DUNQUE ANDREBBE CONSIDERATA LA DISTANZA $|z_n - z|$, CHE È UN NUMERO REALE.

LA DEFINIZIONE DI CONVERGENZA SARÀ PERTANTO:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$$

OSSERVIAMO LA SOMIGLIANZA CON LA DEFINIZIONE CLASSICA (PER SUCCESSIONI REALI):

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |z_n - z| < \varepsilon \ \forall n > n_\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > n_\varepsilon$$

SI NOTI CHE L'UNICA DIFFERENZA È DATA DALL'UTILIZZO DEL MODULO E DEL VALORE ASSOLUTO

DEFINIZIONI EQUIVALENTI

Vittorio Alzetta

SIA $w \in \mathbb{C}$, QUINDI:

$$|w| = \sqrt{|\mathrm{Im}(w)|^2 + |\mathrm{Re}(w)|^2}$$

SEGUE CHE:

$$|w| \geq |\mathrm{Im}(w)|$$
$$|w| \geq |\mathrm{Re}(w)|$$

AVREMMO QUINDI POTUTO DEFINIRE LA CONVERGENZA DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI COMPLESSI SFRUTTANDO LA CONVERGENZA DELLA PARTE REALE E IMMAGINARIA, CIOÈ:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \iff \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z) \ \wedge \ \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$$

Vittorio Alzetta

SERIE NUMERICHE

CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE $a_n = 1$, CI ACCORGIAMO CHE FACENDO LA SOMMA DI TANTI TERMINI ABBIAMO NUMERI SEMPRE PIÚ GRANDI, IN SOSTANZA:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$$

USEREMO ANCHE LA NOTAZIONE $\sum_{k=1}^{\infty}$, CHE É PIÚ NATURALE.

CONSIDERIAMO ORA LA SUCCESSIONE $a_n = \frac{1}{2^n}$, OVVERO $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{2^n}$

QUALE SARÁ IL RISULTATO?

RICORDIAMO CHE $\sum_{k=0}^{m} a^k = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a} \quad \forall\, a \neq 1$

DUNQUE PER $a = \frac{1}{2}$ AVREMO $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^m}$

SOSTITUIAMO IL RISULTATO OTTENUTO IN $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}$

CI ACCORGIAMO CHE LA SUCCESSIONE PARTE DA 1, NON DA 0, PERCIÓ SOTTRAIAMO IL VALORE CHE OTTERREMO PER $k = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

SERIE ASSOCIATA AD UNA SUCCESSIONE

SIA (a_n) UNA SUCCESSIONE DI COMPLESSI O REALI, LA SUCCESSIONE (S_n) DEFINITA COME:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

É LA SUCCESSIONE DELLE **SOMME PARZIALI** DI (a_n) O **SERIE DI TERMINE GENERALE** (a_n)

SE ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

ALLORA LO CHIAMEREMO **SOMMA DELLA SERIE** E SARÁ INDICATA CON $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

- SE (S_n) É CONVERGENTE LA SERIE SARÁ **CONVERGENTE**
- SE (S_n) É DIVERGENTE LA SERIE SARÁ **DIVERGENTE**
- SE (S_n) NON HA LIMITE LA SERIE SARÁ **INDETERMINATA**

UTILIZZEREMO $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ PER INDICARE LA SOMMA DELLA SERIE O, CON UN ABUSO DI NOTAZIONE, LA SERIE (S_n) STESSA.

SE $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ PARTISSE DA $k_0 > k$ CIÓ CAMBIEREBBE LA SOMMA DELLA SERIE MA NON IL SUO **CARATTERE** (CONVERGENZA, DIVERGENZA, INDETERMINAZIONE).

SERIE GEOMETRICA COMPLESSA

LA SERIE:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

É DETTA **SERIE GEOMETRICA** DI **RAGIONE** z.

OSSERVIAMO CHE, SIMILMENTE A QUANTO DETTO PER I REALI, LA SOMMA PARZIALE:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{SE } z \neq 1 \\ n + 1 & \text{SE } z = 1 \end{cases}$$

ORA CONSIDERIAMO I CASI IN CUI $n \to \infty$ E $z \geq 1$, $z \leq -1$ E $|z| < 1$

- **CASO 1**

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1^k = +\infty$$

- **CASO 2**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \dots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \quad \nexists \text{ NON ESISTE}$$

- **CASO 3**

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}, \quad \text{se } |z| < 1$$

QUINDI, RICAPITOLANDO, ABBIAMO OTTENUTO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} +\infty & \text{SE } z \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{SE } |z| \leq 1 \\ \text{INDETERMINATA} & \text{SE } z \leq -1 \end{cases}$$

SERIE TELESCOPICHE

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

OSSERVIAMO CHE:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

E QUINDI

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \underline{1}$$

STRUTTURA LINEARE DELLE SERIE CONVERGENTI

SIANO $\sum a_n$ E $\sum b_n$ SERIE CONVERGENTI. SIANO λ E μ E $\mathbb{C}$ $(o\ \mathbb{R})$.

ALLORA LA SERIE $\sum (\lambda a_n + \mu b_n)$ É CONVERGENTE, CON SOMMA:

$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum a_n + \mu \sum b_n$$

SI OSSERVI CHE L'INSIEME DELLE SERIE CONVERGENTI É UNA COMBINAZIONE LINEARE, CON OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO PER UNO SCALARE. PER IL PRODOTTO SEMPLICE NON VALE:

$$\sum a_n \cdot \sum b_n \neq \sum a_n b_n \iff \sum_{n=1}^{1} a_n \cdot \sum_{n=1}^{1} b_n = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) \neq \sum_{n=1}^{1} a_n b_n = a_0 b_0 + a_1 b_1$$

TEOREMA O CRITERIO INTEGRALE

Vittorio Alzetta

SPESSO CAPITA CHE IL LIMITE PER $n \to \infty$ DI UNA SOMMA PARZIALE SIA COMPLICATO DA CALCOLARE, PERCIÓ RISULTA SUFFICIENTE STABILIRE IL CARATTERE DELLA SERIE.

OSSERVIAMO, PRIMA DI ENUNCIARE IL TEOREMA, CHE PRESA $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ LA SERIE ASSOCIATA VERRÁ CHIAMATA A TERMINI POSITIVI, INOLTRE:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{É MONOTONA DEF. CRS.}$$

E QUINDI IL LIMITE SARÁ FINITO E POSITIVO O INFINITO (TEOREMA SUL LIMITE DI SUCCESSIONI MONOTONE).

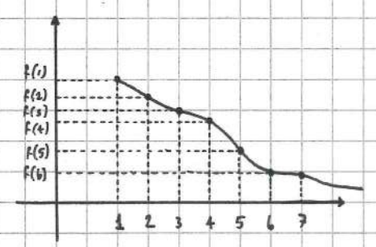
TEOREMA:

SIA $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE NON NEGATIVA E ~~[illegible]~~ DECRESCENTE. ALLORA:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

HANNO LO STESSO CARATTERE.

dim: ~~(HO SBAGLIATO LA DIM, VA FATTA CON FUNZIONI DEF CRESCENTI!)~~



SI OSSERVI CHE MENTRE LA SERIE CONSIDERA SOLO I VALORI ASSUNTI DA f IN $1, 2, 3, \dots$ L'INTEGRALE CONSIDERA ANCHE TUTTI I VALORI INTERMEDI.

SI NOTI CHE $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \forall x \in [k, k+1]$ POICHÉ f É DECRESCENTE. CALCOLANDO L'INTEGRALE DELLA DISUGUAGLIANZA OTTENUTA RICAVIAMO:

$$\int_k^{k+1} f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) \leq \int_k^{k+1} f(k) \iff f(k+1)\cdot 1 \leq \int_k^{k+1} f(x) \leq f(k)\cdot 1$$

ORA CALCOLIAMO LA SOMMA DA 1 A n DEI 3 TERMINI:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

DA CUI, FACENDO TENDERE n A $+\infty$, OTTENIAMO

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) \leq \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

E POICHÉ $\sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) = \sum_{k=2}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$ (COSTANTE)

POSSIAMO AFFERMARE CHE L'INTEGRALE VEICOLA IL VALORE DELLE SERIE, E QUINDI QUEST'ULTIMA AVRÀ LO STESSO CARATTERE DELL'INTEGRALE. □

SERIE DI RIEMANN

LA SEGUENTE SERIE É MOLTO UTILE PER FARE DEI CONFRONTI:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{DIVERGE SE } \alpha \leq 1 \\ \text{CONVERGE SE } \alpha > 1 \end{cases}$$

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ CONVERGENTE} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

DUNQUE SE IL LIMITE DELLA SUCCESSIONE É 0 LA SERIE POTREBBE ESSERE CONVERGENTE, SE NON FOSSE 0 ALLORA SICURAMENTE LA SERIE SAREBBE DIVERGENTE.

É RAGIONEVOLE PENSARE CHE PERCHÉ CONVERGA BISOGNI SOMMARE TERMINI SEMPRE PIÙ PICCOLI.

dim: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$

(S_n: n-ESIMO TERMINE; S_{n-1}: $(n-1)$-ESIMO TERMINE; LA SERIE CONVERGE QUINDI QUESTI VALORI SONO IDENTICI)

CON S_n SI INTENDE LA SOMMA PARZIALE, NON LA SUCCESSIONE!!

$$a_n = \overbrace{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1}^{S_n} - \overbrace{a_{n-1} - a_{n-2} - \dots - a_{n-1}}^{S_{n-1}}$$

CONFRONTO DI SERIE A TERMINI POSITIVI

Vittorio Alzetta

UNA PROPRIETÁ P_n É VERA DEFINITIVAMENTE SE $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: P_n É VERA $\forall\, n \geq n_0$

SIANO $\sum a_n$ E $\sum b_n$ DUE SERIE A TERMINI POSITIVI. SE

$a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE (DA n_0 IN POI)

ALLORA AVREMO

$\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n$ CONVERGE

$\sum a_n$ DIVERGE $\Rightarrow$ $\sum b_n$ DIVERGE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

SIANO $a_n \geq 0$ E $b_n > 0$ $\forall n$. SE $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0, +\infty)$

ALLORA LE SERIE HANNO LO STESSO CARATTERE

SI NOTI CHE SE $l = 0$ ALLORA $b_n > a_n$ E SE $l = +\infty$ $a_n > b_n$, DA CUI NE CONSEGUONO SEMPLICI DISUGUAGLIANZE.

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

UNA SERIE $\sum a_n$ SI DICE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE $\sum |a_n| < +\infty$.

SE UNA SERIE É ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE ALLORA É CONVERGENTE.

dim: NEL CASO DI NUMERI COMPLESSI BASTA SOSTITUIRE IL VALORE ASSOLUTO CON IL MODULO.

DEFINIAMO QUINDI $a_n^+ := \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- := -\min\{a_n, 0\}$

PER FISSARE LE IDEE: CASO $a_n \geq 0$ $\Rightarrow$ $a_n^+ = a_n$, $a_n^- = 0$

CASO $a_n \leq 0$ $\Rightarrow$ $a_n^+ = 0$, $a_n^- = -a_n$

CHIAMATE PARTE POSITIVA E PARTE NEGATIVA DI a_n. ABBIAMO CHE $0 \leq a_n^+, a_n^- \leq |a_n|$, QUINDI SE $\sum |a_n|$ CONVERGE ALLORA $\sum a_n^+$ E $\sum a_n^-$ CONVERGONO. POICHÉ L'INSIEME DELLE SERIE CONVERGENTI É UNO S.V. ALLORA $\sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_n$ CONVERGERÁ □

Vittorio Alzetta

CRITERIO DELLA RADICE PER LE SERIE

SIA $\sum a_n$ UNA SERIE TALE CHE:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

ALLORA SE

- $l < 1$ LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE
- $l > 1$ LA SERIE NON CONVERGE
- $l = 1$ NON POSSIAMO DIRE NULLA

SU QUESTO ULTIMO PUNTO POSSIAMO OSSERVARE CHE:

$a_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{1} = 1$

$a_n = n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{n} = 1$ DIVERGENTE

$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$ CONVERGENTE CON $\alpha > 1$

CRITERIO DEL RAPPORTO

PUÒ ESSERE APPLICATO LO STESSO CRITERIO CHE VALEVA PER LE SUCCESSIONI ALLE SERIE

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO (CRITERIO DI LIEBNIZ)

SE (a_n) È MONOTONA E CONVERGENTE A 0 ALLORA

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ È CONVERGENTE}$$

TEOREMA DI DIRICHLET

SE (a_n) E (φ_n) SONO SUCCESSIONI TALI CHE:

- (a_n) È DECRESCENTE E CONVERGENTE A 0
- LA SUCCESSIONE DI SOMME PARZIALI $S_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ È LIMITATA

ALLORA LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n a_n$ È CONVERGENTE

DA QUI POSSIAMO FACILMENTE OTTENERE IL CRITERIO DI LEIBNIZ PONENDO $\varphi_n = (-1)^n$

SERIE DI POTENZE

SIA (c_n) UNA SUCCESSIONE IN $\mathbb{C}$, SI DETERMINI PER QUALI $z \in \mathbb{C}$ CONVERGE LA SERIE DI POTENZE $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 \dots$ [1]

SI OSSERVI CHE ANCHE $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ È UNA SERIE DI POTENZE, CON $c_n = 1 \ \forall n$

PER STUDIARE LA [1] SFRUTTIAMO IL CRITERIO DELLA RADICE:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n||z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

SE ABBIAMO:

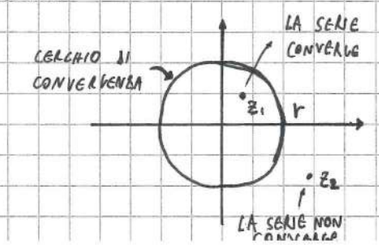
- $l \gtrless 1$ LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE
- $l \lessgtr 1$ LA SERIE NON CONVERGE

NOTIAMO INOLTRE CHE:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n||z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}$$

E QUINDI POSSIAMO RICAVARNE IL SEGUENTE SIGNIFICATO GEOMETRICO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ CONVERGE} \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}}$$



Vittorio Alzetta

TEOREMA DI HADAMARD

INDICHIAMO CON $r := \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, SI HA:

- $|z| < r \Rightarrow \sum_n c_n z^n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE
- $|z| > r \Rightarrow \sum_n c_n z^n$ NON CONVERGE

TALE TEOREMA RIASSUME LE CONSIDERAZIONI FATTE POCO FA.

QUI SI CONCLUDE IL FANTASTICO CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1.