Vittorio Alzetta

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

SIA $X \subset \mathbb{R}$, UNA **SUCCESSIONE DI FUNZIONI** $(f_n)_n$ DA X IN $\mathbb{R}$ É UN'APPLICAZIONE CHE AD OGNI $n \in \mathbb{N}$ ASSOCIA UNA FUNZIONE $f_n : X \to \mathbb{R}$.

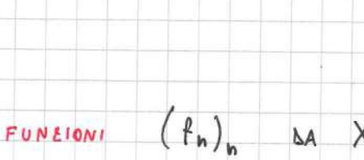
$$\mathbb{N} \longrightarrow \{ \text{FUNZIONI DA } X \text{ IN } \mathbb{R} \}$$
$$n \longmapsto f_n$$

SIA CHIARO CHE CON $(f_n)_n$ SI INTENDE $(f_n(x))_n$, E DUNQUE SE DOVESSIMO DECIDERE DI FISSARE X OTTERREMO UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI.
AL VARIARE DI X INVECE SI OTTENGONO DIVERSE FUNZIONI PER OGNI n.

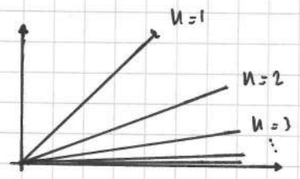
SE FACCIAMO VARIARE X NOTEREMO CHE A VOLTE LA SUCCESSIONE $(f_n(x))_n$ CONVERGERÁ, A VOLTE DIVERGERÁ E ALTRE SARÁ INDETERMINATA.

ESEMPI DI SUCCESSIONI DI FUNZIONI

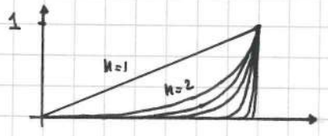
$$f_n(x) = \frac{1}{n}$$



$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x$$



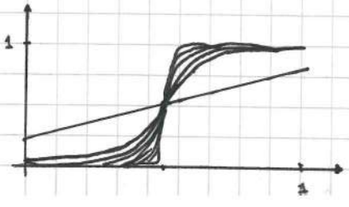
$$f_n(x) = x^n$$



ORA UN ESEMPIO LEGGERMENTE PIÚ COMPLESSO DEI PRECEDENTI

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \tanh\left(n\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} \qquad x \in [0,1]$$

SE $x > \frac{1}{2}$, PER $n \to +\infty$ AVREMO $f_n(x) \to 1$
SE $x = \frac{1}{2}$, PER $n \to +\infty$ AVREMO $f_n(x) \to 1/2$
SE $x < \frac{1}{2}$, PER $n \to +\infty$ AVREMO $f_n(x) \to 0$



Vittorio Alzetta

CONVERGENZA PUNTUALE

SIA $X \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ SIA $f_n : X \to \mathbb{R}$, DEFINIAMO L'INSIEME SEGUENTE:

$$C := \{ x \in X : \text{LA SUCCESSIONE DI REALI } (f_n(x))_n \text{ CONVERGE} \}$$

CHE, SE NON È VUOTO, VIENE CHIAMATO INSIEME DI **CONVERGENZA PUNTUALE** DI $\{f_n\}$ E DIREMO CHE LA SUCCESSIONE $(f_n)_n$ **CONVERGE PUNTUALMENTE** IN C.

LA FUNZIONE $f : C \to \mathbb{R}$ DEFINITA COME:

$$f(x) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

IN SOSTANZA, POICHÉ PER TUTTI GLI $x \in C$ SI HA CHE $(f_n(x))_n$ CONVERGE, DECIDIAMO DI COSTRUIRE LA FUNZIONE f, E LA CHIAMEREMO **FUNZIONE LIMITE PUNTUALE** DELLA SUCCESSIONE $\{f_n\}$

ESERCIZI

- $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$

CASO $x \neq 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \dfrac{x}{1+nx} = 0$

CASO $x = 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \dfrac{x}{1+nx} = 0$

QUINDI L'INSIEME DI CONVERGENZA PUNTUALE È $\mathbb{R}$ E LA FUNZIONE LIMITE PUNTUALE È $F(x) = 0$

- $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$

CASO $x > 1$ $\quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

CASO $x \leq -1$ $\quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \nexists$

CASO $|x| < 1$ $\quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

CASO $x = 1$ $\quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$

$$\Rightarrow \quad C = \{ x \in \mathbb{R} : x = 1 \vee |x| < 1 \}$$

$$F = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

- $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ n & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & x > \frac{1}{n} \end{cases}$

CASO $x \leq 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

CASO $x > 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$

SE $n \to +\infty$ É COME SE SI ANNULLASSE IL SECONDO CASO, INFATTI RISULTEREBBE $0 < x \leq 0$.

PERCIÓ AVREMO:

$$C = \mathbb{R} \qquad F = \begin{cases} 0 & \text{SE } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{SE } x > 0 \end{cases}$$

PROPRIETÁ FUNZIONE LIMITE PUNTUALE

NONOSTANTE LE FUNZIONI DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI POSSANO AVERE CERTE PROPRIETÁ PUÓ ESSERE CHE LA FUNZIONE LIMITE PUNTUALE NON LE CONDIVIDA.

IN ALTRI CASI, INVECE, SE TUTTE LE FUNZIONI DELLA SUCCESSIONE GODONO DI CERTE PROPRIETÁ ALLORA ANCHE LA FUNZIONE LIMITE NE GODRÁ (AD ESEMPIO PARITÁ, DISPARITÁ E PERIODICITÁ).

CONVERGENZA UNIFORME

SIA $X \subset \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ SIA $f_n : X \to \mathbb{R}$ E SIA $F : X \to \mathbb{R}$.

DIREMO CHE $(f_n)_n$ **CONVERGE UNIFORMEMENTE** A f IN X SE:

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

IN ALTRE PAROLE:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta \in \mathbb{N} : \forall n \geq \delta : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X$$

LA SUCCESSIONE DI FUNZIONI DEVE TENDERE ALLA FUNZIONE LIMITE IN OGNI SUO PUNTO.

VALE IL SEGUENTE TEOREMA:

SE f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE AD f IN $X \Rightarrow f_n$ CONVERGE PUNTUALMENTE A f IN X

SI OSSERVI CHE NELLA CONVERGENZA PUNTUALE X DIPENDE DA ε, MENTRE ORA NO.

ESEMPIO

- CONSIDERIAMO UN ESEMPIO GIÁ FATTO: $f_n = \frac{1}{n}$ CON $x \in [0,1]$

  SAPPIAMO CHE f_n CONVERGE PUNTUALMENTE A 0, PERTANTO VOLENDO CAPIRE SE f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A 0 IN $[0,1]$ DOVREMO:

$$\sup_{[0,1]} |f_n - f| = \sup_{[0,1]} \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

  E POICHÉ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ABBIAMO CHE f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A 0 IN $[0,1]$

- SIA $f_n(x) := x^n$ PER $x \in (0,1)$. SAPPIAMO GIÁ CHE f_n CONVERGE PUNTUALMENTE A 0 IN $[0,1)$. CALCOLIAMONE L'ESTREMO SUPERIORE IN $(0,1)$:

$$\sup_{(0,1)} |f_n - f| = \sup_{(0,1)} |x^n - 0| = 1^n$$

E DUNQUE, POICHÉ $\lim_{n\to+\infty} 1^n = 1 \neq 0$, f_n NON CONVERGE PUNTUALMENTE A 0 IN $(0,1)$.

CONSIDERIAMO ORA L'INTERVALLO $[0,b]$ CON $b \in (0,1)$, VARRÁ:

$$\sup_{[0,b]} |f_n - f| = \sup_{[0,b]} |b^n - 0| = b^n$$

E SAPPIAMO CHE $b^n \to 0$, QUINDI f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A 0 IN $(0,b]$ CON $b \in (0,1)$.

NOTAZIONE

Vittorio Alzetta

- IN LUOGO DI $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ SCRIVEREMO ANCHE $\sup_X |f_n - f|$
- IN LUOGO DI $\sup_{x\in X} |g(x)| = \sup_X |g|$ SCRIVEREMO $\|g\|_{L^\infty(x)}$

EVENTUALMENTE, SE FOSSE CHIARO L'INSIEME X SI POTREBBE SCRIVERE $\|g\|_\infty$ AL POSTO DI $\|g\|_{L^\infty(x)}$. CHIAMEREMO $\|g\|_\infty$ NORMA INFINITO.

PERTANTO POSSIAMO DIRE CHE:

$$f_n \text{ CONVERGE UNIFORMEMENTE A } f \text{ IN } X \iff \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

SI OSSERVI CHE, DATE $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$

$$\|f_1 + f_2\|_\infty = \sup_X |f_1(x) + f_2(x)| \overset{\text{DISUG. TRIANG.}}{\leq} \sup_X \left(|f_1(x)| + |f_2(x)|\right) \leq$$

$$\leq \sup_X |f_1(x)| + \sup_X |f_2(x)| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$$

(DISUG. TRIANG.)

LA COSA SI PUÓ ESTENDERE AD UN NUMERO FINITO DI FUNZIONI QUALUNQUE.

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|_\infty = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty + \dots + \|f_n\|_\infty$$

CONVERGENZA UNIFORME E UNIONE INSIEMISTICA

SE $(f_n)_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A f NELLI INSIEMI $X_1, \dots, X_k$ ALLORA $(f_n)_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A f NELL'INSIEME $\bigcup_{j=1}^k X_j$.

dim:

SUPPONIAMO VERA L'IPOTESI. FISSIAMO $\varepsilon > 0$, AVREMO CHE:

$$\forall\, j \in \{1,\dots,k\} \ \exists\, n_j \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_j : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X_j$$

PRENDIAMO ORA $m \geq \max\{n_1, \dots, n_j\}$, OTTENIAMO:

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n \geq m : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \bigcup_{j=1}^k X_j$$

TEOREMA

SIA $(f_n)_n$ CONVERGENTE UNIFORMEMENTE A f, IN X.

SIA $(g_n)_n$ CONVERGENTE UNIFORMEMENTE A g, IN X.

SIA $\lambda \in \mathbb{R}$, ALLORA:

- $\lim_{n\to+\infty} \| (f_n + g_n) - (f+g) \|_\infty = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \| (f_n \cdot g_n) - (f \cdot g) \|_\infty = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \| (\lambda f_n) - (\lambda f) \|_\infty = 0$

dim 1:

PER IPOTESI $\lim_{n\to+\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$ E $\lim_{n\to+\infty} \| g_n - g \|_\infty = 0$, QUINDI:

$$\| (f_n + g_n) - (f+g) \|_\infty = \sup | f_n + g_n - f - g | \leq \sup (| f_n - f | + | g_n - g |) \leq$$

$$\leq \sup | f_n - f | + \sup | g_n - g | \to 0 \qquad \square$$

dim 2:

VALGONO LE STESSE IPOTESI DELLA DIMOSTRAZIONE PRECEDENTE.

$$\| (f_n \cdot g_n) - (f \cdot g) \|_\infty = \sup | f_n \cdot g_n - f \cdot g | = \sup | f_n g_n + f_n g - f_n g - f g | =$$

$$= \sup | f_n (g_n - g) + g (f_n - f) | \leq$$

$$\leq \sup | f_n (g_n - g) | + \sup | g (f_n - f) | =$$

$$= \sup |f_n| \cdot \sup | g_n - g | + \sup |g| \cdot \sup | f_n - f | \to 0 \qquad \square$$

dim 3:

VALGONO LE STESSE IPOTESI DELLA DIMOSTRAZIONE PRECEDENTE:

$$\| (\lambda f_n) - (\lambda f) \|_\infty = \sup | \lambda (f_n - f) | = \sup |\lambda| \cdot \sup | f_n - f | \to 0 \qquad \square$$

CONVERGENZA UNIFORME E LIMITATEZZA

Vittorio Alzetta

SIA $X \subset \mathbb{R}$. SIA $f_n : X \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE LIMITATA PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

SE $(f_n)_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE IN X A f ALLORA LA FUNZIONE LIMITE f É LIMITATA

dim:

DALLA DEFINIZIONE DI CONVERGENZA UNIFORME SAPPIAMO CHE:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : | f_n - f | < \varepsilon \ \forall x \in X$$

CONSIDERIAMO ORA $m > n_\varepsilon$, SAPENDO CHE PER IPOTESI f_m É LIMITATA (CIOÉ ESISTE $M > 0$ TALE CHE $|f_m(x)| < M \ \forall x \in X$) OTTENIAMO:

$$\forall x \in X : |f(x)| = | f(x) + f_m(x) - f_m(x) | \leq | f(x) - f_m(x) | + | f_m(x) | =$$

$$= | f_m(x) - f(x) | + | f_m(x) | < \varepsilon + M$$

E DUNQUE CONCLUDIAMO CHE $f(x)$ É LIMITATA DA $M + \varepsilon$. $\square$

OSSERVAZIONE

SE UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI LIMITATE CONVERGE PUNTUALMENTE AD UNA FUNZIONE NON LIMITATA SI PUÓ ESCLUDERE LA POSSIBILITÁ DI UNA CONVERGENZA UNIFORME.

CONVERGENZA UNIFORME E CONTINUITÁ

SIA $X \subset \mathbb{R}$ E $x_0 \in X$. SIA $f_n : X \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA IN x_0 PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

SE $(f_n)_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE IN X A f ALLORA LA FUNZIONE LIMITE f É CONTINUA IN x_0.

dim:

SIA $x_0 \in X$ UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE. DIRE CHE f É CONTINUA IN x_0 É COME DIRE:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in X, \ | x_0 - x | < \delta_\varepsilon : \ | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$$

FISSIAMO UN $\varepsilon > 0$ E SFRUTTIAMO LA CONVERGENZA UNIFORME:

ESISTERÁ n_ε TALE PER CUI PER OGNI $n \geq n_\varepsilon$ SI AVRÁ:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

FISSIAMO ORA $m \geq n_\varepsilon$, AVREMO CHE f_m É CONTINUA IN X_0 PER IPOTESI ED ESISTERÁ QUINDI $\delta_m > 0$ TALE CHE:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{\varepsilon,m} > 0 : \forall x \in X, \ |x_0 - x| < \delta_{\varepsilon,m} : |f_m(x_0) - f_m(x)| < \varepsilon$$

DUNQUE FACCIAMO QUESTO SEMPLICE CALCOLO, $\forall x \in X$ CON $|x_0 - x| < \delta$ SI HA:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

(CONTINUITÁ; CONV. UNIFORME)

□

OSSERVAZIONE

SE TUTTE LE FUNZIONI DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI SONO CONTINUE IN X ALLORA SE ESSE CONVERGONO PUNTUALMENTE AD UNA FUNZIONE NON CONTINUA IN TUTTO X SI PUÓ ESCLUDERE CHE LA CONVERGENZA SIA UNIFORME.

SI OSSERVI CHE LA TESI DEL PRECEDENTE TEOREMA PUÓ ESSERE ENUNCIATA COSÍ:

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f(x)$$

OR CI POTREMO CHIEDERE SE SI POTESSE, E IN QUALI CONDIZIONI, INVERTIRE DERIVATA E LIMITE O INTEGRALE E LIMITE. QUESTO PERCHE SIA GLI INTEGRALI CHE LE DERIVATE SONO DEFINITE COME LIMITI.

CONVERGENZA E INTEGRABILITÁ

Vittorio Alzetta

CONSIDERANDO LA SUCCESSIONE DI FUNZIONI: $f_n(x) = n^p x (1-x^2)^n$ CON $x \in [0,1]$ E $p > 1$; CI ACCORGIAMO CHE NONOSTANTE CONVERGA PUNTUALMENTE A 0 HA INTEGRALE TRA 0 E 1 DIVERSO.

TEOREMA (PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE)

SIA $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE RIEMANN-INTEGRABILE PER OGNI $n \in \mathbb{N}$. SUPPONIAMO CHE $f_n \to f$ CONVERGA UNIFORMEMENTE IN $[a,b]$, ALLORA LA FUNZIONE LIMITE f É RIEMANN-INTEGRABILE, E SI AVRÁ:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

dim:

IL PRIMO PASSO DELLA DIMOSTRAZIONE CONSISTEREBBE NEL PROVARE CHE $f(x)$ É INTEGRABILE SECONDO RIEMANN. ESSENDO COMPLICATO LO TRALASCEREMO, ACCENNO SOLO AL FATTO CHE SE LE f_n FOSSERO TUTTE CONTINUE SI AVREBBE f CONTINUA E QUINDI RIEMANN-INTEGRABILE. PROCEDIAMO OLTRE!

ANZITUTTO OSSERVIAMO CHE PROVARE LA TESI É ANALOGO A PROVARE CHE:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

POI, DALLA CONVERGENZA UNIFORME ABBIAMO:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall n \geq n_\varepsilon : \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

E QUINDI, RICAPITOLANDO:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x)\,dx - f(x)\,dx) \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\,dx =$$

$$= \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\,dx < \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)$$

□

Vittorio Alzetta

CONVERGENZA E DERIVABILITÁ

LI CHIEDIAMO SE LA SUCCESSIONE DELLE DERIVATE CONVERGA ALLA DERIVATA DELLA FUNZIONE LIMITE, E SE SI IN CHE CONDIZIONI SI VERIFICA. IN FORMULE VOGLIAMO SAPERE QUANDO:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'$$

NOTIAMO PER PRIMA COSA CHE NON É SUFFICIENTE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE, INFATTI PRESA:

$$f_n(x) := \frac{\arctan(nx)}{n}$$

INFATTI ABBIAMO CHE:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{E} \quad \lim_{n\to+\infty} \sup |f_n(x) - 0| = 0$$

DUNQUE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE, MA CONSIDERIAMO ORA LA DERIVATA:

$$f_n'(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$$

PROVIAMO A VEDERE SE LA SUCCESSIONE DELLE DERIVATE CONVERGE A f', CIOÉ 0 (UNIFORMEMENTE):

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \left| f_n'(x) - 0 \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n^2\cdot 0} = 1 \neq 0$$

↳ $f_n'(x)$ É DEC. IL SUP SI HA CON $x = 0$

TEOREMA (PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA)

SIA $f_n \in C^1([a,b])$ (INSIEME DELLE FUNZIONI DERIVABILI IN $[a,b]$) PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

SUPPONIAMO CHE:

- $\exists\, x_0 \in [a,b] : f_n(x_0)$ CONVERGE
- f_n' CONVERGE UNIFORMEMENTE A g IN $[a,b]$

ALLORA ESISTE $f \in C^1([a,b])$ TALE PER CUI:

- f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A f IN $[a,b]$
- f_n' CONVERGE UNIFORMEMENTE A f' IN $[a,b]$

SI OSSERVI CHE QUINDI $f' = g$.

dim:

PER IPOTESI SAPPIAMO CHE $f_n(x_0)$ CONVERGE, E QUINDI PONIAMO $l := \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$.

OSSERVIAMO CHE POICHÉ f_n' SONO CONTINUE (ANCHE DERIVABILI) ALLORA ANCHE g SARÁ CONTINUA.

RICORDIAMO LA FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE PER $U \in C^1([a,b])$:

$$\int_{x_0}^{x} U'(t)\,dt = U(x) - U(x_0) \qquad [1]$$

OSSERVIAMO CHE PONENDO $U(x) = f_n(x)$ E PORTANDO n A $+\infty$ SI AVRÁ:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(x_0)$$

$n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = l + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f_n'(t)\,dt = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

↳ PORTO IL LIMITE DENTRO PER IL TPLSS!

ORA CI BASTA DEFINIRE $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ E DALLA [1] RICAVIAMO CHE:

$$\forall x \quad f(x) = U(x) \wedge g(x) = U'(x) \Rightarrow f'(x) = g(x)$$

ORA DOBBIAMO MOSTRARE CHE f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A f IN $[a,b]$.

OSSERVIAMO CHE:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

↑ TPLSS ↑ IPOTESI

Vittorio Alzetta

E POICHÉ CONVERGONO GLI INTEGRALI:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

ALLORA CONVERGONO ANCHE: $f_n \to f$ (I RISULTATI DEGLI INTEGRALI)

É STATA DIMOSTRATA LA CONVERGENZA PUNTUALE (NON ABBIAMO CONSIDERATO IL SUP).

PROCEDIAMO. PER OGNI $x \in [a,b]$ SI HA:

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \left(l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right) - \left(f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \right) \right| \leq$$

$$\leq |l - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} (g(t) - f_n'(t))\,dt \right| \leq$$

$$\leq |l - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} |g(t) - f_n'(t)|\,dt \right| \leq$$

$$\leq |l - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} \sup_{[a,b]} |g(t) - f_n'(t)|\,dt \right| =$$

$$= |l - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} \| g - f_n' \|_{L^\infty[a,b]}\,dt \right| \leq$$

$$\leq |l - f_n(x_0)| + \int_{a}^{b} \| g - f_n' \|_{L^\infty[a,b]}\,dt =$$

$$= |l - f_n(x_0)| + (b-a) \| g - f_n' \|_{L^\infty[a,b]}$$

PASSANDO ORA AL $\sup_{[a,b]}$ OTTENIAMO:

$$\sup |f(x) - f_n(x)| = \| f - f_n \|_\infty \leq |l - f_n(x_0)| + (b-a) \| g - f_n' \|_{L^\infty[a,b]}$$

IL MOTIVO PER IL QUALE NON AGGIUNGO IL SUP DOPO IL "$\leq$" É PERCHÉ LA RELAZIONE VALE $\forall\, x \in [a,b]$, QUINDI SIA CHE CONSIDERI $|f(x) - f_n(x)|$ SIA CHE CONSIDERI IL SUP DI TALE VALORE.

CONCLUDENDO OSSERVIAMO CHE: $\lim_{n \to +\infty} |l - f_n(x_0)| = 0$ PER IPOTESI

$$\lim_{n \to +\infty} (b-a) \| g - f_n' \|_{L^\infty[a,b]} = (b-a) \cdot 0 = 0$$

(conv. unif.)

E QUINDI $\sup |f(x) - f_n(x)| = \sup |f_n(x) - f(x)| \leq 0 + 0 = 0$ E $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE. □

TEOREMA UTILE ALLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

SIA $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

SIA $f_n : X \to [a,b]$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

SUPPONIAMO CHE $(f_n)_n$ CONVERGA UNIFORMEMENTE A f IN X.

ALLORA LA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $(G(f_n))_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A $G(f)$ IN X.

SERIE DI FUNZIONI

SOMMA PARZIALE E SERIE DI FUNZIONI

SIA $X \subset \mathbb{R}$, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SIA $f_n : X \to \mathbb{R}$. CHIAMIAMO LA FUNZIONE DEFINITA COME:

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \quad \forall x \in X$$

SOMMA PARZIALE N-ESIMA ASSOCIATA A $(f_n)_n$.

CHIAMEREMO INVECE SERIE DI FUNZIONI DI TERMINE GENERALE f_n IL LIMITE PER n TENDENTE A $+\infty$ DELLA SOMMA PARZIALE N-ESIMA, LA INDICHEREMO CON:

$$\sum_{n \geq 1} f_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad , \quad (S_n)_n$$

SI OSSERVI CHE $\forall x \in X$ LA SERIE DI FUNZIONI $\sum_{n \geq 1} f_n$ PUÓ DIVENTARE UNA SERIE NUMERICA SE SI CONSIDERA $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$

SOMMA PUNTUALE

SIA $(S_n)_n$ CONVERGENTE PUNTUALMENTE IN X CON FUNZIONE LIMITE PUNTUALE f^*.

DIREMO CHE LA SERIE DI FUNZIONI DI TERMINE GENERALE $(f_n)_n$ $\left(f_1 + \dots + f_n + \dots \right)$ CONVERGE PUNTUALMENTE IN X CON FUNZIONE SOMMA PUNTUALE f^* E SCRIVEREMO:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

SI OSSERVI CHE AVREMO CONVERGENZA PUNTUALE SE:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \text{ CONVERGE } \forall x \in X \text{ A } f(x) \in \mathbb{R} \; !!$$

SOMMA UNIFORME

SE $(S_n)_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE IN X CON FUNZIONE LIMITE UNIFORME f

DIREMO CHE LA SERIE DI FUNZIONI DI TERMINE GENERALE $(f_n)_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE IN X CON FUNZIONE SOMMA UNIFORME f, CHE IN FORMULE VALE A DIRE:

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{k=1}^{\infty} f_n \right\|_{\infty} = \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_n(x) \right| = 0$$

QUI NON STIAMO FACENDO ALTRO CHE CONSIDERARE f IN FATTI $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$!

TEOREMA SEMPLICE

SE LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE ALLORA CONVERGE ANCHE PUNTUALMENTE

dim: $0 = \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f \right| \geq \lim_{n \to +\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f \right| \geq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f \geq 0$

$\Rightarrow$ CONV. PUNTUALE

CONVERGENZA PUNTUALE ASSOLUTA

SIA $\sum_{n \geq 1} f_n$ UNA SERIE, DIREMO CHE ESSA CONVERGE PUNTUALMENTE ASSOLUTAMENTE SE $\forall$ x FISSATO $\in X$ LA SERIE NUMERICA $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE.

IN FORMULE:

$$\forall x \in X \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \in \mathbb{R}$$

SI NOTI CHE DALL'ANALISI 1 ABBIAMO LA SEGUENTE CATENA DI IMPLICAZIONI:

$$\sum_{n \geq 1} f_n \text{ CONV. PUNT. ASS.} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n \text{ CONV. PUNT.} \Rightarrow f_n \to 0 \text{ PUNT.}$$

TEOREMA (CONVERGENZA UNIFORME E CONTINUITÁ)

SIA $(f_n)_n$ UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $f : X \to \mathbb{R}$. SUPPONIAMO CHE ESSE SIANO CONTINUE IN $x_0 \in X$.

$\sum_{n \geq 1} f_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE $\Rightarrow$ LA FUNZIONE SOMMA UNIFORME É CONTINUA SU X_0

$\hookrightarrow x \mapsto \sum_{n \geq 1} f_n(x)$

dim:

Vittorio Alzetta

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA ALLA CONVERGENZA UNIFORME)

SIA $f_n : X \to \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ CON $X \subset \mathbb{R}$.

SE $\sum_{n\geq 1} f_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE ALLORA $f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE

dim: SAPPIAMO CHE $S_n = f_1 + \dots + f_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD f, IN FORMULE:

$$S_n \to f$$

MA SAPPIAMO ANCHE CHE $S_{n+1} \to f$, E QUINDI:

$$f_{n+1} = S_{n+1} - S_n \to f - f = 0 \qquad \square$$

- SI OSSERVI CHE NON VALE L'IMPLICAZIONE INVERSA (COME PER LE SERIE NUMERICHE)
  CONSIDERIAMO AD ESEMPIO $f_n(x) = \frac{1}{n}$, $f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE $\left(\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0\right)$
  MA $\sum_{n\geq 1} f_n$ DIVERGE.

- SI OSSERVI INOLTRE CHE LA CONVERGENZA UNIFORME NON IMPLICA LA CONVERGENZA PUNTUALE ASSOLUTA.

CONVERGENZA TOTALE

PER STABILIRE SE UNA SERIE DI FUNZIONI CONVERGE UNIFORMEMENTE È NECESSARIO CONOSCERE LA SOMMA DELLA SERIE $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$, IL CHE PUÓ RIVELARSI MOLTO DIFFICILE.

PER QUESTO MOTIVO INTRODUCIAMO UN NUOVO TIPO DI CONVERGENZA.

DIREMO CHE $\sum_{n\geq 1} f_n$ **CONVERGE TOTALMENTE** SE $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n È LIMITATA E LA SERIE

$$\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$$

CONVERGE.

IL SEGUENTE TEOREMA MOSTRA COME QUELLA TOTALE SIA LA CONVERGENZA PIÚ FORTE:

$\sum_{n\geq 1} f_n$ CONVERGE TOTALMENTE $\Rightarrow$
- $\sum_{n\geq 1} f_n$ CONVERGE PUNTUALMENTE ASSOLUTAMENTE [1]
- $\sum_{n\geq 1} f_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE [2]
- $f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE [3]

dim 1: FISSATO $x \in X$ DOBBIAMO MOSTRARE CHE $|f_1(x)| + \dots + |f_n(x)|$ CONVERGE.

OSSERVIAMO CHE:

$$|f_1(x)| + \dots + |f_n(x)| \leq \|f_1\|_\infty + \dots + \|f_n\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$$

↑ QUI SI CONSIDERANO I PUNTI PIÚ ALTI DELLE FUNZIONI, I SUP

LE ALTRE 2 DIMOSTRAZIONI SONO DIFFICILI (BASTEREBBE LA 2 DAL MOMENTO CHE $2 \Rightarrow 3$)

TEOREMA SULL'INTEGRAZIONE PER SERIE

SIA $[a,b]$ CHIUSO E LIMITATO, SIA $(f_n)_{n\geq 1}$ SUCCESSIONE IN $C^0([a,b])$ (CONTINUA IN $[a,b]$) TALE CHE LA SERIE DI FUNZIONI $\sum_{n\geq 1} f_n(t)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE SU $[a,b]$ ALLA FUNZIONE SOMMA $\sum_{n\geq 1} f_n$ ALLORA:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt$$

dim: OSSERVIAMO CHE LA SOMMA PARZIALE $S_n(t) := \sum_{k=1}^{n} f_n(t)$ TENDE UNIFORMEMENTE A:

$$S_n \to \sum_{n\geq 1} f_n$$

MA DUNQUE AVREMO CHE:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} S_n(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(t)\, dt =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt \qquad \square$$

Vittorio Alzetta

TEOREMA SULLE OPERAZIONI CON LE SERIE

SIA $[a,b]$ CHIUSO E LIMITATO, SIANO $(f_n)_{n\geq 1}$ E $(g_n)_{n\geq 1}$ SUCCESSIONI DI FUNZIONI $[a,b]\to\mathbb{R}$ TALI CHE:

$$\sum_{n\geq 1} f_n \quad \wedge \quad \sum_{n\geq 1} g_n \text{ CONVERGANO PUNTUALMENTE su } [a,b]$$

SIA $\psi : [a,b]\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE. ALLORA:

- $\sum_{n\geq 1} (f_n + g_n)$ CONVERGE PUNTUALMENTE E

$$\sum_{n\geq 1} (f_n + g_n) = \sum_{n\geq 1} f_n + \sum_{n\geq 1} g_n$$

- $\sum_{n\geq 1} \psi f_n$ CONVERGE PUNTUALMENTE E

$$\sum_{n\geq 1} \psi f_n = \psi \sum_{n\geq 1} f_n$$

SI OSSERVI CHE SE $\sum_{n\geq 1} f_n$ E $\sum_{n\geq 1} g_n$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE ALLORA ANCHE LE ALTRE DUE SERIE CHE ABBIAMO COSTRUITO CONVERGONO.

dim: LA DIMOSTRAZIONE DEL PRIMO PUNTO È ANALOGA A QUELLA DEL SECONDO PUNTO, QUINDI:

$$\sum_{n\geq 1} (f_n + g_n) = \lim_{n\to+\infty} (S_n + V_n) = \lim_{n\to+\infty} S_n + \lim_{n\to+\infty} V_n = \sum_{n\geq 1} f_n + \sum_{n\geq 1} g_n$$

CON $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$ E $V_n = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)$. (FATTA 10) □

TEOREMA SULLA DERIVAZIONE PER SERIE

Vittorio Alzetta

SIA $[a,b]$ CHIUSO E LIMITATO, $(f_n)_{n\geq 1}$ SUCCESSIONE IN $C^1([a,b])$ TALE PER CUI:

- $\exists\, x_0 \in [a,b]$ TALE CHE $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ CONVERGE PUNTUALMENTE
- LA SERIE DELLE DERIVATE $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CONVERGE UNIFORMEMENTE

ALLORA LA FUNZIONE SOMMA $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ È $C^1([a,b])$ E

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

dim: SIA $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_n(t)$, DAL MOMENTO CHE VALGONO LE STESSE IPOTESI AVREMO:

$$\left(\sum_{n\geq 1} f_n(t)\right)' = \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right)' = \lim_{n\to+\infty} S_n'(t) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_n'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' \qquad \text{(FATTA 10)} \quad \square$$

Vittorio Alzetta

SERIE DI POTENZE

SIA $X_0 \in \mathbb{R}$, CHIAMEREMO **SERIE DI POTENZE** DI COEFFICIENTI $(a_n)_n$ E CENTRO X_0 LA SERIE DI FUNZIONI:

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x - X_0)^n$$

OSSERVIAMO ANZITUTTO CHE PUÓ ESSERE SVILUPPATA COME:

$$a_0 + a_1 (x - X_0) + a_2 (x - X_0) + \dots + a_n (x - X_0)^n$$

E DUNQUE POSTO $X = X_0$ ABBIAMO LA CERTEZZA CHE a_0 FACCIA PARTE DELL'INSIEME DI CONVERGENZA.

PER SEMPLICITÁ DA QUI IN AVANTI CONSIDEREREMO SERIE GEOMETRICHE DI CENTRO 0

RAGGIO DI CONVERGENZA

DEFINIAMO IL SEGUENTE NUMERO:

$$\rho := \sup \left\{ \eta \in \mathbb{R} : \text{LA SERIE NUMERICA } \sum_{n\geq 0} a_n \eta^n \text{ CONVERGE} \right\}$$

QUESTO NUMERO É CHIAMATO **RAGGIO DI CONVERGENZA** DELLA SERIE, E PUÓ EVENTUALMENTE ANCHE VALERE $+\infty$.

OSSERVIAMO CHE SE $\rho = 0$ LA SERIE NON CONVERGE $\forall \eta \in \mathbb{R}$

SE $\rho = +\infty$ LA SERIE CONVERGE TOTALMENTE IN TUTTI I LIMITATI DI $\mathbb{R}$

SE $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ LA SERIE CONVERGERÁ NEI CHIUSI CONTENUTI IN $(-\rho, \rho)$ E NON CONVERGERÁ IN $(-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$, IN $-\rho$ E ρ PUÓ VARIARE DA FUNZIONE A FUNZIONE.

ESEMPIO

CON $a_n = 1$ AVREMO $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \iff x \in (-1, 1) \Rightarrow \rho = 1$ (É LA SERIE GEOMETRICA)

CONSIDERIAMO ORA $a_n = \frac{1}{n!}$, OTTENIAMO $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ CHE CONVERGE A e^x IN TUTTO $\mathbb{R}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. DUNQUE IL $\sup\{\mathbb{R}\} = +\infty$ E AVREMO $\rho = +\infty$ (CONVERGE SEMPRE LA SERIE).

PRIMO TEOREMA DI ABEL

SIA $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ UNA SERIE DI POTENZE, E SIA $\xi \neq 0$ UN REALE, AVREMO

- SE LA SERIE NUMERICA $\sum_{n\geq 0} a_n \xi^n$ CONVERGE ALLORA LA SERIE $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ CONVERGE TOTALMENTE IN TUTTI GLI INTERVALLI $[a, b] \subset (-|\xi|, |\xi|)$.
- SE LA SERIE NUMERICA $\sum_{n\geq 0} a_n \xi^n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE ALLORA LA SERIE $\sum_{n\geq 0} a_n$ CONVERGE TOTALMENTE NELL'INTERVALLO $[-|\xi|, |\xi|]$

dim: (1) IL NOSTRO OBIETTIVO É QUELLO DI MOSTRARE CHE IL TEOREMA VALE IN OGNI INTERVALLO $[-R, R]$ CON $R \in (0, |\xi|)$.

PER IPOTESI $\sum_{n\geq 0} a_n \xi^n$ CONVERGE E QUINDI $a_n \xi^n \to 0$, IN ALTRE PAROLE $a_n \xi^n$ É LIMITATA DEFINITIVAMENTE:

$$\exists M > 0 : |a_n \xi^n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DEFINIAMO ORA $f_n := a_n x^n$ E PONIAMO $\lambda = \frac{R}{|\xi|} \in (0, 1)$ (PER FORZA, $|\xi| > R$). PER $n \in \mathbb{N}$ AVREMO:

$$\|f_n\|_{L^\infty([-R,R])} = \sup_{[-R,R]} |a_n x^n| \leftarrow \text{É CRESCENTE E HA IL VALORE ASSOLUTO}$$
$$= |a_n R^n| = |a_n \xi^n| \cdot \left|\frac{R}{\xi^n}\right| < M \cdot \lambda^n$$

E POICHÉ $|\lambda| < 1$ LA SERIE $\sum M\lambda^n$ CONVERGE, CON ESSA CONVERGE ANCHE:

$$\sum \|f_n\|_{L^\infty([-R,R])} \Rightarrow \sum f_n = \sum a_n x^n \text{ CONVERGE TOTALMENTE SU } [-R, R]$$

(2) QUI NON SERVE FARE NESSUN LAVORETTO, $\sup_{[-|\xi|,|\xi|]} |a_n x^n| = |a_n \xi^n|$ E QUESTA CONVERGE (LA SERIE CON QUESTO T. GENERALE) □

Vittorio Alzetta

TEOREMA SULLA STRUTTURA DELL'INSIEME DI CONVERGENZA

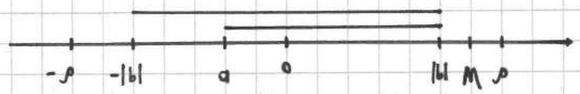
SIA $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ UNA SERIE DI POTENZE CON RAGGIO DI CONVERGENZA ρ. ALLORA:

- SE $\rho \in (0, +\infty]$ LA SERIE $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ CONVERGE TOTALMENTE SU OGNI INTERVALLO $[a,b]$ CON $-\rho < a < b < \rho$.
  INOLTRE LA SERIE CONVERGERÀ PUNTUALMENTE ASSOLUTAMENTE SU $(-\rho, \rho)$.
- SE $\rho < +\infty$ ALLORA PER OGNI $\hat{x} \in \mathbb{R}$ TALE CHE $|\hat{x}| > \rho$ LA SERIE NUMERICA $\sum_{n\geq 0} a_n \hat{x}^n$ NON CONVERGERÀ.

dim: DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE C'È CONVERGENZA TOTALE SU $[a,b] \subset (-\rho, \rho)$.

RICORDATO CHE $\rho = \sup C$ CON $C := \{\eta \in \mathbb{R} : \sum_{n\geq 0} a_n \eta^n \text{ CONVERGE}\}$

SUPPONIAMO ORA $|a| \leq |b|$ SENZA PERDERE GENERALITÀ.



OSSERVIAMO SUBITO CHE $[a,b] \subset [-|b|, |b|] \subset (-\rho, \rho)$.

POICHÉ ρ È $\sup C$, E CIOÈ IL MINORE DEI MAGGIORANTI, ESISTE SEMPRE $\eta \in C$ TALE CHE:

$$\forall b \in (-\rho, \rho) : |b| < \eta < \rho, \quad \sum_{n\geq 0} a_n \eta^n \text{ CONVERGE}$$

PER IL TEOREMA DI ABEL SE CONVERGE IN η LO FARÀ TOTALMENTE IN OGNI INTERVALLO LIMITATO CONTENUTO IN $(-\eta, \eta)$, QUINDI ANCHE IN $[a,b]$ □

dim: SAPPIAMO CHE $0 \leq \rho < \infty$ E $\hat{x} \notin [-\rho, \rho]$ E DOBBIAMO MOSTRARE CHE LA SERIE NUMERICA $\sum_{n\geq 0} a_n \hat{x}^n$ NON CONVERGE.

POSSIAMO SCRIVERE CHE $|\hat{x}| > \rho$ E QUINDI $|\hat{x}| \notin C$ E DUNQUE, SE $\hat{x}$ FOSSE POSITIVO AVREMMO FINITO, INFATTI $\hat{x} \notin C \Rightarrow$ LA SERIE NON CONVERGE.

SE $\hat{x} < 0$ AVREMO $-\hat{x} > \rho \Leftrightarrow \hat{x} < -\rho$.

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE CHE $\sum_{n\geq 0} a_n \hat{x}^n$ CONVERGA.

PRENDIAMO ORA $b > 0$ TALE CHE $\rho < b < |\hat{x}|$

PER IPOTESI ASSURDA E PER IL TEOREMA DI ABEL LA SERIE CONVERGE TOTALMENTE SU $[-b, b]$ POICHÉ CONTENUTO SU $(-|\hat{x}|, |\hat{x}|)$, MA CIÒ È ASSURDO POICHÉ $b > \rho$ E QUINDI $b \notin C$.

QUESTO VUOL DIRE CHE PER $|\hat{x}| > \rho$ LA SERIE NON CONVERGE □

TEOREMA DI ABEL (SECONDO)

PRECEDENTEMENTE ABBIAMO EVITATO DI STUDIARE IL CASO IN CUI, DATA UNA SERIE $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ CON RAGGIO DI CONVERGENZA ρ, x SIA PARI A ρ O $-\rho$.

QUESTO CASO VA STUDIATO DI VOLTA IN VOLTA.

TUTTAVIA IL TEOREMA DI ABEL (SECONDO) AFFERMA CHE SE LA SERIE $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ CONVERGE IN ξ ALLORA CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $[0, |\xi|]$.

LA SERIE CONVERGE TOTALMENTE SU $[-\rho, \rho]$ SE E SOLO SE CONVERGE ASSOLUTAMENTE (NOTA LE IPOTESI DEL SECONDO PUNTO DEL TEOREMA DI ABEL 1) NEGLI ESTREMI DI C.

COROLLARIO

SIA $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ CONVERGENTE IN ξ, ALLORA $f(x)$ SARÀ CONTINUA IN $[0, \xi]$

ESEMPIO

SIA $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

PER $x = -1$ NON CONVERGE $\Rightarrow$ NON CONVERGERÀ PER OGNI $|x| > 1$

PER $x = 1$ CONVERGE $\Rightarrow \rho = 1$

QUINDI LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE IN OGNI $[a,b] \subset (-1, 1]$ E CONVERGE ASSOLUTAMENTE IN OGNI $[a,b] \subset (-1, 1)$ E $f(x) := \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ È CONTINUA IN $(0, 1]$

COME CALCOLARE IL RAGGIO DI CONVERGENZA

ANZITUTTO OSSERVIAMO CHE:

$$\rho^{-1} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \rho = \infty \\ 1/\rho & \Rightarrow \rho \in \mathbb{R} - \{0\} \\ +\infty & \Rightarrow \rho = 0 \end{cases}$$

DA QUI POSSIAMO PROCEDERE CON IL TEOREMA DI CAUCHY - HADAMARD, CHE AFFERMA:

SE ESISTE IL LIMITE $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ALLORA $\rho^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

dim: CHIAMIAMO $b_n = a_n x^n$ E CALCOLIAMONE IL LIMITE:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\,\alpha$$

DOVE $\alpha := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ CHE ESISTE PER IPOTESI.

PER IL CRITERIO DELLA RADICE AVREMO I POSSIBILI RISULTATI:

- $|x|\,\alpha < 1$ LA SERIE CONVERGE E QUINDI $\forall\, |x| < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \rho \geq \frac{1}{\alpha}$
- $|x|\,\alpha > 1$ LA SERIE NON CONVERGE E QUINDI $|x| > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \rho \leq \frac{1}{\alpha}$

DA CIÓ CONCLUDIAMO (STRUTTURA DELL'INSIEME DI CONVERGENZA) CHE ρ É IL RAGGIO DI CONVERGENZA (PER X MINORI LA SERIE NON CONVERGE E PER X MAGGIORI CONVERGE) E VALE: $\rho = \frac{1}{\alpha}$ □

IN ALTERNATIVA É POSSIBILE SFRUTTARE IL TEOREMA DI D'ALAMBERT CHE SI BASA SUL CRITERIO DEL RAPPORTO, E QUINDI SULL'UGUAGLIANZA:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

DOVE SE ESISTE IL LIMITE DEL RAPPORTO ($a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$!) ESISTERÁ ANCHE QUELLO DELLA RADICE MA NON VALE VICEVERSA.

TEOREMA (SERIE CON STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA)

Vittorio Alzetta

SIANO $(a_n)_n$ E $(b_n)_n$ DUE SUCCESSIONI NUMERICHE E CONSIDERIAMO LA SERIE DI POTENZE AD ESSE ASSOCIATE, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ CON RAGGIO DI CONVERGENZA ρ_a E $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ CON RAGGIO DI CONVERGENZA ρ_b.

- SE ESISTONO $\beta \geq \alpha > 0$ TALI CHE $\alpha |b_n| \leq |a_n| \leq \beta |b_n|$ DEFINITIVAMENTE (DA UN n IN POI), ALLORA $\rho_a = \rho_b$
- SE ESISTONO $\beta \geq \alpha > 0$ TALI CHE $\alpha |b_n| \leq n |a_n| \leq \beta |b_n|$ DEFINITIVAMENTE (DA UN n IN POI), ALLORA $\rho_a = \rho_b$
- IN PARTICOLARE POTREMO DIRE CHE SE $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$ O SE $\lim_{n\to+\infty} \frac{n|a_n|}{|b_n|} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$ ALLORA $\rho_a = \rho_b$.

dim: BASTA DIMOSTRARE LA 2 PER CONCLUDERE CHE VALE ANCHE LA 1; APPLICHIAMO LA RADICE n-ESIMA AI 3 MEMBRI DELLA CATENA DI DISUGUAGLIANZE:

$$\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \leq \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\beta} \cdot \sqrt[n]{|b_n|}$$

PORTANDO TUTTO AL LIMITE, E RICORDANDO CHE $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \rho_b^{-1}$, AVREMO:

$$1 \cdot \rho_b^{-1} \leq 1 \cdot \rho_a^{-1} \leq 1 \cdot \rho_b^{-1}$$

E DA $\rho_b \in \geq \rho_a \geq \rho_b$ AVREMO LA TESI $\rho_a = \rho_b$ □

ESEMPIO DI APPLICAZIONE

LE SEGUENTI SERIE, IN BASE AL TEOREMA APPENA DIMOSTRATO, HANNO LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA:

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n \,,\ \sum_{n\geq 1} n\, a_n x^n \,,\ \sum_{n\geq 1} n^{10} a_n x^n \,,\ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} \cdot x^n \,,\ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^{15}} x^{n+1}$$

BASTANO PER LE PRIME 2, POI É ANALOGO. $\overset{\alpha}{1} \cdot \overset{b_n}{|a_n|} \leq n|a_n| \leq \overset{\beta}{1} \overset{b_n}{|a_n|} \Rightarrow$ STESSO ρ

POI POSSO PASSARE A CONFRONTARE $n a_n$ CON $n^2 a_n$ E VIA COSÍ FINO A $n^{10} a_n$, OTTENENDO CHE HA LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA DI a_n.

LA STESSA COSA VALE DIVIDENDO, $\frac{a_n}{n} x^n$ HA LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA DI $\frac{a_n}{n^{10}} x^n$ SE SI CONFRONTANO UNA ALLA VOLTA LE SUCCESSIONI CON DENOMINATORE DI GRADO CRESCENTE.

Vittorio Alzetta

SVILUPPI IN SERIE DI POTENZE

IN QUESTO CAPITOLO CAPIREMO COME APPROSSIMARE UNA CLASSE DI FUNZIONI DEL TIPO:

$$f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R} \quad , \quad r \in (0, +\infty]$$

CON DEI POLINOMI, CHE SONO INDUBBIAMENTE PIÚ FACILI DA TRATTARE. PER TUTTE LE FUNZIONI f CHE APPROSSIMEREMO AVREMO LA POSSIBILITÁ DI SCRIVERE:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

DOVE $p_n(x)$ É IL **POLINOMIO DI TAYLOR** PER f DI ORDINE n CON PUNTO INIZIALE x_0. MENTRE PER OGNI $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$ AVREMO CHE $R_n \to 0$ UNIFORMEMENTE SU $[a, b]$ QUANDO $n \to +\infty$.

DA CUI POSSIAMO RICAVARE CHE $p_n \to f$ UNIFORMEMENTE SU $[a, b]$.

DI QUI IN AVANTI CONSIDEREREMO IL CASO IN CUI $x_0 = 0$, NON PERDEREMO DI GENERALITÁ MA SARÁ SEMPLICEMENTE PIÚ FACILE DA TRATTARE.

TEOREMA DI DERIVAZIONE PER SERIE DI POTENZE

SIA $\rho > 0$ IL RAGGIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ CON SOMMA DEFINITA COME $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ (LA FUNZIONE CHE AD OGNI x ASSOCIA IL VALORE A CUI CONVERGE LA SERIE DI FUNZIONI) ALLORA:

1) $f \in C^{\infty}(-\rho, \rho)$ (É k NON SEMPRE $+\infty$), CIOÉ É DERIVABILE ∞ VOLTE IN $(-\rho, \rho)$

2) $\forall k \geq 0 : \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$ HA RAGGIO DI CONVERGENZA ρ (sono numeri!)

3) $\forall k \geq 0$ E $x \in (-\rho, \rho) : f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$

4) $\forall k \geq 0 : f^{(k)}(0) = k! a_k \quad \left(a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right)$ DA CUI

$$P(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Vittorio Alzetta

dim: • ANZITUTTO NOTIAMO CHE f É LA SOMMA DI FUNZIONI C^∞ (SONO SERIE DI POTENZE). SAPPIAMO INOLTRE CHE PER OGNI $[a,b] \subset (-\rho,\rho)$ LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE A f E DUNQUE f SARÁ CONTINUA IN $[a,b]$ CON (COROLLARIO TEOREMA DI ABEL)

$$f(0) = a_0 + a_1 0^1 + a_2 \cdot 0^2 + \dots = a_0 .$$

PER $h=0$ VALGONO LA 2), 3), 4).

• PROVIAMO ORA A DIMOSTRARLE PER $h=1$

SIA $I \subset (-\rho,\rho)$ CHIUSO E LIMITATO.

LA SERIE $\sum_{n\geq 0} a_n x^n =: f(x)$ E QUELLA DELLE DERIVATE (OTTENUTA DERIVANDO) $\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1} =: g(x)$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE SU I (LA SECONDA PER IL TEOREMA SULLE SERIE CON LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA). ORA, PER IL TFLSSD ABBIAMO CHE f É DERIVABILE E QUINDI APPARTENENTE A C^1 (LA 1) É VERIFICATA), LA SERIE DELLE DERIVATE, PER COME É SCRITTA, VERIFICA LA TESI 2); LA SERIE DELLE DERIVATE CONVERGE ALLA DERIVATA DELLA SOMMA (NEL TFLSSD) E QUINDI CON $f' = g$ É VERIFICATA LA 3); INFINE, SOSTITUENDO $x=0$, OTTENIAMO $f'(0) = 1 \cdot a_1 \cdot 0^0 + 2 a_2 0^1 + \dots = a_1$ IL CHE VERIFICA LA 4).

ORA SI PUÓ RIPETERE IL RAGIONAMENTO PER $f^{(1)}(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, CHE É UNA SERIE DI POTENZE, PERTANTO DERIVABILE ANDANDO A DERIVARE I TERMINI DELLA SERIE:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \sum_{n\geq 1} D\left(n a_n x^{n-1}\right) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

CON $f''(0) = 2(2-1)a_2 + 3(3-1)a_3 \cdot 0 + \dots = 2(2-1)a_2 = 2a_2$

IL RAGIONAMENTO SI PUÓ ITERARE $\forall h \in \mathbb{N}$ □

TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER SERIE DI POTENZE

SIA $\rho > 0$ IL RAGGIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI POTENZE $\sum_{n\geq 0} a_n x^n =: f(x)$.

AVREMO CHE LA SERIE DI POTENZE:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

HA RAGGIO DI CONVERGENZA ρ E:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad \forall x \in (-\rho,\rho)$$

SE CI PENSIAMO $f(\bar{x})$ É CI DÁ IL VALORE A CUI CONVERGE LA SERIE SE SOSTITUIAMO $\bar{x}$ AL POSTO DI x, É INTUITIVO PENSARE CHE SE FACCIAMO LA SOMMA DI TUTTI QUESTI VALORI A CUI CONVERGE LA SERIE IL RISULTATO POTREBBE ESSERE UGUALE A ALL'INTEGRALE (CHE DI FATTO É UNA SOMMA) TRA 0 E x DELLA FUNZIONE CHE RACCOGLIE NEL SUO CODOMINIO I SUDDETTI VALORI DI "CONVERGENZA".

dim: SUPPONIAMO $x \in (-\rho,\rho)$ E $x > 0$, IL CASO $x < 0$ É ANALOGO:

É APPLICABILE IL TFLSSI, INFATTI LE $f_n^{(x)}$ SONO RIEMANN-INTEGRABILI (SERIE POLINOMI) E CONVERGONO UNIFORMEMENTE A $f(x)$ IN $[0,x]$, DUNQUE:

$$\int_0^x f(t)\,dt \overset{\text{Hp.}}{=} \int_0^x \sum_{n\geq 0} a_n x^n \overset{\text{TFLSSI}}{=} \sum_{n\geq 0} \int_0^x a_n x^n \overset{\text{HO INTEGRATO}}{=} \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

□

SERIE DI POTENZE CON $x_0 \neq 0$

SONO SERIE DEL TIPO $\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$, DI FATTO É LA STESSA COSA DI CONSIDERARE $\sum_{n\geq 0} a_n x$, INFATTI SE LA SECONDA CONVERGE UNIF. / PUNT. / TOT. IN $[a,b]$ ALLORA LA PRIMA CONVERGE RISP. UNIF. / PUNT. / TOT. IN $[a+x_0, b+x_0]$.

E L'INSIEME DI CONVERGENZA DELLA PRIMA SARÁ: $(x_0-\rho, x_0+\rho) \subset C \subset [x_0-\rho, x_0+\rho]$.

Vittorio Alzetta

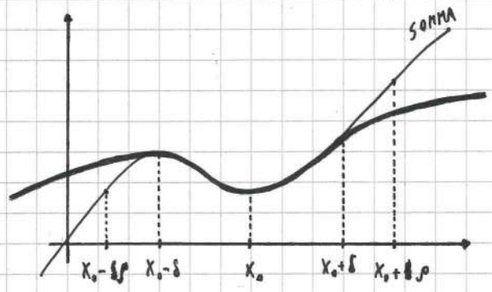
SVILUPPABILITÁ IN SERIE DI POTENZE DI TAYLOR

QUI DAREMO LA DEFINIZIONE DI FUNZIONI APPROSSIMABILI CON UNA SERIE DI POTENZE, CIOÉ LA PREMESSA FATTA AD INIZIO CAPITOLO.

SIA $f : I \to \mathbb{R}$ E SIA X_0 PUNTO INTERNO ALL'INTERVALLO I. DIREMO CHE f É SVILUPPABILE IN SERIE DI POTENZE DI TAYLOR DI CENTRO O PUNTO INIZIALE X_0 SE ESISTE $\delta > 0$ ED UNA SUCCESSIONE $(a_n)_{n\geq 0}$ TALE CHE LA SERIE $\sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$ HA RAGGIO DI CONVERGENZA $\rho \geq \delta$ E LA SUA SOMMA COINCIDE CON f IN $(x_0-\delta, x_0+\delta)$:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

PUÓ ESSERE UTILE A COMPRENDERE MEGLIO LA DEFINIZIONE IL SEGUENTE GRAFICO:



É CHIARO CHE AFFINCHÉ f SI POSSA APPROSSIMARE LA SOMMA DELLA SERIE DEVE ALMENO ESISTERE IN UN INTORNO PIÚ GRANDE DI QUELLO IN CUI VOGLIAMO APPROSSIMARE f.

SE DUNQUE f É SVILUPPABILE SECONDO TAYLOR ALLORA, PER IL TEOREMA DI DERIVAZIONE PER LE SERIE DI POTENZE, $f \in C^\infty$ E $f^{(n)}(x_0) = a_n n!$.

POTREMO QUINDI SCRIVERE f É SVILUPPABILE SECONDO TAYLOR IN UN INTORNO DI X_0 SE:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

DOVE LA SERIE É CHIAMATA SERIE DI TAYLOR DI CENTRO X_0, O DI MAC LAURIN SE $X_0 = 0$.

QUESTA SERIE DI POTENZE AVRÁ RAGGIO DI CONVERGENZA $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$ E PERTANTO CONVERGERÁ TOTALMENTE IN OGNI $[a, b] \subset (x_0-\rho, x_0+\rho)$.

SCRIVIAMO LA SERIE DI TAYLOR PER ESTESO:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n}_{\text{QUESTO É IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE O GRADO } n} + \underbrace{\sum_{n=n+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n}_{\text{IL RESTO, CIOÉ I TERMINI RESTANTI DA } n+1 \text{ A } \infty}$$

PER $n \to +\infty$ IL POLINOMIO CONVERGE UNIFORMEMENTE A f E IL RESTO A 0.

ESEMPIO

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE FUNZIONE:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

É DERIVABILE ∞ VOLTE IN $\mathbb{R}$ (DOMINIO) E $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, MA NONOSTANTE CIÓ ABBIAMO CHE:

$$f(x) \neq \sum_{n\geq 0} 0 = 0 \quad \Rightarrow f \text{ NON É SVILUPPABILE SECONDO TAYLOR IN } x_0 = 0$$

↑ ESSENDO LA DERIVATA n-ESIMA 0 IL POLINOMIO SARÁ SEMPRE NULLO

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA SVILUPPABILITÁ

SIA I UN INTERVALLO APERTO E $f \in C^\infty(I)$ CON $x_0 \in I$. f É SVILUPPABILE SECONDO TAYLOR IN X_0 SE E SOLO SE ESISTONO $M > 0$, $\delta > 0$ TALI CHE:

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \ \forall n \in \mathbb{N} : \ |f^{(n)}(x)| < M$$

IN SOSTANZA f É SVILUPPABILE SE $(f^{(n)})_n$ É EQUILIMITATA IN UN INTORNO DI X_0.

SPAZI METRICI

CONSIDERIAMO PER INIZIARE L'INSIEME $D \subseteq \mathbb{R}^2$ E LA FUNZIONE $f: D \to \mathbb{R}$.

POTREMO INDICARE f IN NOTAZIONE VETTORIALE COME:

$$f : P \to f(P) \quad \text{CON } P \in D$$

O IN ALTERNATIVA IN NOTAZIONE SCALARE, COME:

$$f:(x,y) \to f(x,y) \quad \text{CON } (x,y) \in D$$

AD ESEMPIO POTREMO AVERE $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ CHE HA INSIEME DI DEFINIZIONE $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 9\}$, CIOÉ UN DISCO DI CENTRO 0 E RAGGIO 3.

VALGONO LE STESSE CONSIDERAZIONI ANCHE PER $D \subseteq \mathbb{R}^3$, SI POTREBBE CONSIDERARE L'ESEMPIO $f(x,y,z) = \sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$ CON DOMINIO $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$ OVVERO LA PALLA DI CENTRO 0 E RAGGIO 3.

PER PROCEDERE EVIDENZIAMO ALCUNE STRUTTURE CHE POSSONO ESSERE DEFINITE IN $\mathbb{R}^2$ E CHE POI ESTENDEREMO A $\mathbb{R}^n$:

- STRUTTURA ALGEBRICA O SPAZIO VETTORIALE
- SPAZIO NORMATO
- PRODOTTO SCALARE
- SPAZIO TOPOLOGICO

PRIMA DI INIZIARE FACCIO OSSERVARE CHE SE IN $\mathbb{R}^2$ CI SI RIFERIVA ALLI ELEMENTI $P \in \mathbb{R}^2$ COME $P = (x,y)$ ORA, IN $\mathbb{R}^n$, LO FAREMO COSÍ:

$$\mathbb{R}^n = \{ P = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$$

SPAZIO VETTORIALE

Vittorio Alzetta

SIA X UN INSIEME NON VUOTO E SIANO $P, Q \in X$ CON $\lambda \in \mathbb{R}$, AVREMO CHE:

$$+ : X \times X \mapsto X \qquad \cdot : X \mapsto X$$
$$(P,Q) \to P+Q \qquad P \to \lambda P$$

SE LE OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO ESTERNO SODDISFANO LE SEGUENTI 8 PROPRIETÁ ALLORA X SARÁ CHIAMATO SPAZIO VETTORIALE:

- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ (ASSOCIATIVA)
- $P + Q = Q + P$ (COMMUTATIVA)
- $\exists\, 0 \in X : \forall P \in X : P + 0 = P$ (EL. NEUTRO)
- $\exists\, P' \in X : \forall P \in X : P + P' = 0$ (P' SARÁ INDICATO CON $-P$) (EL. OPPOSTO)
- $\alpha \cdot (\beta \cdot P) = (\alpha\beta) \cdot P$ (ASSOCIATIVA)
- $\exists\, 1 \in X : \forall P \in X : P \cdot 1 = P$ (EL. NEUTRO)
- $\lambda \cdot (P+Q) = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q$ (DISTRIBUTIVA)
- $(\alpha + \beta) \cdot P = \alpha \cdot P + \beta \cdot P$ (DISTRIBUTIVA)

AGGIUNGO CHE CHIAMEREMO VETTORI GLI ELEMENTI DI X.

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

- L'INSIEME $\mathbb{R}^n$ É UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n (SI VEDA LA DEFINIZIONE DATA IN ALGEBRA LINEARE) RISPETTO ALLE OPERAZIONI DI SOMMA E DI PRODOTTO ESTERNO, INFATTI ABBIAMO CHE:

$$P + P' = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', \dots, x_n + x_n')$$
$$\lambda P = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n)$$

LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$ É $\mathcal{B}_1$ FORMATA DAI VETTORI:

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0) \quad e_2 := (0, 1, \dots, 0) \quad \dots \quad e_n := (0, 0, \dots, 1)$$

E A PARTIRE DA ~~CHE~~ CIÓ ~~CONTINUA~~ POSSIAMO ESPRIMERE QUALSIASI PUNTO DI $\mathbb{R}^n$ COME COMBINAZIONE LINEARE DELLA BASE CANONICA:

$$P = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

- UN ALTRO ESEMPIO PUÓ ESSERE L'INSIEME DEI POLINOMI ~~DA~~ A COEFFICIENTI IN $\mathbb{R}$ DI GRADO MINORE O UGUALE A 100:

$$X := \{ P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : P \text{ É UN POLINOMIO DI GRADO} \leq 100 \}$$

LA CUI BASE CANONICA É $P_n(x) = x^n$ CON $n \in \{0, 1, \dots, 100\}$ (DIMENSIONE 101)

- CIÓ CHE SEGUIRÁ SARÁ L'ELENCO DI 4 SPAZI VETTORIALI, IL PRIMO DI QUESTI CONTERRÁ AL SUO INTERNO L'INSIEME DEI POLINOMI DESCRITTO POCO FA (GRADO ≤ 101), A SEGUIRE GLI ALTRI SARANNO INSIEMI SEMPRE PIÚ GRANDI CHE CONTERRANNO IL PRECEDENTE:

  - INSIEME DEI POLINOMI (DIMENSIONE INFINITA)
  - INSIEME DELLE FUNZIONI CONTINUE ($X = C([a,b])$)
  - INSIEME DELLE FUNZIONI CONTINUE E LE LORO DERIVATE FINO ALLA K-ESIMA ($X = C^k([a,b])$)
  - INSIEME DELLE FUNZIONI CONTINUE CON TUTTE LE DERIVATE ($X = C^\infty([a,b])$)

Vittorio Alzetta

LA METRICA

SIA X UN INSIEME QUALSIASI NON VUOTO. DEFINIAMO METRICA O DISTANZA IN X UNA FUNZIONE:

$$d : X \times X \to [0, +\infty)$$

CHE SODDISFA LE SEGUENTI PROPRIETÁ:

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (NON DEGENERAZIONE)
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$ (SIMMETRICA)
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in X$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

CHIAMEREMO INOLTRE SPAZIO METRICO LA COPPIA (X, d), DOVE d É LA METRICA E X É DETTO SOSTEGNO DELLO SPAZIO METRICO.

ESEMPI DI SPAZI METRICI

- LA COPPIA $\mathbb{R}^n$ E METRICA EUCLIDEA RAPPRESENTA UNO SPAZIO METRICO, INFATTI:

$$d(P, P') = 0 \iff \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \dots + (x_n - x_n')^2}$$
$$\iff (x_1 = x_1') \wedge (x_2 = x_2') \wedge \dots \wedge (x_n = x_n')$$
$$\iff P = P'$$

$$d(P, P') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \dots + (x_n - x_n')^2} = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + \dots + (x_n' - x_n)^2}$$
$$= d(P', P)$$

LA DIMOSTRAZIONE DELLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE VA É RIMANDATA AD UN MOMENTO IN CUI AVREMO STRUMENTI PIÚ POTENTI.

- LA METRICA DISCRETA IN UN QUALSIASI INSIEME X FORMA UNO SPAZIO METRICO:

$$d_{DIS}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{SE } x = y \\ 1 & \text{SE } x \neq y \end{cases}$$

INFATTI VALGONO LE 3 PROPRIETÁ:

D1) $[d_{bis}(X,Y) = 0 \iff X = Y$ PER DEFINIZIONE

D2) $\begin{cases} d_{bis}(X,Y) = 0 \wedge d_{bis}(Y,X) = 0 & \text{CASO } X = Y \\ d_{bis}(X,Y) = 1 \wedge d_{bis}(X,Y) = 1 & \text{CASO } X \neq Y \end{cases}$

D3) $\begin{cases} d_{bis}(X,Y) \leq d_{bis}(X,Z) + d_{bis}(Z,Y) & \text{CASO } X = Y \\ 0 \leq \text{QUALSIASI COSA CI SIA DI QUA} \\ d_{bis}(X,Y) \leq d_{bis}(X,Z) + d_{bis}(Z,Y) & \text{CASO } X \neq Y \\ 1 \leq \text{SICURAMENTE UN NUMERO} \geq 1 \text{ PERCHÉ} \\ \quad \text{Z PUÓ ESSERE UGUALE O A X O A Y} \end{cases}$

- POSSIAMO ANCHE DEFINIRE LA SEGUENTE METRICA:

$$d(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

CHE SODDISFA LE TRE PROPRIETÁ DATE PRIMA:

D1) $[d(x,y) = 0 \iff |\arctan(x) - \arctan(y)| = 0 \iff \arctan(x) = \arctan(y)$

D2) $[d(x,y) = d(y,x)$ C'É IL VALORE ASSOLUTO CHE CI PERMETTE DI DIRLO

D3) $\begin{cases} d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \iff \text{(effettuo il)} \\ \iff |\arctan(x) - \arctan(y)| = |\arctan(x) - \arctan(z) + \arctan(z) - \arctan(y)| \\ \leq |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(z) - \arctan(y)| \end{cases}$

GLI SPAZI NORMATI

Vittorio Alzetta

SIA X UNO SPAZIO VETTORIALE. DEFINIAMO NORMA SU X UN'APPLICAZIONE DEFINITA COME:

$$\|-\| : X \to \mathbb{R}$$

CHE SODDISFA LE SEGUENTI 3 PROPRIETÁ:

- $\|P\| \geq 0$ DOVE VALE L'UGUAGLIANZA SE E SOLO SE $P = 0$ (POSITIVITÁ)
- $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$ CON $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in X$ (POSITIVA OMOGENEITÁ)
- $\|P + P'\| \leq \|P\| + \|P'\|$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

CHIAMEREMO SPAZIO NORMATO LA COPPIA $(X, \|-\|)$, MENTRE LA FUNZIONE:

$$t : X \times X \mapsto [0, +\infty)$$
$$(P,Q) \mapsto \|P - Q\|$$

VERRÁ CHIAMATA DISTANZA INDOTTA DALLA NORMA.

SI OSSERVI CHE MENTRE PER DEFINIRE GLI SPAZI NORMATI CI SIAMO POSTI IN UNO SPAZIO VETTORIALE, PER DESCRIVERE QUELLI METRICI ABBIAMO CONSIDERATO UN INSIEME DI PARTENZA QUALSIASI.

DIMOSTRIAMO BREVEMENTE CHE t É UNA DISTANZA MOSTRANDO CHE GODE DELLE FAMOSE 3 PROPRIETÁ:

D1) LA PRIMA É DIMOSTRATA A PARTIRE DALLA PRIMA PROPRIETÁ DELLA NORMA

D2) VOLLIAMO MOSTRARE CHE $\|P - Q\| = \|Q - P\|$. SAPENDO CHE $|\lambda| \|P\| = \|\lambda P\|$ ABBIAMO CHE $|-1| \|P\| = \|-P\| \iff \|-P\| = \|P\| \iff \|P-Q\| = \|(-P)-(-Q)\| = \|Q-P\|$

D3) $\|P - Q\| = \|P - R + R - Q\| \leq \|P - R\| + \|R - Q\|$

↑ TERZA PROPRIETÁ DELLA NORMA

Vittorio Azzetta

ESEMPIO DI SPAZIO NORMATO

- SIA S UN INSIEME NON VUOTO, SIA $B(S)$ L'INSIEME DELLE FUNZIONI DA S IN $\mathbb{R}$ LIMITATE. ORA PER SEMPLICITÁ CI RIFERIREMO A $B(S)$ CON X.

DEFINIAMO PER OGNI $f \in X$ LA SEGUENTE NORMA:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in S} |f(x)|$$

CHE CHIAMEREMO NORMA UNIFORME O INFINITO, DIMOSTRIAMO CHE SI TRATTA EFFETTIVAMENTE DI UNA NORMA:

N1)
- OVVIAMENTE $\|f\|_\infty \geq 0$, SI TRATTA DEL SUP DI UN VALORE ASSOLUTO!
- QUINDI $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

N2)
- SIANO $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in B(S)$ E $x \in S$, ALLORA:
- $|\lambda f(x)| = |\lambda|\,|f(x)| \leq |\lambda| \sup |f(x)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty$ } VALE $\forall x \in S$, QUINDI ANCHE PER IL SUP!
- $\sup |\lambda f(x)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty \Leftrightarrow \|\lambda f(x)\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$

N3)
- SIANO $f, g \in B(S) = X$ E $x \in S$, AVREMO:
- $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup |f(x)| + \sup |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$
- LA COSA VALE PER OGNI $x \in S$ QUINDI ANCHE PER IL SUP
- $\sup |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \Leftrightarrow \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

ABBIAMO QUINDI CHE $(B(S), \|-\|_\infty)$ É UNO SPAZIO NORMATO, LA DISTANZA INDOTTA DA QUESTA NORMA É DETTA DISTANZA DEL SUP ED É DEFINITA COME:

$$d(f, g) := \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in S} |f - g|$$

- UN ALTRO ESEMPIO DI NORMA É IL SEGUENTE:

$$\|P\|_\infty := \max \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

DOVE CI TROVIAMO IN $\mathbb{R}^n$ E $P = (x_1, \ldots, x_n)$. LA NORMA É DETTA NORMA DEL SUP

LA DISTANZA INDOTTA SARÁ:

$$d_{sup}(P, P') := \max \{|x - x'|, \ldots, |x_n - x_n'|\}$$

CON $P, P' \in \mathbb{R}^n$.

- UN ALTRO ESEMPIO É QUELLO DELLA MANHATTAN METRIC, CHE PRENDE IL NOME DALLA STRUTTURA DELLA CITTÁ, ED É COSÍ DEFINITA:

$$\|P\|_1 := |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

DOVE $P \in \mathbb{R}^n$. QUESTA É ANCHE DETTA NORMA - 1, VALGONO INFATTI LE TRE PROPRIETÁ:

N1) $\|P\|_1 = 0 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = |x_3| = \ldots = |x_n| = 0 \Leftrightarrow P = 0$

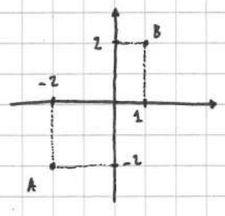
N2) $\|\lambda P\|_1 = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \ldots + |\lambda x_n| = |\lambda|(|x_1| + \ldots + |x_n|) = |\lambda|\,\|P\|_1$

N3) $\|P + P'\|_1 = |x_1 + x_1'| + \ldots + |x_n + x_n'| \leq |x_1| + |x_1'| + \ldots + |x_n| + |x_n'| = \|P\|_1 + \|P'\|_1$

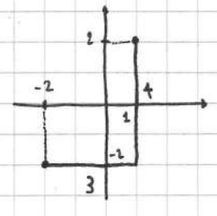
LA DISTANZA INDOTTA É DEFINITA COME:

$$d_1(P, P') := |x_1 - x_1'| + |x_2 - x_2'| + \ldots + |x_n - x_n'|$$

IL SEGUENTE DISEGNO PUÓ AIUTARE A CAPIRE MEGLIO QUESTA DISTANZA:



$$d(A, B) = |-2-1| + |-2-2| = 3 + 4 = 7$$



Vittorio Alzetta

- UN ULTIMO IMPORTANTE ESEMPIO É QUELLO DELLA NORMA-q. SIA $q \geq 1$ E $P \in \mathbb{R}^n$, DEFINIAMO LA NORMA-q COME:

$$\| P \|_q := \left(|x_1|^q + |x_2|^q + \dots + |x_n|^q \right)^{1/q}$$

É DIMOSTRABILE CHE SI TRATTA DI UNA NORMA, MA NON LO VEDREMO.

SI OSSERVI CHE NEL CASO $q = 2$ AVREMO:

$$\| P \|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

OVVERO LA NORMA EUCLIDEA (DISTANZA DI P DALL'ORIGINE).

MENTRE PER $q = 1$ OTTENIAMO:

$$\| P \|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

ESATTAMENTE LA NORMA-1

SECONDA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

ANZITUTTO FISSIAMO $x, y, z \in X$ E SCRIVIAMO LA CLASSICA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$d(x,y) + d(x,z) \leq d(z,y) \qquad [1]$$

DA CUI, SOSTITUENDO z CON y OTTENIAMO:

$$d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$$

MOLTIPLICHIAMO ORA PER -1 E SCAMBIAMO I DUE TERMINI DELLA DISTANZA A DX (É SIMMETRICA LA DISTANZA):

$$-d(x,z) + d(x,y) \geq -d(z,y) \qquad [2]$$

METTENDO INSIEME LA [1] E LA [2] OTTENIAMO:

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(z,y)$$

SOTTOSPAZIO METRICO E SOTTOSPAZIO NORMATO

SIA (X, d) UNO SPAZIO METRICO E SIA $A \subset X$.

PRESA $d|_A$ LA RESTRIZIONE DELLA METRICA d ALL'INSIEME $A \times A$ CHIAMEREMO $d|_A$ METRICA INDOTTA IN A E LA COPPIA $(A, d|_A)$ SOTTOSPAZIO METRICO DI (X, d).

SIA INVECE $(X, \|-\|)$ UNO SPAZIO NORMATO E SIA B SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI X.

PRESA $\|-\|_B$ LA RESTRIZIONE DELLA NORMA $\|-\|$ ALL'INSIEME B CHIAMEREMO $\|-\|_B$ NORMA INDOTTA IN B E LA COPPIA $(B, \|-\|_B)$ SOTTOSPAZIO NORMATO DI $(X, \|-\|)$.

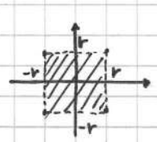
TOPOLOGIA IN UNO SPAZIO METRICO

SIA (X, d) UNO SPAZIO METRICO. PRENDIAMO $x_0 \in X$ E $r > 0$, DEFINIAMO PALLA (O INTORNO SFERICO) DI CENTRO x_0 E RAGGIO r L'INSIEME:

$$B_r(x_0) := \{ x \in X : d(x, x_0) < r \}$$

ESEMPI

- IN $\mathbb{R}$ CON LA DISTANZA EUCLIDEA LA PALLA DI RAGGIO r E CENTRO x_0 É L'INTERVALLO $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$
- IN $\mathbb{R}^2$ CON LA DISTANZA EUCLIDEA LA PALLA DI RAGGIO r E CENTRO x_0 (É UN PUNTO (x_0, y_0)) É IL DISCO $B_r(x_0) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2 \}$
- IN $\mathbb{R}^2$ CON LA DISTANZA DEL SUP (CONSISTE SOSTANZIALMENTE NEL CONSIDERARE LA COORDINATA PIÚ GRANDE NEL CASO IN CUI IL CENTRO SIA $(0,0)$ L'ORIGINE O COMUNQUE LA COORDINATA CHE PIÚ SI ALLONTANA DA x_0, IL CENTRO) LA PALLA CON RAGGIO r E CENTRO x_0 É:



INSIEME LIMITATO

SIA (X, d) UNO SPAZIO METRICO E SIA $E \subset X$. DIREMO CHE E É LIMITATO IN X SE ESISTE UNA PALLA DI RAGGIO r E CENTRO x_0 CHE CONTIENE E.

NE SONO ESEMPI:

- UNA PALLA, D'ALTRONDE NE ESISTE SEMPRE UNA CON RAGGIO MAGGIORE
- UN INSIEME FINITO DI PUNTI
- $\mathbb{R}^3$ CON LA DISTANZA EUCLIDEA NON É LIMITATO.
- IN $\mathbb{R}^2$ CON LA DISTANZA $d(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$ QUALSIASI INSIEME É LIMITATO.

CONVERGENZA SPAZI METRICI

SIA (X, d) UNO SPAZIO METRICO. UNA SUCCESSIONE IN X É UNA FUNZIONE DEFINITA COME:

$$\mathbb{N} \longrightarrow X$$
$$h \longmapsto P_h$$

VERRÁ INDICATA CON $(P_h)_{h \geq 0}$ o $(P_n)_n$ o $(P_h)_{h \in \mathbb{N}}$.

CONSIDERATO $(P_h)_h$ SUCCESSIONE IN (X, d) CON $P \in X$, DIREMO CHE P_h CONVERGE A P NELLO SPAZIO METRICO X SE:

$$\lim_{h \to +\infty} d(P_h, P) = 0 \quad [1]$$

IN GENERALE DIREMO CHE $(P_h)_h$ É CONVERGENTE IN X SE ESISTE UN $P \in X$ A CUI LA SUCCESSIONE CONVERGE.

SI OSSERVI CHE LA [1] CORRISPONDE A DIRE:

- $\forall \varepsilon > 0 \quad P_h \in B_\varepsilon(P)$ DEFINITIVAMENTE (É DENTRO UNA PALLA SEMPRE PIÚ PICCOLA)
- OGNI INTORNO DI P CONTIENE P_h DEFINITIVAMENTE.

IN UNO SPAZIO NORMATO SI DEVE AVERE $\lim_{h \to +\infty} N P_h - P N = 0$

Vittorio Alzetta

UNICITÁ DEL LIMITE

SUPPONIAMO CHE UNA SUCCESSIONE P_h CONVERGA A 2 PUNTI DISTINTI:

$$P_h \to P \quad \wedge \quad P_h \to Q$$

AVREMO PERÓ CHE:

$$0 \leq d(P, Q) \leq d(P, P_h) + d(P_h, Q) \to 0$$

$0 \leq d(P,Q)$: É UNA DISTANZA; $d(P,Q) \leq d(P,P_h) + d(P_h,Q)$: DISUG. TRIANGOLARE; $\to 0$: IPOTESI

E DUNQUE $P = Q$ E IL LIMITE É UNICO.

LIMITATEZZA SUCCESSIONI CONVERGENTI

SIA $P_h \to P$, ALLORA ESISTERÁ UNA PALLA DI RAGGIO 1 E CENTRO P TALE CHE $P_h \in B_1(P)$ DA UN CERTO h IN POI (DEFINITIVAMENTE).

CHIAMIAMO γ IL NUMERO TALE CHE:

$$\forall h > \gamma : P_h \in B_1(P)$$

PONIAMO QUINDI M PARI AL MASSIMO TRA LE DISTANZE DI $P_{h \leq \gamma}$ DA P, AUMENTATO DI 1 (PER ESSERE SICURI) E AVREMO UN RAGGIO DELLA PALLA $B_M(P)$ CHE CONTERRÁ TUTTI I P_h:

$$M := \max\{d(P_0, P_1), d(P, P_2), \dots, d(P, P_\gamma), 1\} + 1$$

(RAGGIO DI PRIMA)

SI AVRÁ:

$$\forall h \in \mathbb{N} : P_h \in B_M(P)$$

Vittorio Alzetta

LIMITE DI FUNZIONI IN $\mathbb{R}^2$

SIA X LO SPAZIO $\mathbb{R}^2$ CON NORMA EUCLIDEA E SIA $(P_h)_h = (x_h, y_h)_h$ UNA SUCCESSIONE IN $\mathbb{R}^2$, SIA ANCHE $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

SI AVRÀ:

$$(x_h, y_h) \to (x_0, y_0) \iff x_h \to x_0 \wedge y_h \to y_0$$

dim: ($\Rightarrow$) SI HA CHE

$$|x_h - x_0| \leq \sqrt{(x_h - x_0)^2 + (y_h - y_0)^2} = \|P_h - P_0\|$$

(ABBIAMO AGGIUNTO UN TERMINE)

E POICHÉ $\|P_h - P_0\| \to 0$ SI AVRÀ CHE $x_h \to x_0$ (ANALOGAMENTE PER y_h).

($\Leftarrow$) IN CORRISPONDENZA DI $\varepsilon > 0$ RISULTA $|x_h - x_0| < \varepsilon$ E $|y_h - y_0| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE, MA QUINDI:

$$\|P_h - P_0\|^2 = (x_h - x_0)^2 + (y_h - y_0)^2 < 2\varepsilon^2 \quad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

E QUINDI:

$$\|P_h - P_0\| < \sqrt{2}\,\varepsilon \quad \text{DEFINITIVAMENTE} \qquad \square$$

PER DIMOSTRARLO IN $\mathbb{R}^n$ DOVREMO FARE GLI STESSI PASSAGGI E CI RITROVEREMO CON n TERMINI SOTTO LA RADICE DELLA DIMOSTRAZIONE ($\Rightarrow$) E CON $\sqrt{n} \cdot \varepsilon^{n/2}$ NELLA DIMOSTRAZIONE ($\Leftarrow$).

CONVERGENZA E DIPENDENZA DALLA METRICA / NORMA

SIA X SPAZIO VETTORIALE CON $\|-\|_a$ E $\|-\|_b$ NORME SU X. DIREMO CHE $\|-\|_a$ E $\|-\|_b$ SONO NORME EQUIVALENTI SE ESISTONO $\alpha, \beta > 0$:

$$\forall P \in X: \quad \alpha \|P\|_a \leq \|P\|_b \leq \beta \|P\|_a$$

QUINDI POSSIAMO AFFERMARE CHE SE DUE NORME SONO EQUIVALENTI ALLORA UNA SUCCESSIONE $(P_h)_h$ CONVERGE A P NELLA PRIMA NORMA SE E SOLO SE CONVERGE A $(P_h)_h$ ANCHE NELLA SECONDA NORMA.

fim: IL FATTO SI DIMOSTRA FACILMENTE SCRIVENDO:

$$\alpha \|P_n - P\|_a \leq \|P_n - P\|_b \leq \beta \|P_n - P\|_a$$

SE CONVERGE IN NORMA $\|-\|_a$ ALLORA CONVERGERÀ ANCHE IN NORMA $\|-\|_b$.

SI PUÒ INVERTIRE LA FORMULA:

$$\frac{1}{\beta}\|P\|_b \leq \|P\|_a \leq \frac{1}{\alpha}\|P\|_b$$

E DIMOSTRARE LA STESSA COSA. $\square$

TEOREMA

ORA CHE ABBIAMO INTRODOTTO IL CONCETTO DI DI NORME EQUIVALENTI, DIMOSTRIAMO CHE IN $\mathbb{R}^n$ (UNO SPAZIO FINITO DIMENSIONALMENTE) TUTTE LE NORME SONO EQUIVALENTI.

PER SEMPLICITÀ DIMOSTREREMO SOLO CHE LE NORME-q SONO EQUIVALENTI PER LORO

Vittorio Alzetta

TOPOLOGIA IN UNO SPAZIO METRICO

SIA (X, d) UNO SPAZIO METRICO E SIA $E \subset X$. PRENDIAMO $x_0 \in X$, DIREMO CHE x_0 É:

- PUNTO INTERNO A E SE ESISTE UN INTORNO SFERICO (UNA PALLA) DI x_0 CONTENUTO IN E
- PUNTO ESTERNO A E SE É INTERNO A E^c, CIOÉ IL SUO COMPLEMENTARE
- PUNTO DI FRONTIERA SE NON É NÉ INTERNO NÉ ESTERNO (OGNI PALLA CONTIENE SIA PUNTI DI E SIA PUNTI DI E^c)
- PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER E SE OGNI PALLA DI CENTRO x_0 CONTIENE ALMENO UN ELEMENTO DI E DIVERSO DA x_0.

DEFINIAMO ORA DEGLI IMPORTANTI SOTTOINSIEMI DI E:

- INSIEME INTERNO: L'INSIEME DEI PUNTI INTERNI DI E (DENOTATO CON $\mathring{E}$)
- INSIEME FRONTIERA (O BORDO): L'INSIEME DEI PUNTI DI FRONTIERA (DENOTATO CON ∂E)
- INSIEME DERIVATO: L'INSIEME DEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI E (DENOTATO CON $D(E)$).
- INSIEME CHIUSURA: L'INSIEME $E \cup D(E)$ (DENOTATO CON $\bar{E}$)

ORA RIPRENDEREMO ALCUNE OSSERVAZIONI FATTE PER $\mathbb{R}$ CHE VALGONO ANCHE IN UNO SPAZIO METRICO.

1) $x_0 \in D(E) \iff \exists (x_n)_n \in E \setminus \{x_0\} : x_n \to x_0$

PER DIMOSTRARLO SI NOTI CHE SE $x_0 \in D(E)$ ALLORA PER OGNI INTORNO DEL TIPO $B_{1/n}(x_0)$ SI HA $B_{1/n}(x_0) \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, E QUINDI PRESO $x_n \in B_{1/n}(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$ AVREMO CHE $x_n \neq x_0$ E $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \to 0$

2) $x_0 \in \partial E \iff \exists (x_n)_n \subset E, (y_n)_n \subset E^c : x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0$

3) $x_0 \in \bar{E} \iff \exists (x_n)_n \subset E : x_n \to x_0$

PER DIMOSTRARLO SI NOTI CHE ($\Rightarrow$) SE $x_0 \in E$ ALLORA POSSIAMO DEFINIRE $x_n := x_0$ CHE VUOL DIRE $d(x_0, x_n) = 0$, SE $x_0 \notin E$ ALLORA É DI ACCUMULAZIONE E VALE IL PUNTO 1).
PER L'ALTRA IMPLICAZIONE ($\Leftarrow$) BASTA OSSERVARE CHE SE C'É UN $x_n = x_0$ ALLORA $x_0 \in E \subset \bar{E}$ PER DEFINIZIONE, SE NON C'É UN $x_n = x_0$ ALLORA x_0 É DI ACCUMULAZIONE E QUINDI $x_0 \in D(E) \subset \bar{E}$.

4) L'INSIEME DEI PUNTI ESTERNI COINCIDE CON L'INTERNO DEL COMPLEMENTARE (É CHIARO! I PUNTI INTERNI DEL COMPLEMENTARE SONO ESTERNI DI QUELLO DI PARTENZA).

5) E E E^c HANNO LA STESSA FRONTIERA

6) $\mathring{E} \subset E \subset \bar{E}$

7) $E \cup \partial E = \bar{E}$

DEFINIAMO ORA ALTRI 2 TIPI DI INSIEMI:

- INSIEME APERTO SE TUTTI GLI ELEMENTI DI E SONO PUNTI INTERNI A E
- INSIEME CHIUSO SE I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI E SONO CONTENUTI IN E

DATE QUESTE DEFINIZIONI SONO EQUIVALENTI LE PROPRIETÁ:

1) E É APERTO
2) $\text{int}(E) = E = \mathring{E}$
3) $E \cap \partial E = \emptyset$

1) E É CHIUSO
2) $E = \bar{E}$
3) SE $(x_n)_n \subset E$ CONVERGE ALLORA $\lim_{n\to+\infty} x_n \in E$
4) $\partial E \subset E$
5) E^c É APERTO

Vittorio Alzetta

SI OSSERVI CHE ABBIAMO APPENA CARATTERIZZATO, AL PUNTO 3), GLI INSIEMI CHIUSI CON LE SUCCESSIONI CONVERGENTI.

SAPPIAMO ANCHE CHE LA CONVERGENZA O MENO DI UNA SUCCESSIONE IN UNO SPAZIO NORMATO DIPENDE DALLA NORMA.

CONCLUDIAMO CHE SE DUE NORME SONO EQUIVALENTI ALLORA UN INSIEME É APERTO / CHIUSO NELLA PRIMA NORMA SE E SOLO SE LO É ANCHE NELLA SECONDA.

PROPRIETÁ SULLE OPERAZIONI TRA INSIEMI

SIA (X, d) UNO SPAZIO METRICO, ALLORA:

- $E \subset X$ APERTO $\iff$ E^c CHIUSO
- $\bigcup_{\infty}$ APERTI = APERTO, $\bigcap_{\infty}$ CHIUSI = CHIUSO
- $\bigcap_{N}$ APERTI = APERTO, $\bigcup_{N}$ CHIUSI = CHIUSO
- $\mathring{E}$ É IL PIÚ GRANDE APERTO CONTENUTO IN E

  dim: SUPPONIAMO CHE CI SIA UN V PIÚ GRANDE DI $\mathring{E}$ CONTENUTO IN E E APERTO. POICHÉ PIÚ GRANDE DEVE AVERE ALMENO UN PUNTO IN PIÚ, QUESTO PUNTO NON PUÓ ESSERE INTERNO, ~~ALTRIMENTI~~ LI CONTIENE GIÁ TUTTI $\mathring{E}$ E QUINDI V. NON PUÓ ESSERE ESTERNO, ALTRIMENTI $V \not\subset E$ E NON PUÓ ESSERE DI FRONTIERA, ALTRIMENTI $V \cap \partial V \neq \emptyset$ E V NON SAREBBE APERTO (PROPRIETÁ 3)). □
- $\bar{E}$ É IL PIÚ PICCOLO INSIEME CHIUSO CONTENENTE E
- $\forall\, x_0 \in X,\ r > 0$: $B_r(x_0)$ É APERTO
- $\forall\, x_0 \in X,\ r > 0$: $\{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} = \overline{B_r}(x_0)$ É CHIUSO

  CHIAMEREMO QUESTO INSIEME PALLA CHIUSA
- OGNI INTORNO SFERICO É LIMITATO
- SE E É LIMITATO ALLORA $\bar{E}$, ∂E SONO LIMITATI
- X E $\emptyset$ SONO SIA APERTI CHE CHIUSI

ESERCIZIO

USANDO LE PROPRIETÁ APPENA ELENCATE STABILIAMO SE IL SEGUENTE INSIEME É CHIUSO O APERTO:

$$E_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy - \sin(xy) \geq 0 \right\}$$

ESEMPIO INSIEME CHIUSO

CONSIDERIAMO IL PRIMO ESEMPIO FATTO DI SPAZIO NORMATO: L'INSIEME DELLE FUNZIONI DA S IN $\mathbb{R}$ LIMITATE. LO ABBIAMO CHIAMATO $B(S)$ E ABBIAMO VISTO CHE LA COPPIA $(B(S), \|\cdot\|_\infty)$ É UNO SPAZIO NORMATO.

CONSIDERIAMO ORA IL SUO SOTTOSPAZIO NORMATO $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, SAPENDO CHE SE $(f_n)_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A f ALLORA ANCHE $f \in C([a,b])$ POSSIAMO CONCLUDERE CHE $C([a,b])$ É UN CHIUSO DI $B([a,b])$.

ESERCIZIO

MOSTRIAMO CHE SU $Z = C^1([a,b])$ (FUNZIONI CONTINUE CON DERIVATA CONTINUA) LA FUNZIONE:

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

É UNA NORMA. SFRUTTIAMO IL FATTO DI AVER GIÁ DIMOSTRATO CHE $\|\cdot\|_\infty$ É UNA NORMA.

N1) É LA SOMMA DEI SUP DI 2 VALORI ASSOLUTI.

N2) $\|\lambda f\|_{C^1} = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty + |\lambda| \|f'\|_\infty = |\lambda| \left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \right) = |\lambda| \|f\|_{C^1}$

N3) $\|f+g\|_{C^1} = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty =$

$= \|p\|_{C^1} + \|q\|_{C^1}$

Vittorio Alzetta

PRODOTTO SCALARE

SIA X UNO SPAZIO VETTORIALE. UN DEFINIAMO **PRODOTTO SCALARE** SU X UNA FUNZIONE:

$$\langle -, - \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(P, P') \longmapsto \langle P \cdot P' \rangle = P \cdot P'$$

CHE VERIFICA LE PROPRIETÁ SEGUENTI:

- $P \cdot P \geq 0$ E $P \cdot P = 0 \Leftrightarrow P = 0$
- $P \cdot P' = P' \cdot P$
- $(\lambda P) \cdot P' = \lambda (P \cdot P')$ E $(P+Q) \cdot P' = P \cdot P' + Q \cdot P' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, P, Q \in X$

DIREMO ANCHE CHE SE $\langle P, Q \rangle = 0$ ALLORA P E Q SONO **ORTOGONALI**.

ESEMPI

IL PRODOTTO IN $\mathbb{R}$ PUÓ ESSERE VISTO COME IL PIÚ SEMPLICE DEI PRODOTTI SCALARI.

IN GENERE DEFINIAMO IL PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{R}^n$ COME:

$$\langle P \cdot P' \rangle = P \cdot P = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i'$$

CON $P = (x_1, \dots, x_n)$ E $P' = (x_1', \dots, x_n')$.

MOSTRIAMO ORA CHE SI TRATTA DI UNA BUONA DEFINIZIONE:

PS1) $\langle P \cdot P \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow P = 0$

PS2) $\langle P \cdot P' \rangle = x_1 x_1' + \dots + x_n x_n' = x_1' x_1 + \dots + x_n' x_n = \langle P', P \rangle$

PS3) $(\lambda P) \cdot P' = \lambda x_1 \cdot x_1' + \dots + \lambda x_n \cdot x_n' = \lambda \cdot x_1 x_1' + \dots + \lambda \cdot x_n x_n' = \lambda (P \cdot P')$

$$(P+Q) \cdot P' = (x_1 + y_1) \cdot x_1' + \dots + (x_n + y_n) \cdot x_n' = x_1 x_1' + y_1 x_1' + \dots + x_n x_n' + y_n x_n' =$$
$$= P \cdot P' + Q \cdot P'$$

SIA X UNO SPAZIO VETTORIALE DOTATO DI PRODOTTO SCALARE, ALLORA LA FUNZIONE DEFINITA COME:

$$\| P \| := \sqrt{\langle P, P \rangle} \quad , P \in X$$

VERÁ CHIAMATA **NORMA INDOTTA** DAL PRODOTTO SCALARE E VARRANNO LE 2 ULTERIORI PROPRIETÁ:

- $\| P + P' \|^2 = \| P \|^2 + \| P' \|^2 + 2 \langle P, P' \rangle$
- $| \langle P, Q \rangle | \leq \| P \| \cdot \| Q \|$

PRIMA DI DIMOSTRARE QUESTE 2 ULTIME PROPRIETÁ CI ACCORGIAMO CHE LA DEFINIZIONE DEL PRODOTTO SCALARE ALTRO NON É CHE LA NORMA EUCLIDEA SU X (o $\mathbb{R}^n$). $\| P \|^2 = \langle P, P \rangle$.

DIMOSTRIAMO LA PRIMA PROPRIETÁ (PS4):

$$\| P + P' \|^2 = \langle P + P', P + P' \rangle = (P + P') \cdot (P + P') = P \cdot P + P \cdot P' + P \cdot P' + P' \cdot P$$
$$= \langle P, P \rangle + \langle P', P' \rangle + 2 \langle P, P' \rangle = \| P \|^2 + \| P' \|^2 + 2 \langle P, P' \rangle$$

DIMOSTRIAMO LA SECONDA PROPRIETÁ (PS5):

$$0 \leq \| xP - Q \|^2 = \| xP \|^2 + 2 (xP) \cdot (-Q) + \| Q \|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$= \underbrace{\| P \|^2}_{a} x^2 - 2 \underbrace{(P \cdot Q)}_{b} x + \underbrace{\| Q \|^2}_{c}$$

POICHÉ CIÓ CHE ABBIAMO TROVATO $(ax^2 - 2bx + c)$ É $\geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ SI AVRÁ PER FORZA UN Δ NEGATIVO:

$$4b^2 - 4ac \leq 0$$

DA CUI:

$$4 (P \cdot Q)^2 - 4 \| P \|^2 \| Q \|^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad | \langle P, Q \rangle | \leq \| P \| \cdot \| Q \|$$

Vittorio Alzetta

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

QUANDO ABBIAMO INTRODOTTO LA NORMA A NON ABBIAMO FORNITO UNA DIMOSTRAZIONE DELLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE, CHE DAREMO ORA:

$$\|P+Q\|^2 = \|P\|^2 + \|Q\|^2 + 2\,P\cdot Q \quad (PSt) \leq$$
$$\leq \|P\|^2 + \|Q\|^2 + 2|P\cdot Q| \leq$$
$$\leq \|P\|^2 + \|Q\|^2 + 2\|P\|\cdot\|Q\| = (\|P\| + \|Q\|)^2$$

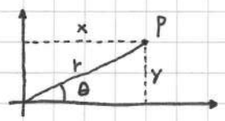
DA CUI: $\|P+Q\| \leq \|P\| \cdot \|Q\|$

QUESTO RISULTATO DIMOSTRA CHE EFFETTIVAMENTE LA NORMA EUCLIDEA É UNA NORMA, INFATTI LE PRIME DUE PROPRIETÁ VALGONO E SIAMO RIUSCITI A DIMOSTRARLE SUBITO. LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE ERA STATA RIMANDATA E ORA CHE ABBIAMO DIMOSTRATO PURE QUELLA POSSIAMO AFFERMARE CHE LA NORMA EUCLIDEA É UNA NORMA.

PER LE NORME q CON $1 \leq q < \infty \wedge q \neq 2$ (É LA NORMA EUCLIDEA) NON LA DIMOSTREREMO.

COORDINATE POLARI E PRODOTTO SCALARE

RIPETIAMO BREVEMENTE CIÓ CHE ABBIAMO GIÁ VISTO IN ANALISI 1:



POTREMO ESPRIMERE IL PUNTO P IN:

- COORDINATE CARTESIANE: $P = (x, y)$
- COORDINATE POLARI: $P = (r, \theta)_{POL}$

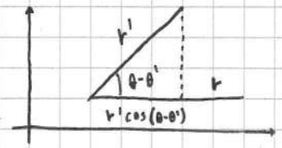
ESPRIMENDO LE COORDINATE DI $P = (x, y)$ E $P' = (x', y')$ IN FORMA POLARE AVREMO:

$$\langle P, P' \rangle = r \cdot r' \cdot \cos(\theta - \theta')$$

DIMOSTRIAMO QUESTO FATTO OSSERVANDO CHE $P = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ E $P' = (r'\cdot\cos\theta', r'\cdot\sin\theta')$:

$$\langle P, P' \rangle = [r\cos\theta \cdot r'\cos\theta'] + [r\sin\theta \cdot r'\sin\theta']$$
$$= rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta']$$
$$= rr'\left[\tfrac{1}{2}\cos(\theta+\theta') + \tfrac{1}{2}\cos(\theta-\theta') + \tfrac{1}{2}\cos(\theta-\theta') - \tfrac{1}{2}\cos(\theta+\theta')\right]$$
$$= rr'\cos(\theta-\theta')$$

A LIVELLO GEOMETRICO VUOL DIRE:



CONSIDERARE LA PROIEZIONE DI UNO DEI DUE VETTORI SULL'ALTRO E MOLTIPLICARLA AL VETTORE SU CUI É STATA PROIETTATA.

SIANO P E P' E $\mathbb{R}^n$ E SIA Π UN PIANO PASSANTE PER ESSI. DETTO ϕ L'ANGOLO TRA IL VETTORE $\vec{OP}$ E $\vec{OP'}$ DOVE O É L'ORIGINE DEL PIANO Π AVREMO UNA DEFINIZIONE ALTERNATIVA DI PRODOTTO SCALARE:

$$\langle P, P' \rangle = \|P\|_2 \cdot \|P'\|_2 \cdot \cos(\phi)$$

TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS IN $\mathbb{R}^2$

PER RENDERE PIÚ SEMPLICE LA DIMOSTRAZIONE RICORDIAMO UN FATTO:

- se $P_h \to P$ ALLORA OGNI SUA SOTTOSUCCESSIONE $(P_{h_j})_j$ CONVERGE A P

IL TEOREMA AFFERMA CHE DATA $(P_h)_h \subset \mathbb{R}^n$ LIMITATA ESISTE UNA SUA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE.

dim: PER $n=1$ ABBIAMO LA DIMOSTRAZIONE DA ANALISI 1, PER $n=2$ L'AVREMO ORA.

SIA $P_h = (x_h, y_h)$ LIMITATA IN $\mathbb{R}^2$, AVREMO:

$$\exists M : \|P_h\| < M$$
$$\sqrt{x_h^2 + y_h^2} < M$$
$$x_h^2 + y_h^2 < M^2$$

E DUNQUE $|x_h| \wedge |y_h| < M$

OVVERO $(x_h)_h$ E $(y_h)_h$ SONO LIMITATE IN $\mathbb{R}$.

PER BOLZANO - WEIERSTRASS IN $\mathbb{R}$ $(x_h)_h$ HA UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE CHE CHIAMEREMO $(x_{h_j})_j$ E CONVERGERÁ A x_0.

ORA PRENDIAMO $(y_{h_j})_j$ CHE É LIMITATA (SOTTOSUCCESSIONE DI $(y_h)_h$ CHE É LIMITATA) E QUINDI PER BOLZANO - WEIERSTRASS AMMETTE UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE CHE CHIAMEREMO $(y_{h_{j_i}})_i$ E CONVERGERÁ A y_0.

ORA PRENDIAMO $(x_{h_{j_i}})_i$ CHE ESSENDO SOTTOSUCCESSIONE DI $(x_{h_j})_j$ (CHE CONVERGE) CONVERGERÁ ALLO STESSO VALORE x_0.

IN CONCLUSIONE AVREMO CHE LA SEGUENTE SOTTOSUCCESSIONE DI $(P_h)_h$ CONVERGE A (x_0, y_0):

$$P_{h_{j_i}} = (x_{h_{j_i}}, y_{h_{j_i}}) \to (x_0, y_0) \qquad \square$$

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Vittorio Alzetta

CONSIDERIAMO DUE NUMERI n E m IN $\mathbb{N}$ E PRENDIAMO GLI INSIEMI $\mathbb{R}^n$ E $\mathbb{R}^m$.

ORA PRENDIAMO LE FUNZIONI CON DOMINIO $\mathbb{R}^n$ E CODOMINIO $\mathbb{R}^m$:

- SE $m = 1$ AVREMO **FUNZIONI REALI** DI UNA O PIÚ VARIABILI REALI
- SE $m \geq 2$ AVREMO **FUNZIONI VETTORIALI** DI UNA O PIÚ VARIABILI REALI
- SE $m = n$ AVREMO DEI **CAMPI VETTORIALI**

ESEMPI

SIA $n \geq 2$ E $i \in \{1, \dots, n\}$.

PRENDIAMO LA FUNZIONE $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CHE A OGNI $x \in \mathbb{R}^n$ (x É NELLA FORMA $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$) ASSOCIA (IL CODOMINIO É $\mathbb{R}$) L'i-ESIMA COORDINATA (LA SCELGLIAMO FRA QUELLE SCRITTE SOPRA). QUESTA FUNZIONE É DETTA **i-ESIMA PROIEZIONE**. ED É UNA FUNZIONE REALE DI n VARIABILI.

LA FUNZIONE $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ DEFINITA COME $f(x) = -MG\frac{x}{\|x\|^3}$ CON $M, G > 0$ É UN CAMPO VETTORIALE.

FUNZIONI COMPONENTI

OSSERVIAMO CHE AVERE UNA FUNZIONE VETTORIALE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ É COME AVERE UN ELENCO DI m FUNZIONI $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CHE CI SERVIRANNO PER CALCOLARE LE COMPONENTI DELL'IMMAGINE IN $\mathbb{R}^m$.

QUESTE f_i SARANNO FUNZIONI REALI ($m = 1$) DEFINITE IN $\mathbb{R}^n$ TALI CHE:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(IN REALTÁ IN UN SOTTOINSIEME)

DIREMO **FUNZIONI COMPONENTI** LE FUNZIONI $f_1(x), \dots, f_m(x)$.

Vittorio Alzetta

ESEMPI

- CONSIDERIAMO $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ TALE CHE $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
  ESSA È UNA FUNZIONE VETTORIALE $(m \geq 2)$ DI VARIABILE REALE $(n = 1)$ LE CUI FUNZIONI COMPONENTI SONO COSENO E SENO.

- CONSIDERIAMO $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ TALE CHE $f(x, y, z) = (x + y, xz^2)$.
  ESSA È UNA FUNZIONE VETTORIALE $(m \geq 2)$ DI 3 VARIABILI REALI $(n = 3)$ LE CUI FUNZIONI COMPONENTI SONO:

$$f_1(x, y, z) := x + y \qquad f_2(x, y, z) := xz^2$$

- CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ TALE CHE $f(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$
  QUESTO È UN CAMPO VETTORIALE $(m = n = 3)$ LE CUI COMPONENTI SONO:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

OPERAZIONI ALGEBRICHE

SIANO $A \subset \mathbb{R}^n$ E $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ E $\phi : A \to \mathbb{R}$ E $\lambda \in \mathbb{R}$.
DEFINIAMO LE SEGUENTI FUNZIONI:

- $f + g := x \in A \longmapsto f(x) + g(x)$ (SOMMA)
- $\lambda f := x \in A \longmapsto \lambda f(x)$ (MULTIPLO)
- $\phi f := x \in A \longmapsto \phi(x) \cdot f(x)$ (PRODOTTO PER FUNZIONE REALE)
- $f \cdot g := x \in A \longmapsto \langle f(x), g(x) \rangle$ (PRODOTTO SCALARE)

FUNZIONI CONTINUE

SIANO $A \subset \mathbb{R}^n$ E $f : A \to \mathbb{R}^m$, E SIA $\bar{x} \in A$.
DIREMO CHE f É CONTINUA IN $\bar{x}$ SE PER OGNI SUCCESSIONE $(x_k)_k \subset A$ CONVERGENTE A $\bar{x}$, LA SUCCESSIONE TRASFORMATA (DA f), CIOÉ $(f(x_k))_k$ CONVERGE A $f(\bar{x})$.
DIREMO CHE f É CONTINUA SE LO SARÁ NEL SUO DOMINIO A

ESEMPI DI FUNZIONI CONTINUE SONO LE FUNZIONI COSTANTI O LE ~~PROIE~~ FUNZIONI PROIEZIONI SUGLI ASSI (π_i).

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

SIA $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
DIREMO CHE f É LIPSCHITZIANA SE ESISTE UNA COSTANTE $L > 0$ TALE CHE:

$$\|f(P) - f(P')\| \leq L \|P - P'\| \quad \forall P, P' \in A$$

DA QUESTA DEFINIZIONE SI PUÓ DIMOSTRARE CHE SE f É LIPSCHITZIANA ALLORA É ANCHE CONTINUA.
CONSIDERIAMO P_0 E A E FISSIAMO UNA QUALUNQUE SUCCESSIONE $P_h \in D$ CONVERGENTE A P_0, QUINDI:

$$\text{PER } h \to \infty \qquad \|P_h - P_0\| \to 0$$

MA POICHÉ f É LIPSCHITZIANA AVREMO:

$$\|f(P_h) - f(P_0)\| \leq L \|P_h - P_0\|$$

E SE IL SECONDO TERMINE TENDE A 0 ALLORA LO SARÁ ANCHE IL PRIMO (CHE É PIÚ PICCOLO), DUNQUE:

$$\|f(P_h) - f(P_0)\| \to 0 \iff f(P_h) \to f(P_0)$$

Vittorio Alzetta

ESEMPIO

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

RISULTA CONTINUA PER $(x,y) \neq 0$ (UNICA COPPIA PER LA QUALE SI ANNULLA IL DENOMINATORE).

ORA SI TRATTA DI CALCOLARE IL LIMITE IN $(0,0)$, PER FARLO POSSIAMO PORCI SU DIVERSI PIANI, CALCOLARE IL LIMITE DELLE FUNZIONI OTTENUTE DALL'INTERSEZIONE DI $f(x,y)$ CON IL PIANO IN CUI CI TROVIAMO E VEDERE SE É DIVERSO PER PIANI DIVERSI. IN TAL CASO IL LIMITE NON ESISTERÁ (UN PÓ COME CON FUNZIONI E SUCCESSIONI).

PIANO $y = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x,0) = \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$

PIANO $x = y$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$

POICHÉ LUNGO QUESTE DUE DIREZIONI (PIANI) I LIMITI SONO DIVERSI IL LIMITE NON ESISTE.

CONTINUITÁ FUNZIONI COMPOSTE

SIANO $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. SIANO $f: A \to \mathbb{R}^n$, $g: B \to \mathbb{R}^p$ CON $f(A) \subseteq B$ E $\bar{x} \in A$.

f CONTINUA IN $\bar{x}$, g CONTINUA IN $f(\bar{x}) \Rightarrow g \circ f$ CONTINUA IN $\bar{x}$

dim: SIA $x_h \to \bar{x}$. POICHÉ f É CONTINUA $f(x_h) \to f(\bar{x})$.

SAPPIAMO QUINDI CHE $(f(x_h))_h$ CONVERGE A $f(\bar{x})$ E CHE g É CONTINUA IN $f(\bar{x})$, QUINDI $g(f(x_h)) \to g(f(\bar{x}))$, CIOÉ $g \circ f$ É CONTINUA IN $\bar{x}$ □

CONTINUITÁ E FUNZIONI COMPONENTI

UNA FUNZIONE VETTORIALE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ É CONTINUA IN $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ SE E SOLO SE LO SONO TUTTE LE SUE FUNZIONI COMPONENTI.

PER STUDIARNE LA CONTINUITÁ CI BASTERÁ STUDIARE SINGOLARMENTE LE COMPONENTI DI f.

CONTINUITÁ E OPERAZIONI ALGEBRICHE

CON RIFERIMENTO AL PARAGRAFO SULLE OPERAZIONI ALGEBRICHE SI OSSERVI CHE SE f, g E ϕ SONO CONTINUE IN UN PUNTO LO SARANNO ANCHE TUTTE LE FUNZIONI OTTENUTE CON LE OPERAZIONI ALGEBRICHE LÍ DEFINITE.

LE FUNZIONI POLINOMIALI E RAZIONALI SONO CONTINUE NEI PROPRI DOMINI.

TEOREMA CONTINUITÁ IN SPAZIO NORMATO

SIA X UNO SPAZIO NORMATO, $D \subset X$ E $f: D \to \mathbb{R}^m$.

PRESO $P_0 \in D$ LE SEGUENTI PROPOSIZIONI SONO EQUIVALENTI:

- f É CONTINUA IN P_0
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall P \in D : \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow \|f(P) - f(P_0)\| < \varepsilon$

dim: $(\Rightarrow)$ PROCEDIAMO PER ASSURDO SUPPONENDO VERA LA 1 E FALSA LA 2, QUINDI NEGHIAMOLA:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 : \exists P_\delta \in D : \|P_\delta - P_0\| < \delta \wedge \|f(P_\delta) - f(P_0)\| \geq \varepsilon_0$$

DATO CHE VALE $\forall \delta > 0$ PRENDIAMO $\delta = \frac{1}{h}$ CON $h \in \mathbb{N}$:

$$\|P_h - P_0\| < \frac{1}{h} \qquad \|f(P_h) - f(P_0)\| \geq \varepsilon_0$$

DALLA PRIMA DISUGUAGLIANZA ABBIAMO CHE $P_h \to P_0$ E, PER LA CONTINUITÁ DI f IN P_0 (1), SI DOVREBBE AVERE $f(P_h) \to f(P_0)$, IN CONTRADDIZIONE CON LA SECONDA DISUGUAGLIANZA.

Vittorio Alzetta

($\Leftarrow$) ORA DOBBIAMO MOSTRARE CHE f É CONTINUA IN P_0.

PRENDIAMO UNA QUALUNQUE SUCCESSIONE P_h IN D CONVERGENTE A P_0, DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\exists \lim_{h\to+\infty} f(P_h)$ È VALE $f(P_0)$.

FISSIAMO $\varepsilon > 0$, AVREMO CHE:

- $\exists \delta > 0 : P \in D,\ \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow \|f(P) - f(P_0)\| < \varepsilon$

INOLTRE, PER SECONDA IPOTESI (SULLA SUCCESSIONE), $P_h \to P_0$, CIOÉ $\|P_h - P_0\| \to 0$, CIOÉ $\|P_h - P_0\| < \delta$ DEFINITIVAMENTE (DA UN h IN POI).

CHIAMIAMO h_ε L'h OLTRE IL QUALE VALE:

$$h \geq h_\varepsilon \Rightarrow \|P_h - P_0\| < \delta \Rightarrow \|f(P_h) - f(P_0)\| < \varepsilon$$

POICHÉ QUESTA COSA VALE PER OGNI $\varepsilon > 0$ f É CONTINUA IN P_0. □

LIMITE DI FUNZIONI VETTORIALI

SIA $D \subset \mathbb{R}^n$ E $f : D \to \mathbb{R}^m$, SIANO $P_0 \in D'$ E $l \in \mathbb{R}^m$. DIREMO CHE ESISTE IL LIMITE PER P CHE TENDE A P_0 DI f E VALE l SE ESISTE:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = l$$

CIOÉ SE PER OGNI SUCCESSIONE $(P_h)_h \subset D$ TALE CHE P_h CONVERGE A P_0 E $P_h \neq P_0$ SI HA $f(P_h)$ CONVERGENTE A l.

SI PUÓ DIMOSTRARE CHE LE SEGUENTI PROPOSIZIONI SONO EQUIVALENTI:

- $\lim_{P\to P_0} f(P) = l$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall P \in D : 0 < \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow \|f(P) - l\| < \varepsilon$

SUPPONIAMO ORA CHE IL DOMINIO D DI f SIA ILLIMITATO, IN MODO DA PERMETTERCI DI DEFINIRE IL LIMITE (FINITO) ALL'INFINITO DI f:

SIA $D \subset \mathbb{R}^n$ ILLIMITATO, SIA $f : D \to \mathbb{R}^m$ E $l \in \mathbb{R}^m$. DIREMO:

$$\lim_{\|P\|\to\infty} f(P) = l$$

SE PER OGNI SUCCESSIONE $(P_h)_h \subset D$ TALE CHE $\|P_h\| \to +\infty$ SI HA CHE $f(P_h)$ CONVERGE A l.

INFINE INTRODUCIAMO E DEFINIAMO LA NOZIONE DI LIMITE INFINITO.

NOTIAMO SUBITO CHE SOLO SE IL ~~DO~~ CODOMINIO DI f É $\mathbb{R}$ HA SENSO PARLARE DI LIMITE INFINITO, QUINDI AVREMO $m = 1$.

SIA $D \subset \mathbb{R}^n$ E $f : D \to \mathbb{R}$, SIA $P_0 \in D'$, DIREMO CHE ESISTE IL LIMITE PER P TENDENTE A P_0 DI f E VALE $+\infty$ SE ESISTE:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = +\infty$$

CIOÉ SE PER OGNI SUCCESSIONE $(P_h)_h \subset D$ TALE CHE $P_h \to P_0$ SI HA CHE $f(P_h)$ DIVERGE (TENDE A $\pm\infty$).

UN'ULTIMA DEFINIZIONE PER IL LIMITE INFINITO ALL'INFINITO.

SIA $D \subset \mathbb{R}^n$ E $f : D \to \mathbb{R}$. SIA $P_0 \in D'$, CON D ILLIMITATO. DIREMO:

$$\lim_{\|P\|\to\infty} f(P) = +\infty$$

SE PER OGNI SUCCESSIONE $(P_h)_h \subset D$ TALE CHE $\|P_h\| \to +\infty$ SI HA CHE $f(P_h)$ DIVERGE. (TENDE A $\pm\infty$).

Vittorio Alzetta

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

SIA $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $P_0 \in D'$.

SUPPONIAMO CHE ESISTA:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) > 0 \quad (\text{ANCHE } +\infty)$$

ALLORA IL TEOREMA AFFERMA CHE:

$$\exists R > 0 : \forall P \in B_R(P_0) \cap D, \ P \neq P_0 : f(P) > 0$$

IN PARTICOLARE DICIAMO CHE SE $f: D \to \mathbb{R}$ É CONTINUA IN P_0 E $f(P_0) > 0$, OSSIA IN FORMULE:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) > 0$$

ALLORA ESISTE UN INTORNO (UNA PALLA) DI P_0 IN CUI f É STRETTAMENTE POSITIVA.

IN TERMINI DI INTORNI VUOL DIRE:

$$\exists R > 0 : \forall P \in B_R(P_0) \cap D : f(P) > 0$$

TEOREMA

DALLA PERMANENZA DEL SEGNO SEGUE IL SEGUENTE TEOREMA.

SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}^n$, SIA $\lambda \in \mathbb{R}$.

ALLORA GLI INSIEMI:

$$\{P \in \mathbb{R}^n : f(P) > \lambda\}, \quad \{P \in \mathbb{R}^n : f(P) < \lambda\}$$

SONO APERTI. E GLI INSIEMI:

$$\{P \in \mathbb{R}^n : f(P) \geq \lambda\}, \quad \{P \in \mathbb{R}^n : f(P) \leq \lambda\}$$

SONO CHIUSI.

PUNTI ESTREMALI

SIA $D \subseteq \mathbb{R}^n$ UN INSIEME NON VUOTO. SIA $f: D \to \mathbb{R}$, DIAMO LE SEGUENTI DEFINIZIONI:

- P_0 É PUNTO DI MINIMO LOCALE PER f:

$$P_0 \in D, \ \exists r > 0 : f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in D \cap B_r(P_0)$$

- P_0 É PUNTO DI MASSIMO LOCALE PER f:

$$P_0 \in D, \ \exists r > 0 : f(P) \leq f(P_0) \quad \forall P \in D \cap B_r(P_0)$$

- P_0 É PUNTO DI MINIMO GLOBALE PER f:

$$P_0 \in D, \ f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in D$$

- P_0 É PUNTO DI MASSIMO GLOBALE PER f:

$$P_0 \in D, \ f(P) \leq f(P_0) \quad \forall P \in D$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

SIA $K \subset \mathbb{R}^n$ UN INSIEME CHIUSO E LIMITATO E SIA $f: K \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

IL TEOREMA AFFERMA L'ESISTENZA DI MASSIMO E MINIMO, CIOÉ ESISTONO:

$$f(\overline{P}) = \max_{P \in K} f(P) \qquad f(\underline{P}) = \min_{P \in K} f(P)$$

dim: DIMOSTRIAMO L'ESISTENZA DEL MINIMO FACENDO NOTARE CHE ESISTE $\underline{P}$ TALE PER CUI $f(\underline{P}) = \inf_{P \in K} f(P)$ CON $\underline{P} \in K$.

SIA P_h UNA SUCCESSIONE IN K TALE CHE $f(P_h) \to \inf_{P \in K} f(P)$ [1]

K É LIMITATO PER IPOTESI, CIOÉ ESISTE UNA PALLA CHE LO CONTIENE TOTALMENTE

IN FORMULE:

$$\exists R>0 : K \subseteq B_R(0)$$

INOLTRE, DA QUESTA CONSIDERAZIONE, ABBIAMO CHE $(P_h)_h$ È LIMITATA.

DA QUI, PER QUELLO CHE HO CHIAMATO TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS, SAPPIAMO CHE $(P_h)_h$ AMMETTE UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE.

CHIAMATO $\underline{P}$ IL PUNTO A CUI TENDE AVREMO:

$$P_{h_k} \to \underline{P} \qquad [2]$$

SICCOME $f(P_{h_k})$ È UNA SOTTOSUCCESSIONE DI $f(P_h)$ AVREMO CHE CONVERGERÀ ALLO STESSO VALORE:

$$f(P_{h_k}) \to \inf_{P \in K} f(P) \qquad [3]$$

MA POICHÉ K È CHIUSO SAPPIAMO CHE OGNI SUCCESSIONE CONVERGENTE A VALORI IN K CONVERGERÀ AD UN VALORE IN K, PERTANTO DALLA [2] RICAVIAMO CHE $\underline{P} \in K$.

SEMPRE DALLA [2] E DALLA CONTINUITÀ DI f NEL SUO DOMINIO AVREMO:

$$f(P_{h_k}) \to f(\underline{P}) \qquad [4]$$

CONSIDERIAMO LA [3] E LA [4], PER IL TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE DOVRÀ VALERE:

$$f(\underline{P}) = \inf_{P \in K} f(P) \quad \Rightarrow \quad f(\underline{P}) = \min_{P \in K} f(P)$$

L'IMPLICAZIONE È GARANTITA DAL FATTO CHE $\underline{P} \in K$ □

Vittorio Alzetta

CURVA E SOSTEGNO

SIA $[a,b] \subset \mathbb{R}$ E $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ FUNZIONE A VALORI VETTORIALI (SONO IN $\mathbb{R}^m$).

SE ϕ È CONTINUA VERRÀ CHIAMATA **CURVA IN $\mathbb{R}^m$** DI **PRIMO ESTREMO** $\phi(a)$ E **SECONDO ESTREMO** $\phi(b)$.

L'INSIEME DI $\mathbb{R}^m$ IMMAGINE DI ϕ, CIOÉ $\phi([a,b]) \subset \mathbb{R}^m$ VERRÀ CHIAMATO **SOSTEGNO** DELLA CURVA ϕ.

DATO $E \subset \mathbb{R}^m$ DIREMO CHE ϕ É UNA CURVA IN E SE IL SUO SOSTEGNO É CONTENUTO IN E.

OSSERVIAMO CHE DATE $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ RISPETTIVAMENTE CONTINUA E CURVA IN D (IL SOSTEGNO DI ϕ É CONTENUTO IN D) ALLORA LA COMPOSTA SARÀ CONTINUA:

$$f(\phi(-)) : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{CONTINUA}$$

ESEMPI

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA, ALLORA $\phi : x \in [a,b] \mapsto (x, g(x)) \in \mathbb{R}^2$ SARÀ UNA CURVA IN $\mathbb{R}^2$, INFATTI LE FUNZIONI COMPONENTI SONO CONTINUE E QUINDI ϕ É CONTINUA, DUNQUE ANCHE CURVA E IL SUO SOSTEGNO É CONTENUTO IN $\mathbb{R}^2$.

CONSIDERIAMO ORA $v : t \in [0,1] \mapsto x + t(y-x)$. ESSA É UNA CURVA DI PRIMO ESTREMO $x + 0 \cdot (y-x) = x$ E SECONDO ESTREMO $x + 1 \cdot (y-x) = y$, IL SUO SOSTEGNO SI CHIAMA **SEGMENTO** DI ESTREMI x E y E SI DENOTA CON $[x,y]$. (IN $\mathbb{R}$ IL SEGMENTO CHIUSO E L'INTERVALLO CHIUSO SONO EQUIVALENTI).

Vittorio Alzetta

INSIEMI CONVESSI, CONNESSI E STELLATI

SIA $E \subset \mathbb{R}^n$.

DIREMO CHE E É **CONVESSO** SE PER OGNI $x, y \in E$ ACCADE CHE IL SEGMENTO $[x, y]$ (STIAMO PARLANDO DEL SOSTEGNO DI UNA CURVA) É CONTENUTO IN E.

DIREMO CHE E É **STELLATO** SE ESISTE $x_0 \in E$ TALE CHE PER OGNI $x \in E$ IL SEGMENTO $[x_0, x]$ SIA CONTENUTO IN E. CHIAMEREMO x_0 **CENTRO DELLA STELLA**.

DIREMO CHE E É **CONNESSO** SE PER OGNI $x, y \in E$ ESISTE UNA CURVA CONTENUTA IN E DI PRIMO ESTREMO x E SECONDO ESTREMO y.

PER VERIFICARE LA CONNESSIONE SFRUTTEREMO DELLE CURVE SPECIFICHE DETTE **POLIGONALI**.

SIA $\phi : [a, b] \subset E \subset \mathbb{R}^m$ UNA CURVA, SE ESISTONO

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

TALE CHE ϕ RISTRETTA A $[a_{j-1}, a_j]$ É UN SEGMENTO ALLORA ϕ SARÁ UNA POLIGONALE.

SI OSSERVI CHE VALGONO LE IMPLICAZIONI:

$$\text{CONVESSO} \Rightarrow \text{STELLATO} \Rightarrow \text{CONNESSO}$$

SONO ESEMPI DI INSIEMI CONVESSI GLI INTORNI SFERICI, SONO ESEMPI DI INSIEMI CONNESSI GLI INTERVALLI IN $\mathbb{R}$.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

SIA $D \subset \mathbb{R}^n$ E SIA $f : D \to \mathbb{R}^m$ CONTINUA.

SE D É CONNESSO ALLORA $f(D)$ (L'IMMAGINE) É CONNESSO.

dim: PRENDIAMO $Q_1, Q_2 \in f(D)$, DOBBIAMO MOSTRARE UNA CURVA ψ IN $f(D)$ CHE CONNETTE Q_1 E Q_2.

SAPPIAMO CHE ESISTONO P_1 E P_2 IN D TALI CHE $f(P_1) = Q_1$ E $f(P_2) = Q_2$.

ESSENDO D CONNESSO ESISTERÁ UNA CURVA CON ESTREMI P_1 E P_2, CHIAMIAMOLA $\phi : [a, b] \to D$, $\phi(a) = P_1$ E $\phi(b) = P_2$.

ORA COMPONIAMO TRA LORO f (CHE É CONTINUA PER IPOTESI) E ϕ (CHE É CONTINUA ESSENDO CURVA):

$$\psi := f \circ \phi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$$

ψ É CONTINUA PERCHÉ COMPOSIZIONE DI CONTINUE E AVREMO:

$$\psi(a) = f(\phi(a)) = f(P_1) = Q_1$$

$$\psi(b) = f(\phi(b)) = f(P_2) = Q_2$$

DUNQUE ABBIAMO TROVATO LA CURVA CHE CONNETTE Q_1 E Q_2 □

INSIEMI DI LIVELLO

SIA $f : D \to \mathbb{R}$, FISSATO $c \in \mathbb{R}$ CHIAMEREMO **INSIEME DI LIVELLO** (O CURVA DI LIVELLO) L'INSIEME:

$$\{f = c\} = \{P \in D : f(P) = c\}$$

QUANDO $D \subset \mathbb{R}^2$ BASTA INTERSECARE f CON IL PIANO PARALLELO AL PIANO (x, y) ALLA QUOTA $z = c$

Vittorio Alzetta

OMOGENEITÁ

SIA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ NON IDENTICAMENTE NULLA. DIREMO CHE É **POSITIVAMENTE OMOGENEA** DI GRADO $\alpha \in \mathbb{R}$ SE:

$$f(\lambda P) = \lambda^\alpha f(P)$$

$\forall P \in \mathbb{R}^n$, $P \neq 0$, $\lambda > 0$.

SE LA RELAZIONE PRECEDENTE VALE $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ALLORA DIREMO SEMPLICEMENTE CHE f É **OMOGENEA** DI GRADO α.

ESEMPI:

SIA $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ E CONSIDERIAMO LE SEGUENTI FUNZIONI:

- $f(x,y) = \dfrac{x^2 y + y^3}{x^2 + y^2}$

$$f(\lambda P) = \frac{\lambda^2 x^2 \lambda y + \lambda^3 y^3}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \lambda \cdot \frac{x^2 y + y^3}{x^2 + y^2} = \lambda^1 f(P)$$

É OMOGENEA DI GRADO 1

- $f(x,y) = \sqrt[3]{3x - 5y}$

$$f(\lambda P) = \sqrt[3]{3\lambda x - 5\lambda y} = \lambda^{1/3} \cdot \sqrt[3]{3x - 5y} = \lambda^{1/3} \cdot f(P)$$

É OMOGENEA DI GRADO $1/3$

- $f(x,y) = \sin(xy)$

$$f(\lambda P) = \sin(\lambda^2 xy) \neq \lambda^\alpha f(P) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

NON É OMOGENEA

CIÓ CHE STO PER SCRIVERE POTREBBE SEMBRARE POCO INTUITIVO MA NASCONDE UN ELEGANTISSIMO RAGIONAMENTO.

SE f É POSITIVAMENTE OMOGENEA ALLORA I SUOI VALORI SONO COMPLETAMENTE DETERMINATI A PARTIRE DA QUELLI CHE f ASSUME IN:

$$S = \{ Q \in \mathbb{R}^n : \|Q\| = 1 \}$$

INFATTI SE $P \neq 0$ POSSIAMO SCRIVERE:

$$f(P) = f\left(\|P\| \cdot \frac{P}{\|P\|} \right) = \underbrace{\|P\|^\alpha}_{\lambda} f\left(\underbrace{\frac{P}{\|P\|}}_{\|Q\|=1} \right)$$

TEOREMA SULL'OMOGENEITÁ

SIA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ POSITIVAMENTE OMOGENEA DI GRADO α E CONTINUA PER $P \neq 0$.

- SE $\alpha > 0$ ALLORA f É CONTINUA IN $P = 0$ E $f(0) = 0$
- SE $\alpha < 0$ ALLORA f NON É CONTINUA IN $P = 0$
- SE $\alpha = 0$ f É CONTINUA SE E SOLO SE f É COSTANTE.

dim: **$\alpha > 0$** PER $P \neq 0$ IL VETTORE $\dfrac{P}{\|P\|}$ SI TROVA NELL'INSIEME CHIUSO E LIMITATO S. PER WEIERSTRASS f HA MAX E MIN SU S, QUINDI:

$$\left| f\left(\frac{P}{\|P\|}\right) \right| \leq c \quad \forall P \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |f(P)| \leq \|P\|^\alpha \cdot c \quad \forall P \neq 0$$

DA CUI, FACENDO IL LIMITE PER $P \to 0$ AD ENTRAMBI I MEMBRI, OTTENIAMO CHE $\lim_{P \to 0} |f(P)| = 0$.

$\alpha < 0$ PRENDIAMO P_0 TALE CHE $f(P_0) \neq 0$, POICHÉ f É POSITIVAMENTE OMOGENEA POSSIAMO CALCOLARE $f(tP_0) = t^\alpha f(P_0)$ CON $t \to 0^+$, AVREMO $\lim_{t \to 0^+} f(tP_0) = \pm\infty$ CHE PORTA A CONCLUDERE CHE f NON É CONTINUA IN 0.

$\alpha = 0$ DUNQUE PER OGNI VERSORE (VETTORE UNITARIO) DI S SI HA $f(tv) = \lambda^0 \cdot f(v)$ E SE f É CONTINUA IN 0 ALLORA SI DEVE AVERE: $\lim_{t \to 0} f(tv) = f(0)$, MA POICHÉ SI HA $f(tv) = f(v)$ POSSIAMO SCRIVERE $\lim_{t \to 0} f(v) = f(0)$ E CIOÉ $f(v) = f(0)$ QUINDI f É COSTANTE IN S MA POICHÉ I SUOI VALORI SONO DETERMINATI A PARTIRE DA QUELLI IN S, f É COST. IN $\mathbb{R}^n$ □

Vittorio Alzetta

CALCOLO DIFFERENZIALE

SIA $I \subset \mathbb{R}$ UN INTERVALLO, CONSIDERIAMO UN'APPLICAZIONE VETTORIALE $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ QUINDI CON n FUNZIONI COMPONENTI:

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

OGNUNA DELLE QUALI É UNA SEMPLICE FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE. PER STUDIARE LA CONTINUITÁ DI ϕ SAPPIAMO GIÁ DI DOVER VERIFICARE LA CONTINUITÁ DELLE SUE FUNZIONI COMPONENTI, SE LO DOVESSERO ESSERE CHIAMEREMO ϕ CURVA.
ORA INTRODURREMO DEGLI STRUMENTI PER POTER VERIFICARE LA DERIVABILITÁ DI ϕ IN UN PUNTO.

DIREMO CHE ϕ É **DERIVABILE** IN $t_0 \in I$ SE ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(t_0 + h) - \phi(t_0)}{h} =: \phi'(t_0)$$

CHIAMEREMO IL RISULTATO **VETTORE DERIVATO** DI ϕ IN t_0.
IN SOSTANZA ϕ SARÁ DERIVABILE IN t_0 SE E SOLO SE LO SARANNO TUTTE LE SUE COMPONENTI.
IN FORMULE AVREMO CHE:

$$\phi^{(k)} := (\phi_1^{(k)}, \dots, \phi_n^{(k)})$$

DOVE DEFINIAMO ANCHE IL SEGUENTE INSIEME:

$$C^k(I, \mathbb{R}^n) := \{ \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : \phi_i \in C^k(I) \}$$

CINEMATICAMENTE $\phi(t_0 + h)$ E $\phi(t_0)$ RAPPRESENTANO I VETTORI SPOSTAMENTO AL TEMPO $t_0 + h$ E t_0, IL RAPPORTO INCREMENTALE RAPPRESENTA INVECE LA VELOCITÁ ISTANTANEA, CHE É UN VETTORE.

CURVE REGOLARI

SIA $\phi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, SE QUESTA FUNZIONE É TALE CHE:

$$\forall\, t \in I : \phi'(t) \neq 0$$

ALLORA VERRÁ CHIAMATA CURVA REGOLARE (o CAMMINO REGOLARE).

L'IMMAGINE $\Gamma = Im(\phi) = \{\phi(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ SARÁ CHIAMATO SOSTEGNO DELLA CURVA ϕ.

DIREMO ANCHE CHE LA CURVA ϕ PARAMETRIZZA Γ.

CHIEDERE CHE LA DERIVATA SIA DIVERSA DA 0 (VETTORE NULLO) SIGNIFICA CHIEDERE DI AVERE SEMPRE LA TANGENTE ALLA CURVA.

ESEMPIO:

- PRENDIAMO LA FUNZIONE $\phi := (\cos t, \sin t)$ CON $t \in [0, 2\pi]$, $\phi \in C^\infty$.
  OSSERVIAMO CHE QUESTA CURVA É UNA PARAMETRIZZAZIONE (NEL SENSO CHE STABILISCE COME VA PERCORSO IL SOSTEGNO) DELLA CIRCONFERENZA UNITARIA IN CUI I DUE ESTREMI COINCIDONO E SONO:

$$\phi(0) = \phi(2\pi) = (1, 0)$$

OSSERVIAMO CHE SE $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi]$ LA CURVA HA SEMPRE LO STESSO SOSTEGNO (CIRCONFERENZA UNITARIA) MA UNA DIVERSA PARAMETRIZZAZIONE, INFATTI QUI I 2 ESTREMI SARANNO AL POLO NORD, IN $(0, 1)$.

- SIA $f : I \to \mathbb{R}$ FUNZIONE IN C^1, ALLORA $\phi(t) := (t, f(t))$ É DI CLASSE C^1 (ENTRAMBE LE COMPONENTI SONO DERIVABILI UNA VOLTA) E LA DERIVATA SARÁ:

$$\phi'(t) = (1, f'(t))$$

POICHÉ UNA COMPONENTE É SEMPRE DIVERSA DA 0 LA CURVA ϕ SARÁ REGOLARE.

Vittorio Alzetta

DERIVATE DIREZIONALI

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CON $n \geq 2$, SIA $\bar{x}$ UN PUNTO INTERNO DI A (ESISTE UNA PALLA DI CENTRO $\bar{x}$ TUTTA CONTENUTA IN A).
SIA $v \in \mathbb{R}^n$ TALE CHE $\|v\| = 1$ (CIOÉ v É UN VERSORE), DIREMO CHE f É DERIVABILE IN $\bar{x}$ NELLA DIREZIONE v SE ESISTE ED É FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} =: \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$$

OSSERVIAMO CHE L'INSIEME $\{\bar{x} + tv : t \in \mathbb{R}\}$ É LA RETTA PASSANTE PER $\bar{x}$ IN DIREZIONE v, TUTTAVIA NON TUTTA LA RETTA SARÁ CONTENUTA NEL DOMINIO DI f E PERTANTO DOBBIAMO RESTRINGERE L'INSIEME DI DEFINIZIONE DEL LIMITE AD UN INTERVALLO DI CENTRO 0 E RAGGIO ABBASTANZA PICCOLO DA FAR CONTENERE IN A L'INTERVALLO, LO CHIAMEREMO $]-r, r[- \{0\}$.
PER CUI LA FUNZIONE RAPPORTO INCREMENTALE SARÁ DEFINITA COME:

$$t \longmapsto \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} \qquad [1]$$

ORA DEFINIAMO UN'ALTRA FUNZIONE $g :]-r, r[\to \mathbb{R}$ E PONIAMOLA PARI A $g(t) := f(\bar{x} + tv)$.
ORA RISCRIVIAMO LA [1] CON LA g:

$$t \longmapsto \frac{g(t) - g(0)}{t} \qquad (g(0) = f(\bar{x} + 0 \cdot v))$$

ORA, ABBIAMO DUE DEFINIZIONI DI DERIVATE EQUIVALENTI, LA SECONDA ESPRIME LA DERIVABILITÁ DI $g(t)$ IN $t = 0$ (TUTTO QUADRA SE CONSIDERIAMO $g(t+0) - g(0)$).

DUNQUE f É DERIVABILE IN $\bar{x} \Leftrightarrow g$ É DERIVABILE IN $t = 0$ E $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = g'(0)$

DERIVATE PARZIALI

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E SIA $\bar{x}$ UN PUNTO INTERNO DI A.

SIA e_i L'i-ESIMO ELEMENTO DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$, SI RICORDI CHE e_i É UN VERSORE E QUINDI $\|e_i\| = 1$.

SE f É DERIVABILE IN $\bar{x}$ NELLA DIREZIONE e_i DIREMO CHE f É **DERIVABILE PARZIALMENTE** IN $\bar{x}$ RISPETTO ALLA i-ESIMA VARIABILE.

LA DERIVATA DI f IN $\bar{x}$ NELLA DIREZIONE e_i SI CHIAMA **DERIVATA PARZIALE** RISPETTO ALLA i-ESIMA VARIABILE E SARÁ DENOTATA CON I SIMBOLI:

$$\partial_i f(\bar{x}) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \quad , \quad D_i f(\bar{x}) \quad , \quad f_{x_i}(\bar{x})$$

IN SOSTANZA AVREMO:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + t e_i) - f(\bar{x})}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i + t \cdot 1, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{t}$$

SI OSSERVI CHE IL FATTO DI AVER SOMMATO A $\bar{x}$ IL TERMINE $t e_i$ INCIDE SOLO SULLA i-ESIMA COMPONENTE DI $\bar{x}$, INFATTI ALLUNGHIAMO SOLO LÍ IL TERMINE t.

IN CONCLUSIONE CAPIAMO CHE DERIVARE PARZIALMENTE RISPETTO ALLA i-ESIMA VARIABILE SIGNIFICA FISSARE TUTTE LE VARIABILI E DERIVARE <u>SOLO</u> RISPETTO ALLA i-ESIMA (A CUI AVREMO AGGIUNTO IL TERMINE t).

SE $B \subseteq \text{int}(A)$ DIREMO CHE f É DERIVABILE PARZIALMENTE IN B RISPETTO ALLA i-ESIMA COMPONENTE SE LO É IN OGNI PUNTO DI B.

SE f HA DOMINIO APERTO DIREMO CHE f É DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO ALLA i-ESIMA VARIABILE SE LO É IN TUTTO IL DOMINIO.

→ SE f É PARZIALMENTE DERIVABILE IN UN PUNTO RISPETTO A TUTTE LE VARIABILI DIREMO CHE É DERIVABILE PARZIALMENTE NEL PUNTO.

IL GRADIENTE

Vittorio Alzetta

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E SIA $\bar{x}$ UN PUNTO INTERNO DI A.

SUPPONIAMO CHE f SIA DERIVABILE PARZIALMENTE IN $\bar{x}$ (CIOÉ RISPETTO A TUTTE LE VARIABILI).

CHIAMEREMO **GRADIENTE** DI f IN $\bar{x}$ IL VETTORE DI $\mathbb{R}^n$ LE CUI COMPONENTI SONO LE DERIVATE PARZIALI RISPETTO ALLE VARIABILI $x_1, \dots, x_n$.

SCRIVEREMO:

$$\nabla f(\bar{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) , \dots , \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$$

SIA ORA $B \subseteq \text{int}(A)$ TALE CHE f É DERIVABILE PARZIALMENTE IN B (CIOÉ IN OGNI SUO PUNTO RISPETTO A TUTTE LE VARIABILI), POSSIAMO DEFINIRE LA FUNZIONE **FUNZIONE GRADIENTE** CHE AD OGNI $\bar{x} \in B$ ASSOCIA IL GRADIENTE DI f IN QUEL PUNTO:

$$\nabla f : A \to \mathbb{R}^n \qquad x \in A \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) , \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

HO SCRITTO A AL POSTO DI B CONSIDERANDO A APERTO E QUINDI $A \equiv \text{int}(A)$.

ESEMPIO:

SCRIVIAMO IL GRADIENTE DI: $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - z)$ IN $(1, 1, -1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2 - z} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2 - z} \cdot 2y \quad \longrightarrow \quad \nabla f = \left(\frac{2x}{x^2+y^2-z} , \frac{2y}{x^2+y^2-z} , \frac{-1}{x^2+y^2-z} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{x^2 + y^2 - z} \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 1, -1) = (2, 2, -1)$$

Vittorio Alzetta

SIA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ COSÍ DEFINITA:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f NON É CONTINUA IN $(0,0)$ INFATTI BASTA RESTRINGERSI A $(0,y)$ e (y,y) PER AVERE:

$$\lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0+y^2} = 0 \neq \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

IL SECONDO IN PARTICOLARE É UN RISULTATO DIVERSO DAL VALORE CHE f ASSUME IN $(0,0)$.

É TUTTAVIA DERIVABILE PARZIALMENTE IN $\mathbb{R}^2$ E LA SUA FUNZIONE GRADIENTE PER $(x,y) \neq (0,0)$ É:

$$\nabla f = \left(-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \;,\; -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \right)$$

NOTIAMO CHE IN QUESTO CASO LA FUNZIONE É DISCONTINUA E DERIVABILE PARZIALMENTE, VOGLIAMO QUINDI INTRODURRE UNA NOZIONE DI DERIVABILITÁ PIÚ FORTE.

IN ANALISI 1 ABBIAMO DETTO CHE f É DERIVABILE IN $\bar{x}$ SE ESISTE $c \in \mathbb{R}$ TALE CHE:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = c$$

DA CUI SI RICAVA SUBITO:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - ch}{|h|} = 0$$

IN SOSTANZA POSSIAMO PRENDERE ch e ~~FARE~~ DEFINIRE UN'APPLICAZIONE LINEARE $L(h) := c \cdot h$, COSÍ POSSIAMO RISCRIVERE LA CONDIZIONE DI DERIVABILITÁ DI f IN $\bar{x}$ IMPONENDO CHE ESISTA L TALE CHE:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - L(h)}{h} = 0$$

DOVE L É LA DERIVATA DI f IN $\bar{x}$, $L(h) = f'(\bar{x}) \cdot h$.

SI IVÓ ANCHE RISCRIVERE COME:

$$f(x) = f(\bar{x}) + L(x-\bar{x}) + o(|x-\bar{x}|) \qquad [1]$$

$\hookrightarrow f'(x-\bar{x})$

DOVE $f(\bar{x}) + L(x-\bar{x})$ RAPPRESENTA LA RETTA TANGENTE A $f(x)$ IN $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

IL DIFFERENZIALE

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E SIA $\bar{x} \in int(A)$.

DIREMO CHE f É **DIFFERENZIABILE** IN $\bar{x}$ SE ESISTE UN'APPLICAZIONE LINEARE $L_{\bar{x}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ TALE CHE:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - L_{\bar{x}}(h)}{\|h\|} = 0$$

O, OSSERVANDO LA [1], AVREMO:

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + L_{\bar{x}}(h) + o(\|h\|)$$

CON $h \to 0$.

CHIAMEREMO $L_{\bar{x}}$ **DIFFERENZIALE** DI f IN $\bar{x}$ E SCRIVEREMO $df(\bar{x})$.

TEOREMA

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E $\bar{x}$ INTERNO AD A. SE f É DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ ALLORA f É DERIVABILE IN $\bar{x}$ IN TUTTE LE DIREZIONI v E

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = L_{\bar{x}}(v)$$

APPLICANDO QUESTO TEOREMA AI VETTORI e_i DELLA BASE CANONICA OTTENIAMO:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = L_{\bar{x}}(e_i) \qquad [1]$$

CON $i = 1, \dots, n$.

GRAZIE AL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE (ALGEBRA) SI PUÓ SCRIVERE:

$$\begin{aligned} df(\bar{x})(h) &= L_{\bar{x}}(h) \\ &= \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle \\ &= \nabla f(\bar{x}) \cdot h \end{aligned}$$

DOVE h É UNA DIREZIONE, E IL PRODOTTO É FINALE É TRA LA MATRICE RIGA DEL GRADIENTE E LA MATRICE COLONNA DELLA DIREZIONE.

DALLA DEFINIZIONE DI DIFFERENZIALE DATA ORA SI PUÓ DIMOSTRARE CHE SE f É DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ ALLORA É ANCHE CONTINUA IN $\bar{x}$

PIANO TANGENTE

A PARTIRE DA UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE SI PUÓ DEFINIRE IL PIANO TANGENTE COME:

$$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle$$

CHE APPROSSIMA f IN UN INTORNO DI $\bar{x}$ A MENO DI INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE A $\| x - \bar{x} \|$.

IL GRAFICO DI QUESTA FUNZIONE É DETTO LINEARIZZAZIONE DI f IN $\bar{x}$.

Vittorio Alzetta

OSSERVAZIONI:

1) SE f É DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ POSSIAMO CALCOLARE LA DERIVATA DIREZIONALE COME:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = L_{\bar{x}}(v) = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle$$

SUPPOSTO $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ E CHIAMATO θ L'ANGOLO TRA $\nabla f(\bar{x})$ E v AVREMO:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \| \nabla f(\bar{x}) \| \cdot \| v \| \cdot \cos\theta$$

2) IL VALORE DELLA DERIVATA DIREZIONALE É MASSIMO QUANDO $\theta = 0$ ($\cos\theta = 1$) E MINIMO QUANDO $\theta = \pi$ ($\cos\theta = -1$) OSSIA QUANDO $\nabla f(\bar{x})$ E v SONO PARALLELI E ORIENTATI NELLA STESSA DIREZIONE O IN QUELLA OPPOSTA.

DUNQUE IL GRADIENTE INDICA LA DIREZIONE IN CUI LA DERIVATA DIREZIONALE É MASSIMA (SE IL NOSTRO VETTORE v VIENE POSTO NELLA DIR. DEL GRADIENTE SIAMO SICURI DI AVER OTTENUTO IL RISULTATO MASSIMO), CIOÉ LA PENDENZA É MASSIMA.

3) IN DIREZIONE ORTOGONALE AL GRADIENTE LA PENDENZA (DERIVATA DIREZIONALE) É NULLA.

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E P INTERNO AD A.

SUPPONIAMO CHE f SIA DERIVABILE PARZIALMENTE IN UN INTORNO DI P CON DERIVATE PARZIALI CONTINUE IN P,

ALLORA f É DIFFERENZIABILE IN P.

dim: FAREMO LA DIMOSTRAZIONE NEL CASO $n = 2$.

CHIAMIAMO $P = (x, y)$ E $\vec{h} = (s, t)$, DOBBIAMO MOSTRARE CHE:

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{f(P+\vec{h}) - f(P) - \langle \nabla f(P), \vec{h} \rangle}{\|\vec{h}\|} = 0$$

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{f(x+s, y+t) - f(x,y) - \partial_x f(x,y)\cdot s - \partial_y f(x,y)\cdot t}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0$$

I PRIMI DUE TERMINI AL NUMERATORE POSSONO ESSERE RISCRITTI COME:

$$f(x+s, y+t) - f(x,y) = [f(x+s, y+t) - f(x, y+t)] + [f(x, y+t) - f(x,y)]$$

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE POSSIAMO RISCRIVERE IL PRIMO TERMINE COME:

$$\frac{f(x+s, y+t) - f(x, y+t)}{(x+s) - (x)} = \partial_x f(c, y+t) \qquad c \in [x, x+s]$$

$$\hookrightarrow \quad f(x+s, y+t) - f(x, y+t) = \partial_x f(c, y+t)\cdot s$$

PER LO STESSO MOTIVO AVREMO: $d \in [y, y+t]$

$$f(x, y+t) - f(x,y) = \partial_y (x, d)\cdot t$$

RISCRIVO QUINDI L'ARGOMENTO DEL LIMITE:

$$\frac{\partial_x f(c, y+t)\cdot s + \partial_y f(x,d)\cdot t - \partial_x f(x,y)\cdot s - \partial_y f(x,y)\cdot t}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

RACCOGLIENDO LA s E LA t OTTENIAMO:

$$\left[\partial_x f(c, y+t) - \partial_x f(x,y)\right]\cdot \frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}} + \left[\partial_y f(x,d) - \partial_y f(x,y)\right]\cdot \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}} \leq$$

$$\leq \left|\partial_x f(c, y+t) - \partial_x f(x,y)\right|\cdot \frac{|s|}{\sqrt{s^2+t^2}} + \left|\partial_y f(x,d) - \partial_y f(x,y)\right|\cdot \frac{|t|}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

QUANDO $(s,t) \to (0,0)$ I TERMINI CHE HO EVIDENZIATO VANNO A 0 E QUINDI L'ARGOMENTO DEL LIMITE È MINORE DI ciò CHE HO SCRITTO SOPRA, TENDERÀ A 0

$$\leq \left|\partial_x f(c, y+t) - \partial_x f(x,y)\right| + \left|\partial_y f(x,d) - \partial_y f(x,y)\right| \quad [1]$$

DUNQUE QUANDO $(s,t) \to (0,0)$ AVREMO CHE $x \leq c \leq x+s$ E $y \leq d \leq y+t$, DA CUI SI RICAVA $c = x$ E $y = d$.

PER LA CONTINUITÁ DELLE DERIVATE PARZIALI SI AVRÁ CHE:

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \partial_x f(c, y+t) = \partial_x f(x,y)$$

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \partial_y f(x,d) = \partial_y f(x,y)$$

DA CUI OSSERVIAMO CHE LA $[1]$ TENDE A 0, PORTANDO A 0 ANCHE L'ARGOMENTO DEL LIMITE E DIMOSTRANDO LA TESI.

□

Vittorio Alzetta

Vittorio Alzetta

CLASSE C^1 E DIFFERENZIABILITÁ

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

DIREMO CHE f É DIFFERENZIABILE IN A SE f É DIFFERENZIABILE IN OGNI PUNTO DI A. A SEGUIRE DAL TEOREMA CHE ABBIAMO APPENA DIMOSTRATO DIAMO LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE DI CLASSE C^1 IN A COME UNA FUNZIONE DERIVABILE PARZIALMENTE IN A CON DERIVATE CONTINUE IN A (E QUINDI DIFFERENZIABILE), SCRIVEREMO :

$$f \in C^1(A)$$

OSSERVAZIONE :

CONSIDERIAMO $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LINEARE, ORA SCRIVIAMO LA CONDIZIONE DI DIFFERENZIABILITÁ :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P+h) - f(P) - L_P(h)}{\|h\|} = 0$$

ORA SCRIVIAMO LA STESSA COSA SOSTITUENDO $f(h)$ AL POSTO DI $L_P(h)$ E VEDIAMO COSA SUCCEDE :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P+h) - f(P) - f(h)}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(P) + f(h) - f(P) - f(h)}{\|h\|} = \frac{0}{\|h\|} = 0$$

(DALLA LINEARITÁ)

LE FUNZIONI POLINOMIALI E RAZIONALI SONO DIFFERENZIABILI NEL LORO DOMINIO.

ESERCIZIO :

TROVIAMO IL PIANO TANGENTE ALLA SEGUENTE FUNZIONE :

$$f(x,y) = \frac{1}{3} x^3 y^2 - x^2 y$$

NEL PUNTO $(1,3)$.

ANZITUTTO CALCOLIAMO $f(1,3) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 \cdot 3^2 - 1^2 \cdot 3 = 0$

CALCOLIAMO QUINDI IL GRADIENTE :

$$\partial_x f(x,y) = \frac{3}{3} y^2 x^2 - 2yx$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{2}{3} x^3 y - x^2$$

$$\nabla f(x,y) = \left(y^2 x^2 - 2xy \, , \, \frac{2}{3} x^3 y - x^2 \right)$$

ORA CALCOLIAMO IL GRADIENTE IN $(1,3)$:

$$\nabla f(1,3) = \left(3^2 - 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \, , \, \frac{2}{3} 1^3 \cdot 3 - 1^2 \right)$$

$$= (3, 1)$$

ORA, APPLICANDO LA FORMULA :

$$\pi : f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}) \, , \, X - \bar{X} \rangle$$

OTTENIAMO :

$$\pi : f(1,3) + \nabla f(1,3) \cdot (x-1, y-3)$$

$$\pi : 0 + (3,1) \cdot (x-1, y-3)$$

$$\pi : 0 + 3(x-1) + 1(y-3)$$

$$\pi : 3x + y - 6$$

FORMULE PER IL CALCOLO DELLE DERIVATE

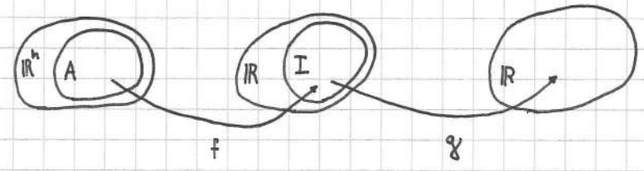
SIA $A \subset \mathbb{R}^n$ APERTO E SIA $P \in A$.

SIANO $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DERIVABILI IN P, PRESI $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ VARRANNO:

- $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
- $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$
- $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$

DERIVATA FUNZIONE COMPOSTA

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E SIA $P_0 \in A$, CON f DIFFERENZIABILE IN P_0.
SIA $I \subset \mathbb{R}$ TALE CHE $f(A) \subset I$ (L'IMMAGINE DI f È CONTENUTA IN I)
E SIA $g : I \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN $f(P_0)$:



DEFINIAMO $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}$, CHE VUOL DIRE $h(P) := g(f(P))$.
CHE È DIFFERENZIABILE IN P_0 E:

$$\nabla h(P_0) = g'(f(P_0)) \cdot \nabla f(P_0)$$

*

POSITIVA OMOGENEITÁ

SIA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ POSITIVAMENTE OMOGENEA ($f(0) = 0$) DI GRADO α E CONTINUA PER $P \neq 0$.

se $\alpha > 1$ f È DIFFERENZIABILE NELL'ORIGINE E $\nabla f(0) = 0$
se $\alpha < 1$ f NON È DIFFERENZIABILE NELL'ORIGINE (TRANNE PER f COSTANTE E $\alpha = 0$)
se $\alpha = 1$ f È DIFFERENZIABILE NELL'ORIGINE $\Leftrightarrow$ f È LINEARE

Vittorio Alzetta

dim: $\boxed{\alpha > 1}$

DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0) - 0}{\|h\|} = 0$, DAL MOMENTO CHE f È POSITIVAMENTE OMOGENEA AVREMO CHE $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{\|h\|} = 0$ E DUNQUE È VERIFICATA LA TESI.

$\boxed{0 < \alpha < 1}$

SIA $v \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ TALE CHE $f(v) \neq 0$.
CALCOLIAMO LA DERIVATA DIREZIONALE IN 0:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(0 + tv) - f(0)}{t}$$

SAPENDO CHE:

$$f(P) = \|P\|^\alpha f\left(\frac{P}{\|P\|}\right)$$

SI OTTIENE:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(v)}{t^{1-\alpha}} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$\boxed{\alpha \leq 0}$

LA FUNZIONE NON È CONTINUA IN 0, DUNQUE NON SARÁ DIFFERENZIABILE.

FUNZIONE RADIALE

CHIAMIAMO FUNZIONE RADIALE UNA FUNZIONE $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CHE DIPENDE SOLO DALLA DISTANZA DI $P \in \mathbb{R}^n$ DALL'ORIGINE.
POTREMMO AVERE UNA COSA DEL TIPO $h(P) = g(\|P\|)$ DOVE $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.
AD ESEMPIO $g(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

* DATA $\phi : I \to A$ DERIVABILE IN $t_0 \in I$ AVREMO $h'(t_0) = \langle \nabla f(\phi(t_0)), \phi'(t_0) \rangle$
CON $h = f \circ \phi : I \to \mathbb{R}$

Vittorio Alzetta

ORTOGONALITÀ CURVE DI LIVELLO

SIA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE E CONSIDERIAMO L'INSIEME DI LIVELLO DATO DA $f(x,y) = c$ (SONO TUTTI I PUNTI CHE SI TROVANO AD ALTEZZA c).

SUPPONIAMO CHE QUESTO INSIEME DI LIVELLO SIA PARAMETRIZZATO REGOLARMENTE DA $\alpha(t)$.

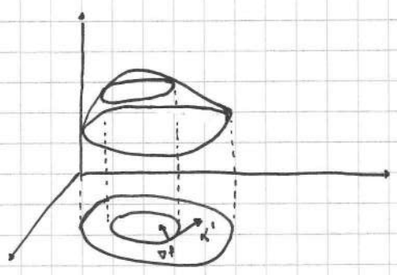
PONIAMO $g(t) := f(\alpha(t))$, PER DEFINIZIONE AVREMO $g(t) = c$

E DUNQUE $g'(t) = 0$ (É COSTANTE).

APPLICANDO LA DERIVATA DI FUNZIONI COMPOSTE ABBIAMO CHE:

$$g'(t) = \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$$

DA CUI CAPIAMO CHE IL GRADIENTE DI f É PERPENDICOLARE IN OGNI PUNTO ALLE SUE LINEE DI LIVELLO ($\alpha'(t)$ É TANGENTE ALLE LINEE DI LIVELLO).



TEOREMA DEL VALORE MEDIO DI LAGRANGE

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E SIANO $\vec{x}, \vec{y}$ PUNTI INTERNI DI A.

SUPPONIAMO CHE IL SEGMENTO $[\vec{x}, \vec{y}]$ SIA CONTENUTO NELL'INTERNO DI A E CHE f SIA DIFFERENZIABILE NEI PUNTI DI $[\vec{x}, \vec{y}]$, ALLORA ESISTE $\vec{z} \in (\vec{x}, \vec{y})$ TALE CHE:

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = \langle \nabla f(\vec{z}), (\vec{y} - \vec{x}) \rangle$$

<u>dim:</u> SIA $\vec{r}(t) = (1-t)\vec{x} + t\vec{y}$ PER $t \in [0,1]$ LA PARAMETRIZZAZIONE DEL SEGMENTO $[\vec{x}, \vec{y}]$.

LA FUNZIONE $g(t) = f(\vec{r}(t))$ PER $t \in [0,1]$ É CONTINUA E DERIVABILE.

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE IN $\mathbb{R}^1$ ABBIAMO CHE ESISTE $t_0 \in (0,1)$ TALE CHE:

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)$$

OVVERO:

$$g'(t_0) = g(1) - g(0) = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = f(\vec{y}) - f(\vec{x})$$

($f((1-1)\vec{x} + 1\cdot\vec{y})$)

E POICHÉ:

$$g'(t_0) = \langle \nabla f(\vec{r}(t_0)), \vec{r}'(t_0) \rangle = \langle \nabla f(\vec{r}(t_0)), (\vec{y} - \vec{x}) \rangle$$

DA CUI, SOSTITUENDO $\vec{r}(t_0)$ CON $\vec{z}$ OTTENIAMO LA TESI:

$$g'(t_0) = f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = \langle \nabla f(\vec{z}), (\vec{y} - \vec{x}) \rangle$$

CARATTERIZZAZIONE FUNZIONI A GRADIENTE NULLO

SIA $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CON A APERTO E <u>CONNESSO</u> (OGNI COPPIA DI PUNTI PUÓ ESSERE UNITA DA UNA POLIGONALE).

SUPPONIAMO CHE f SIA DIFFERENZIABILE IN A E $\nabla f(x) = 0 \ \forall x \in A$, ALLORA f É COSTANTE.

<u>dim:</u> DAL TEOREMA DI LAGRANGE DEDUCIAMO CHE $f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = 0$ E QUINDI $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$, DUNQUE SE NEGLI ESTREMI DI OGNI SEGMENTO f É COSTANTE <u>E</u> OGNI PUNTO DI A PUÓ ESSERE UNITO DA UN SEGMENTO POSSIAMO CONCLUDERE CHE f É COSTANTE.

↳ SAREBBE PIÚ PRECISO DIRE DA UNA SERIE DI SEGMENTI ovvero UNA POLIGONALE.

Vittorio Alzetta

DERIVATE PARZIALI DI ORDINE SUPERIORE

SIA $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ E SUPPONIAMO CHE ESISTA LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x, CIOÉ f_x.

IN TAL CASO POTREMO, SE ESISTONO, CALCOLARE LE DERIVATE PARZIALI RISPETTO A x O y DI f_x, LE CHIAMEREMO DERIVATE PARZIALI DI **2° ORDINE**.

SCRIVEREMO:

$$f_{xx} = \partial^2_{xx} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yx} = \partial^2_{yx} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

LA STESSA COSA VALE POI PER f_y CHE PUÓ ESSERE PARZIALMENTE DERIVABILE RISPETTO A x E y.

PRESO A APERTO E $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CON $P \in A$ E $i, j \in \{1, \dots, n\}$ DIREMO CHE f É DERIVABILE PARZIALMENTE 2 VOLTE IN P RISPETTO A x_i E x_j SE ESISTE:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(P)$$

E LA CHIAMEREMO DERIVATA PARZIALE SECONDA DI f IN P RISPETTO A x_i E x_j.

SE $i = j$ LA DERIVATA SI DICE **PURA**, SE $i \neq j$ SI DICE **MISTA**.

LA MATRICE HESSIANA

SIA A APERTO CON $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E $P \in A$.

SUPPONIAMO CHE f SIA DERIVABILE PARZIALMENTE 2 VOLTE IN P (QUINDI RISPETTO A x_i, x_j $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$).

LA SEGUENTE MATRICE:

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(P) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

CHE RASSUME IL VALORE DI TUTTE LE DERIVATE PARZIALI DI 2° ORDINE IN P É DETTA MATRICE **HESSIANA** DI f IN P.

SI OSSERVI CHE SPESSO LE DERIVATE PARZIALI VARIANO IN BASE ALL'ORDINE CON IL QUALE SI ESEGUONO LE DERIVATE, AD ESEMPIO:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{SE } y \neq 0 \\ 0 & \text{SE } y = 0 \end{cases}$$

PROVIAMO A CALCOLARE LE DERIVATE PARZIALI DI 2° ORDINE IN $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(0 + 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$

TEOREMA DI SCHWARZ

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CON A APERTO E $P \in A$

SUPPONIAMO CHE ESISTANO LE DERIVATE PARZIALI SECONDE MISTE:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P)$$

SI RICORDA CHE MISTE SIGNIFICA $i \neq j$. SE LE DERIVATE PARZIALI SONO CONTINUE IN A ALLORA COINCIDONO.

SI OSSERVI CHE SE f HA TUTTE LE DERIVATE PARZIALI SECONDE CONTINUE IN A SI DIRÀ CHE f È DI CLASSE C^2 $\left(f \in C^2(A) \right)$.

INOLTRE, NON DIPENDENDO DALL'ORDINE IN CUI SI ESEGUONO LE DERIVATE, LE FUNZIONI DI $C^2(A)$ HANNO LA MATRICE HESSIANA SIMMETRICA.

SAPPIAMO ANCHE PER IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE SE LE DERIVATE PARZIALI SECONDE SONO CONTINUE IN A ALLORA LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO DIFFERENZIABILI, E QUINDI CONTINUE, IN A.

$C^k(A)$ DENOTERÀ L'INSIEME DELLE FUNZIONI CON DERIVATE PARZIALI k-ESIME CONTINUE IN A.

LA FORMA QUADRATICA

SIA H UNA MATRICE SIMMETRICA $n \times n$ E q UN VETTORE DI $\mathbb{R}^n$, LA FORMA QUADRATICA DI H È L'APPLICAZIONE LINEARE:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ H &\longmapsto H_q \cdot q \end{aligned}$$

CON $n = 2$, $q = (x, y)$, $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ AVREMO:

$$H_q \cdot q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + byx + dy^2 = ax^2 + 2bxy + dy^2$$

FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 2

Vittorio Alzetta

SIANO A APERTO E $f \in C^2(A)$ CON $\vec{v} \in A$.

CHIAMEREMO POLINOMIO DI TAYLOR DI f DI CENTRO $\vec{v}$ E ORDINE 2 LA FUNZIONE POLINOMIALE $T_{\vec{v},2}$ DEFINITA COME:

$$T_{\vec{v},2}(\vec{x}) := f(\vec{v}) + \langle \nabla f(\vec{v}), (\vec{x} - \vec{v}) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\vec{v}) \cdot (\vec{x} - \vec{v}), (\vec{x} - \vec{v}) \rangle$$

$$:= f(\vec{v}) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\vec{v})(x_i - v_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \partial_{i,j} f(\vec{v})(x_i - v_i)(x_j - v_j)$$

CHIAMEREMO RESTO DI TAYLOR DI f DI CENTRO $\vec{v}$ E ORDINE 2 LA FUNZIONE:

$$R_{\vec{v},2}(\vec{x}) := f(\vec{x}) - T_{\vec{v},2}(\vec{x})$$

ESERCIZIO:

SCRIVIAMO ORA IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE 2 CON CENTRO $(0,0)$ PER LA FUNZIONE:

$$f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$$

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

IN QUESTO CAPITOLO CI OCCUPEREMO DELLA CLASSIFICAZIONE E DEI METODI CHE SI POSSONO ADOPERARE PER RISOLVERE PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE (CIOÉ DI RICERCA DEI MASSIMI O MINIMI).

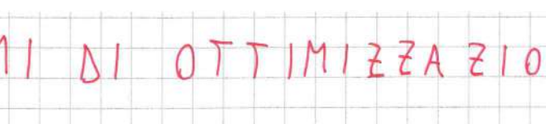
DISTINGUEREMO 3 TIPI DI PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE :

- MINIMO / MASSIMO LIBERO
- MINIMO / MASSIMO VINCOLATO
- DI PROGRAMMAZIONE

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

SI TRATTA CERCARE I PUNTI DI MASSIMO O MINIMO DI UNA FUNZIONE f DEFINITA IN UN APERTO.

CONSIDERIAMO 3 CITTÁ :



VOGLIAMO UNIRLE CON DELLE STRADE, PENSIAMO QUINDI DI COSTRUIRE 3 TRATTI $[C_1, P]$, $[C_2, P]$, $[C_3, P]$.

SI PRESENTA ORA IL PROBLEMA DI SCEGLIERE DOVE PIAZZARE IL PUNTO P IN $\mathbb{R}^2$ (é APERTO), DUNQUE SIAMO DI FRONTE AD UN PROBLEMA DI MINIMO LIBERO.

TEOREMA DI FERMAT

ABBIAMO BISOGNO DI STRUMENTI PER INDIVIDUARE TALI PUNTI DI MINIMO, DUNQUE IL TEOREMA DI FERMAT CI DICE CHE DATO $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO E $f : A \to \mathbb{R}$, SE $P_0 \in A$ É PUNTO DI MINIMO O MASSIMO LOCALE PER f E SE ESISTE $\nabla f(P_0)$ ALLORA DEVE VALERE $\nabla f(P_0) = 0$

Vittorio Alzetta

dim: SIA $P_0 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE (SI RAGIONA ALLO STESSO MODO CON UN PUNTO DI MINIMO LOCALE).

SIA $r > 0$ TALE CHE : $\forall P \in B_r(P_0) : f(P_0) \geq f(P)$

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE :

$$f(t, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad \text{con } t \in (\bar{x}_1 - r, \bar{x}_1 + r)$$

TALE FUNZIONE É BEN DEFINITA E APPARTIENE ALLA PALLA DI CENTRO P_0 E RAGGIO r, DUNQUE HA MASSIMO LOCALE QUANDO $t = \bar{x}_1$ (INFATTI CI RITROVEREMO CON $f(P_0)$).

PRIMA DI PROCEDERE MI PREME FAR NOTARE CHE LA FUNZIONE DI CUI STIAMO PARLANDO ASSOCIA A t (NUMERO REALE) IL RISULTATO DELLA f (CHE PER IPOTESI VA DA $\mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}$!) DUNQUE QUESTA BANALISSIMA FUNZIONE É REALE DI VARIABILE REALE!

POSSIAMO QUINDI OSSERVARE CHE PER IL TEOREMA SUI PUNTI CRITICI VISTO IN ANALISI 1 LA DERIVATA DI QUESTA FUNZIONE PER $t = \bar{x}_1$ É 0, IN FORMULE :

$$\frac{d}{dt} f(t, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)\Big|_{t=\bar{x}_1} = 0$$

MA SI OSSERVI CHE QUESTA NON É ALTRO CHE LA DERIVATA PARZIALE DI $f(P_0)$ RISPETTO A $\bar{x}_1$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$$

SI PUÓ COMPIERE LO STESSO RAGIONAMENTO CON $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ DIMOSTRANDO CHE TUTTE LE DERIVATE PARZIALI SONO NULLE, RENDENDO NULLO IL GRADIENTE

□

Vittorio Alzetta

PUNTI STAZIONARI

SIA $f : A \to \mathbb{R}$ CON $P_0 \in A$.

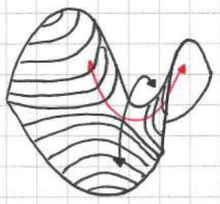
DIREMO CHE P_0 É UN PUNTO STAZIONARIO (O CRITICO) PER f SE ESISTE IL GRADIENTE DI f IN P_0 E:

$$\nabla f(P_0) = 0$$

IN BASE AL TEOREMA DI FERMAT CONDURREMO LA NOSTRA RICERCA DEI PUNTI DI ESTREMO LOCALE QUI:

- PUNTI STAZIONARI INTERNI AL DOMINIO DI f
- PUNTI IN CUI f NON É DIFFERENZIABILE INTERNI AL DOMINIO DI f (LÍ NON POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA DI FERMAT)
- PUNTI DI FRONTIERA DEL DOMINIO DI f

CHIAMEREMO PUNTI DI SELLA I PUNTI STAZIONARI INTERNI AL DOMINIO DI f CHE NON SONO PUNTI DI ESTREMO LOCALE.



LUI C'É UN PUNTO DI SELLA

ESEMPIO

TROVIAMO I PUNTI ESTREMALI DI $f(x,y,z) = x^3y - y + x^2z^2$

ANZITUTTO DOBBIAMO TROVARE I PUNTI IN CUI IL GRADIENTE SI ANNULLA:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{cases} 3x^2y + 2xz^2 = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \\ 2x^2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P = (1,0,0)$$

SARÁ P UN PUNTO DI ESTREMO ASSOLUTO?

NO, INFATTI CI BASTA RESTRINGERE f A:

$$f(0,y,z) = -y$$

DOVE OSSERVIAMO SUBITO CHE f NON É LIMITATA (NÉ SUPERIORMENTE NÉ INFERIORMENTE).

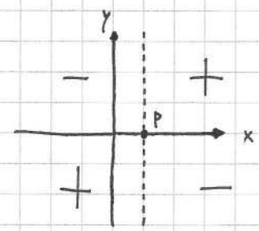
NOTIAMO INOLTRE CHE PRESA LA RESTRIZIONE:

$$f(x,y,0) = (x^3-1)y$$

A CUI P APPARTIENE, AVREMO:

$$(x^3-1)y > 0 \iff x^3 - 1 > 0 \quad \begin{pmatrix} x > 1 & \vee & x < 1 \\ y > 0 & & y < 0 \end{pmatrix}$$
$$y > 0$$

DA CUI:



P É UN PUNTO DI SELLA.

PUNTI ESTREMALI E DERIVATA SECONDA

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CON A APERTO E $P \in A$ STAZIONARIO PER f.

PROVIAMO ORA A TROVARE UN MODO DI STABILIRE SE P É DI MINIMO O MASSIMO O DI SELLA PER f, ANALIZZANDO LE DERIVATE SECONDE (CIOÉ I VALORI DELLA MATRICE HESSIANA) DI f IN P.

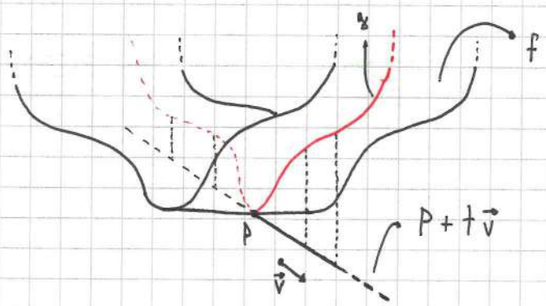
SUPPONIAMO ANZITUTTO CHE f SIA DI CLASSE C^2 (DERIVABILE 2 VOLTE CON DERIVATE CONTINUE) IN UN INTORNO DI P. CIÓ IMPLICA:

- L'HESSIANA É SIMMETRICA
- POSSIAMO SCRIVERE LA FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 2 CON RESTO DI PEANO

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$ UN APERTO E $f: A \to \mathbb{R}$ CON $P \in A$ PUNTO INTERNO E STAZIONARIO PER f,

SIA $\vec{v}$ UN VERSORE, RESTRINGIAMO f ALLA RETTA PASSANTE PER P IN DIREZIONE $\vec{v}$.

CONSIDERIAMO QUINDI $\gamma(t) := f(P + t\vec{v})$ ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, AD OGNI t ASSOCIA IL RISULTATO DELLA f).



NEL DISEGNO É UN MINIMO IL PUNTO P, MA A PRESCINDERE SE É STAZIONARIO PER f VUOL DIRE CHE $\nabla f(P) = 0$ E QUINDI $\gamma'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = 0$

DUNQUE SE f HA MINIMO O MASSIMO IN P ANCHE γ AVRÁ MINIMO O MASSIMO.

SUPPONIAMO CHE $\vec{v}$ SIA UN AUTOVETTORE DI $H_f(P)$ RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ, CIOÉ $H_f(P) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.

POSSIAMO SCRIVERE, SFRUTTANDO LA FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 2 DI P:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) - \gamma(0) &= f(P + t\vec{v}) - f(P) \\
&= \tfrac{1}{2} \langle H_f(P)\, t\vec{v}, t\vec{v} \rangle + o(t^2 \|\vec{v}\|) \\
&= \tfrac{1}{2} \langle \lambda t\vec{v}, t\vec{v} \rangle + o(t^2 \|\vec{v}\|) \\
&= \tfrac{1}{2} t^2 \langle \lambda \vec{v}, \vec{v} \rangle + o(t^2 \|\vec{v}\|) \\
&= \tfrac{1}{2} t^2 \lambda \|\vec{v}\|^2 + o(t^2 \|\vec{v}\|)
\end{aligned}$$

DUNQUE IL SEGNO DELLA SOTTRAZIONE $\gamma(t) - \gamma(0)$ DIPENDE DA λ E AVREMO:

- MINIMO IN 0 SE $\lambda > 0$ (PER γ), MINIMO IN P (PER f RISTRETTA A $P + t\vec{v}$)
- MASSIMO IN 0 SE $\lambda < 0$ (PER γ), MASSIMO IN P (PER f RISTRETTA A $P + t\vec{v}$)

MATRICI DEFINITE E SEMI DEFINITE

DALL'ALGEBRA LINEARE SAPPIAMO CHE PRESA M MATRICE SIMMETRICA E PRESI $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ GLI AUTOVALORI DI M AVREMO:

$$\lambda_1 \|q\|^2 \leq M \cdot q \cdot q \leq \lambda_n \|q\|^2 \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

DIREMO QUINDI CHE M É:

- DEFINITA POSITIVA SE $\lambda_1 > 0$ (QUINDI TUTTI GLI AUTOVALORI SONO POSITIVI)
- SEMIDEFINITA POSITIVA SE $\lambda_1 \geq 0$ (QUINDI TUTTI GLI AUTOVALORI SONO ≥ 0)
- DEFINITA NEGATIVA SE $\lambda_n < 0$ (QUINDI TUTTI GLI AUTOVALORI SONO NEGATIVI)
- SEMIDEFINITA NEGATIVA SE $\lambda_n \leq 0$ (QUINDI TUTTI GLI AUTOVALORI SONO ≤ 0)
- INDEFINITA SE $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$ (ALCUNI AUTOVALORI SARANNO POSITIVI ALTRI NEGATIVI)

TEOREMA DEI PUNTI ESTREMALI (CONDIZIONI DEL 2° ORDINE)

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, $P_0 \in A$ E $f \in C^2(A)$, ALLORA VALGONO:

1) P_0 É PUNTO DI MINIMO LOCALE PER $f \Rightarrow \nabla f(P_0) = 0 \wedge H_f(P_0)$ sem. pos.
2) $\nabla f(P_0) = 0 \wedge H_f(P_0)$ DEF. POS $\Rightarrow P_0$ É PUNTO DI MINIMO LOCALE PER f
3) P_0 É PUNTO DI MASSIMO LOCALE PER $f \Rightarrow \nabla f(P_0) = 0 \wedge H_f(P_0)$ SEM. NEG.
4) $\nabla f(P_0) = 0 \wedge H_f(P_0)$ DEF. NEG. $\Rightarrow P_0$ É PUNTO DI MASSIMO LOCALE PER f
5) $\nabla f(P_0) = 0 \wedge H_f(P_0)$ INDEFINITA $\Rightarrow P_0$ É PUNTO DI SELLA PER f

dim 1 CONSIDERIAMO IL TEOREMA DI FERMAT, DA CUI SAPPIAMO CHE $\nabla f(P_0) = 0$.

SIA ORA λ_1 IL PIÚ PICCOLO AUTOVALORE DI $H_f(P_0)$, AVREMO CHE SFRUTTANDO LO CIÓ $\frac{f(t) - f(0)}{t^2} = \frac{1}{2}\lambda_1 + o(1)$ DOVE $\frac{f(t) - f(0)}{t^2} \geq 0$ E DUNQUE $\lambda_1 \geq 0$

Vittorio Alzetta

Vittorio Alzetta

dim 5 SIANO v E S AUTOVETTORE RELATIVO AL PIÚ PICCOLO AUTOVALORE λ_1 (CHE É NEGATIVO) E SIA w E S AUTOVETTORE RELATIVO AL PIÚ GRANDE AUTOVALORE λ_n (CHE É POSITIVO).

f QUINDI, NEL PUNTO P_0, AMMETTE MINIMO IN DIREZIONE v E MASSIMO IN DIREZIONE w, DUNQUE P_0 É DI SELLA.

DETERMINANTE E MATRICI DEFINITE

SIA H UNA MATRICE 2×2 (SIMMETRICA):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

H É DEFINITA POSITIVA [NEGATIVA] $\Leftrightarrow \det(H) > 0 \wedge a > 0 \ [a < 0]$

H É SEMIDEFINITA POSITIVA [NEGATIVA] $\Leftrightarrow \det(H) = 0 \wedge a > 0 \ [a < 0]$

H É INDEFINITA $\Leftrightarrow \det(H) < 0$

SIA H UNA MATRICE $n \times n$ SIMMETRICA. CHIAMIAMO H_k LA SOTTOMATRICE COSTITUITA DALLE PRIME k RIGHE E k COLONNE DI H.

AD ESEMPIO $H_1 = (h_{11})$, $H_2 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$, $H_n = H$.

É POSSIBILE DIMOSTRARE CHE:

- H É DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow \det H_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$
- H É DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow \det H_k \cdot (-1)^k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

ESEMPIO:

$$H = H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(H_3) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 - 3 = 2 > 0$$

$$\det(H_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0 \qquad \det(H_1) = 1 > 0$$

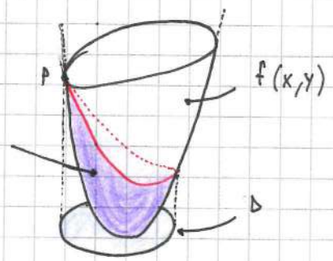
DUNQUE LA MATRICE H É DEFINITA POSITIVA

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

CONSIDERIAMO, PER INIZIARE, IL SEGUENTE PROBLEMA: DOBBIAMO DETERMINARE GLI ESTREMI GLOBALI DELLA FUNZIONE

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$$

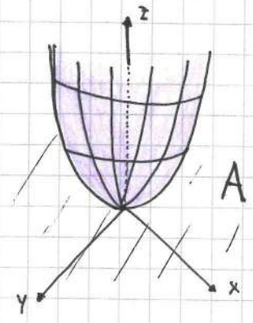
NELL'INSIEME $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, PER CAPIRE MEGLIO LA RICHIESTA PROVIAMO A FARE UN DISEGNO:



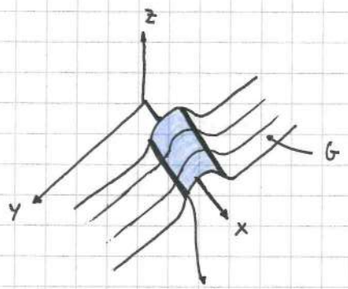
PER TROVARE I PUNTI DI ESTREMO NON POSSIAMO UTILIZZARE GLI STRUMENTI CHE ABBIAMO GIÁ VISTO, INFATTI QUA ABBIAMO A CHE FARE CON UN INSIEME CHIUSO E NON VARREBBERO LE IPOTESI. É ANCHE FACILE NOTARE DALLA FIGURA CHE IL PUNTO P É UN MASSIMO PER LA FUNZIONE VINCOLATA A D NONOSTANTE NON ABBIA GRADIENTE NULLO (QUINDI NON É NEANCHE MASSIMO LOCALE DI f).

AFFRONTIAMO IL PROBLEMA DA UN PUNTO DI VISTA GENERALE, INIZIANDO A DEFINIRE QUALCHE OGGETTO.

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^2$ UN INSIEME APERTO E $f \in C^1(A, \mathbb{R})$



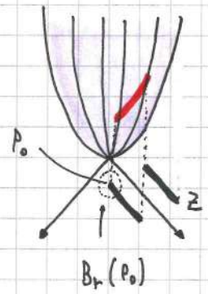
SIA $G \in C^1(A, \mathbb{R})$ E SIA $Z := \{(x,y) \in A : G(x,y) = 0\}$ E SUPPONIAMO $Z \neq \emptyset$,



Z, LUI LA FUNZIONE G PASSA SOTTO IL PIANO XY

CHIAMEREMO Z VINCOLO DI UGUAGLIANZA E DIREMO CHE P_0 É UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE PER F VINCOLATA A Z SE :

$$P_0 \in Z \wedge \exists r > 0 : \forall P \in B_r(P_0) \cap Z : f(P_0) \geq f(P)$$



SUPPONIAMO CHE SI POSSA PARAMETRIZZARE IL VINCOLO Z CON UNA FUNZIONE $r : I \to A$.

ALLORA POSSIAMO CERCARE GLI ESTREMI DELLA FUNZIONE $F(r(t))$ AL VARIARE DI t IN I.

TEOREMA DI DINI (O DELLE FUNZIONI IMPLICITE)

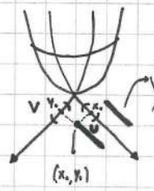
Vittorio Alzetta

SIANO $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO , $G \in C^1(A, \mathbb{R})$ E $Z := \{(x,y) \in A : G(x,y) = 0\}$. SIA $(x_0, y_0) \in Z$ TALE CHE $G_y(x_0, y_0) \neq 0$ (LA DERIVATA PARZIALE DI G RISPETTO A y IN (x_0, y_0)) ALLORA:

- ESISTONO UN INTORNO U DI x_0 E UN INTORNO V DI y_0 TALI PER CUI PER OGNI $x_0 \in U$ ESISTE UNO ED UN SOLO $y \in V$ TALE CHE $G(x,y) = 0$.
- ASSOCIANDO A CIASCUN x DI U IL PROPRIO UNICO ELEMENTO DI V DI CUI ABBIAMO PARLATO SOPRA OTTENIAMO UNA FUNZIONE $h : U \to V$ TALE CHE : $G(x, h(x)) = 0$
- h É DI CLASSE C^1 E PER OGNI $x \in U$ VALE :

$$h'(x) = -\frac{G_x(x, h(x))}{G_y(x, h(x))}$$

PER COMPRENDERE MEGLIO L'ENUNCIATO RIPRENDO L'ESEMPIO DI PRIMA :



PER FARE SI CHE L'ENUNCIATO IN REALTÁ É VALIDO ANCHE SUI PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE CONSIDERANDO QUESTO PEZZO L'ENUNCIATO, INFATTI BASTA CHE L'INTORNO V NEL QUALE ESISTE UN SOLO y : $G(x,y) = 0$ ESISTA. E INFATTI ESISTE.

DIREMO CHE h É DEFINITA IMPLICITAMENTE DALL'EQUAZIONE $G(x,y) = 0$. IN SOSTANZA IL TEOREMA DI DINI CI DICE CHE LA FUNZIONE h DEVE ESSERE UNA FUNZIONE , DATE LE CONDIZIONI DEL PUNTO 1 (É PRATICAMENTE LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE).

PRIMA DELLA DIMOSTRAZIONE SI OSSERVI CHE AL POSTO DI Z PUÒ ESSERE PRESO UN QUALUNQUE INSIEME DI LIVELLO :

$$E_c := \{(x,y) \in A : G(x,y) = c\} \quad \text{CON } E_0 = Z$$

Vittorio Alzetta

dim: PER IPOTESI SAPPIAMO CHE G_y É CONTINUA E POICHÉ IN (x_0, y_0) É DIVERSA DA 0 ALLORA POSSIAMO SUPPORRE $G_y(x_0, y_0) > 0$.

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO ESISTE UNA PALLA DI RAGGIO $\sqrt{2}r$ E CENTRO (x_0, y_0) TALE PER CUI $G_y > 0$ (HO PRESO RAGGIO $\sqrt{2}r$ PER FAR SI CHE ALL'INTERNO DELLA PALLA ROSSA CONTENUTO IL QUADRATO DI LATO $2r$).

FISSIAMO ORA x NELL'INTERVALLO $[x_0 - r, x_0 + r]$ IN MODO DA OTTENERE LA SEGUENTE FUNZIONE:

$$y \in [y_0 - r, y_0 + r] \mapsto G(\bar{x}, y)$$

(LO CHIAMO $\bar{x}$ PER FAR CAPIRE CHE É FISSATO, NON PUÓ VARIARE)

QUESTA NUOVA FUNZIONE HA COME SOLA VARIABILE LA y E POICHÉ $G_y > 0$ (G_y É COME PRIMA LA SEMPLICE DERIVATA PARZIALE DI QUESTA NUOVA FUNZIONE DATO CHE DIPENDE SOLO DA y), LA FUNZIONE SARÁ CRESCENTE IN $[y_0 - r, y_0 + r]$.

POICHÉ QUANDO $y = y_0$ E $\bar{x}$ VIENE PRESO PARI A x_0 SI HA CHE $G(x_0, y_0) = 0$ E LA FUNZIONE DI VARIABILE y É CRESCENTE ALLORA

$$G(x_0, y_0 - r) < 0 < G(x_0, y_0 + r).$$

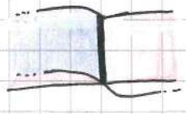
- RICORDATI CHE G É DEFINITA IN $\mathbb{R}^2$, QUELLO É IL SUO DOMINIO, IMMAGINATELA COME ONDA-

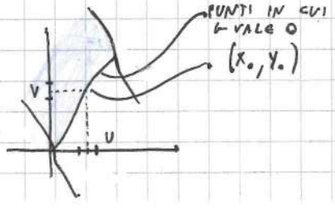
PER LA CONTINUITÁ DI G IN $(x_0, y_0 - r)$ E $(x_0, y_0 + r)$ E PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO AVREMO CHE ESISTERÁ UN INTORNO DI x_0 CHE CHIAMEREMO U TALE PER CUI PER OGNI $x \in U$ SI AVRÁ

$$G(x, y_0 - r) < 0 < G(x, y_0 + r)$$

QUINDI PER OGNI x IN U, PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI, CI SARÁ UN $\underline{y}$ UNICO IN CUI $G(x, \underline{y}) = 0$.

↳ DALLA CRESCENZA DI $G(x, y)$.





TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO, $f \in C^1(A, \mathbb{R})$, $G \in C^1(A, \mathbb{R})$ E $Z := \{(x, y) \in A : G(x, y) = 0\}$.

SIA $(x_0, y_0) \in Z$ TALE CHE $\nabla G(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ (LE DERIVATE PARZIALI RISPETTO A x E y IN (x_0, y_0) DEVONO ESSERE $\neq 0$)

SUPPONIAMO CHE (x_0, y_0) SIA UN PUNTO DI ESTREMO LOCALE PER f VINCOLATA A Z (ABBIAMO VISTO CHE É POSSIBILISSIMO CHE IL GRADIENTE SIA $\neq 0$).

ALLORA ESISTE $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE (x_0, y_0, λ_0) É SOLUZIONE DEL SISTEMA:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda G_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda G_y(x, y) \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

(QUESTO IMPONE IL VINCOLO)

DOVE λ_0 É DETTO MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE.

dim: DAL FATTO CHE $\nabla G(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ SEGUE $G_y(x_0, y_0) \neq 0$.

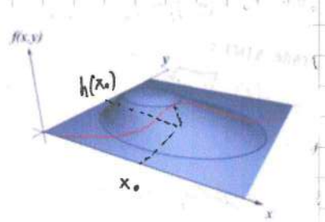
PER DINI ESISTE LA FUNZIONE $h : U \to V$ ($? \mathbb{R}$) TALE CHE $G(x, h(x)) = 0$

E QUINDI IL VINCOLO É PARAMETRIZZATO DA $r(x) = (x, h(x))$.

↳ $r'(x) = (1, h'(x))$

DEFINIAMO ORA LA FUNZIONE g COME:

$$g(x) := f(r(x)) = f(x, h(x))$$



LA LINEA ROSSA SAREBBE $g(x)$, IN x_0 HA UN ESTREMO E QUINDI $g'(x_0) = 0$, POICHÉ g É DERIVATA COME FUNZIONE COMPOSTA LA SUA DERIVATA SARÁ:

$$0 = g'(x_0) = \langle \nabla f(r(x_0)) \cdot r'(x_0) \rangle = \langle \nabla f(x_0, h(x_0)) \cdot (1, h'(x_0)) \rangle$$

$$= \langle (f_x(x_0, h(x_0)), f_y(x_0, h(x_0))) \cdot (1, h'(x_0)) \rangle = f_x(x_0, h(x_0)) + f_y(x_0, h(x_0)) \cdot h'(x_0)$$

Vittorio Alzetta

RICORDANDO CHE PER DINI $h'(x_0) = -\frac{G_x(x_0, h(x_0))}{G_y(x_0, h(x_0))}$ SI OTTIENE:

$$0 = f_x(x_0, h(x_0)) - f_y(x_0, h(x_0)) \frac{G_x(x_0, h(x_0))}{G_y(x_0, h(x_0))}$$

DA CUI SI POSSONO RICAVARE LE PRIME 2 EQUAZIONI DEL SISTEMA □

SI OSSERVI CHE TROVARE LE SOLUZIONI DEL SISTEMA EQUIVALE A TROVARE LE SOLUZIONI DI QUEST'EQUAZIONE:

$$F'(x,y) = \lambda G'(x,y)$$

DECIDIAMO QUINDI DI DEFINIRE LA FUNZIONE $L: A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CHE CHIAMEREMO LAGRANGIANA COME:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda G(x,y)$$

E LA RICERCA DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA CORRISPONDERÀ A TROVARE I PUNTI STAZIONARI DELLA LAGRANGIANA (INFATTI NEL SISTEMA COMPAIONO LE DERIVATE E SE VOLLIAMO CHE DA TROVARE I PUNTI STAZIONARI DELLA LAGRANGIANA NE DOVREMO CALCOLARE LA DERIVATA E DOVREMO PORLA UGUALE A 0).

VOLENDO QUINDI TROVARE I PUNTI ESTREMALI VINCOLATI SU $\mathcal{E}$ DI f DOVREMO CERCARLI TRA:

- I PUNTI DEL VINCOLO $\mathcal{E}$ IN CUI $\nabla G \neq (0,0)$ CHE SONO STAZIONARI PER LA LAGRANGIANA
- I PUNTI DEL VINCOLO $\mathcal{E}$ IN CUI $\nabla G = (0,0)$, LI CHIAMEREMO PUNTI SINGOLARI

ESTREMI VINCOLATI PER FUNZIONI DI 3 VARIABILI

SE IL VINCOLO A CUI SOTTOPONIAMO LA NOSTRA FUNZIONE DI 3 VARIABILI È IL SOSTEGNO DI UNA CURVA SEMPLICE REGOLARE CON PARAMETRIZZAZIONE DEFINITA IN UN INTERVALLO ALLORA LA RICERCA DEGLI ESTREMI VINCOLATI DI f SI RIDUCE ALLA RICERCA DEGLI ESTREMI DI UNA FUNZIONE AD UNA SOLA VARIABILE.

SE INVECE IL VINCOLO È SOSTEGNO DI UNA SUPERFICIE DI EQUAZIONE $h(x,y) = z$ ALLORA LA RICERCA DEGLI ESTREMI VINCOLATI DI f SI RIDUCE ALLA RICERCA DEGLI ESTREMI LIBERI DELLA FUNZIONE DI 2 VARIABILI $f(x, y, h(x,y))$.

PARAMETRIZZAZIONE DI UNA SUPERFICIE

SIA $K \subseteq \mathbb{R}^2$, DICIAMO CHE K È UN INSIEME DI PARAMETRI SE ESISTE UN INSIEME $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO E CONNESSO TALE CHE:

$$A \subseteq K \subseteq \bar{A} \text{ (COMPLEMENTARE ?)}$$

SIANO ORA $K \subseteq \mathbb{R}^2$ INSIEME DI PARAMETRI E $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ FUNZIONE CONTINUA.

DEFINIAMO L'INSIEME SIGMA COME $\Sigma := \sigma(K)$ (È L'INSIEME IMMAGINE DI σ) CHIAMIAMO (Σ, σ) QUESTA COPPIA SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$, Σ VERRÀ CHIAMATA SOSTEGNO DELLA SUPERFICIE E σ PARAMETRIZZAZIONE DI Σ.

ASSEGNARE Σ, CIOÉ UN SOSTEGNO, NON DETERMINA UNIVOCAMENTE UNA SUPERFICIE (POTREBBE INFATTI ESSERE PARAMETRIZZATA IN TANTI MODI), TUTTAVIA SPESSO POTREMO SOTTINTENDERE UNA PARAMETRIZZAZIONE NATURALE.

AD OGNI MODO PER DEFINIRE UNA SUPERFICIE ASSEGNEREMO UNA PARAMETRIZZAZIONE $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ $(\sigma: K/\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$ CON COMPONENTI PARI A:

$$x = \sigma_1(u,v) \qquad y = \sigma_2(u,v) \qquad z = \sigma_3(u,v)$$

UNA SUPERFICIE AVRÀ CERTE CARATTERISTICHE SE LE AVRANNO LE SUE COMPONENTI.

Vittorio Alzetta

IL PRODOTTO VETTORIALE

IN $\mathbb{R}^3$ DEFINIAMO IL PRODOTTO VETTORIALE DI $X \times Y$ COME LO SVILUPPO DEL DETERMINANTE SIMBOLICO RISPETTO ALLA PRIMA RIGA DELLA MATRICE:

$$X = (x_1, x_2, x_3) \qquad \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$
$$Y = (y_1, y_2, y_3)$$

SI OSSERVI CHE VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $X \times Y = - Y \times X$
- $X \times Y = 0 \iff X$ E Y SONO LIN. DIP. (ALIAS PARALLELI)
- $(X \times Y) \cdot X = (X \times Y) \cdot Y = 0 \iff X$ E Y SONO $\perp$
- $\| X \times Y \|$ É L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA COSTRUITO SU X E Y

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ CON $m \geq 2$, DOVE f É UNA FUNZIONE A VALORI VETTORIALI.

$f_1, \dots, f_m$ SARANNO LE COMPONENTI DI f.

PRESO $\bar{x}$ PUNTO INTERNO AD A DIREMO CHE f É DERIVABILE IN $\bar{x}$ NELLA DIREZIONE v SE E SOLO SE LO SONO TUTTE LE SUE COMPONENTI:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(\bar{x}) \right)$$

INOLTRE, f SARÁ DERIVABILE PARZIALMENTE IN $\bar{x}$ RISPETTO ALLA i-ESIMA VARIABILE SE LO SARANNO TUTTE LE SUE COMPONENTI E:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\bar{x}) \right)$$

SUPPONIAMO ORA CHE f SIA DERIVABILE PARZIALMENTE IN $\bar{x}$ (CIOÉ RISPETTO A TUTTE LE VARIABILI $x_1, \dots, x_n$), CHIAMEREMO MATRICE JACOBIANA DI f IN $\bar{x}$ LA MATRICE REALE $m \times n$ COSÍ DEFINITA:

$$J_f(\bar{x}) := \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

DIREMO CHE f É DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ SE PER OGNI $i \in \{1, \dots, m\}$ LA FUNZIONE f_i É DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$.

CHIAMEREMO DIFFERENZIALE DI f IN $\bar{x}$ LA FUNZIONE VETTORIALE $df_{\bar{x}}$ DI COMPONENTI: $df_1(\bar{x})$, $df_2(\bar{x})$, $\dots$, $df_m(\bar{x})$.

VALE INOLTRE IL FATTO CHE LA MATNCE ASSOCIATA A $df_{\bar{x}}$ COINCIDE CON LA MATNCE JACOBIANA $J_f(\bar{x})$.

SE f É DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ VALE L'UGUAGLIANZA:

$$f(x) = f(\bar{x}) + df_{\bar{x}}(x-\bar{x}) + o(\|x-\bar{x}\|)$$
$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x-\bar{x}) + o(\|x-\bar{x}\|)$$

CON $x \to \bar{x}$. IN QUESTO CASO STIAMO LINEARIZZANDO f IN $\bar{x}$.

ESEMPIO:

STABILIAMO SE $f(x,y) = (xy^2, e^{3x-y}, x^2+y^4)$ É DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ E IN CASO AFFERMATIVO LINEARIZZIAMOLA.

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 3e^{3x-y} & -e^{3x-y} \\ 2x & 4y^3 \end{pmatrix} \qquad f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3x-y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3x-y+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

REGOLE DI CALCOLO PER LE DERIVATE PARZIALI

SIANO $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $v : A \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ E SIA $\bar{x}$ PUNTO INTERNO DI A.

SUPPONIAMO f, g, v DERIVABILI PARZIALMENTE RISPETTO A x_j IN $\bar{x}$, ALLORA:

- $\frac{\partial (f+g)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$
- $\frac{\partial (\lambda g)}{\partial x_j}(x) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$
- $\frac{\partial (v f)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \cdot f(x) + v(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$
- $\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$

(SOLO $m=3$) $\cdot \frac{\partial (f \times g)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \times g(x) + f(x) \times \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$

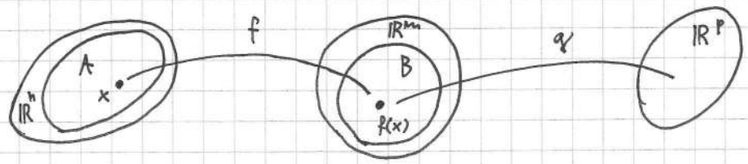
Vittorio Alzetta

DIFFERENZIALE E COMPOSIZIONE FUNZIONALE

SIANO $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, CON $n+m+p \geq 4$ (ALTRIMENTI $n=m=p=1$ E CONOSCIAMO GIÁ IL RISULTATO).

SIANO $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ E $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ E SUPPONIAMO $f(A) \subseteq B$.

SIA $x \in A$ INTERNO AD A E SUPPONIAMO $f(x)$ INTERNO A B, LA SITUAZIONE É LA SEGUENTE:



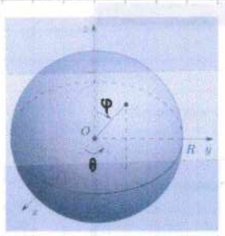
SE f É DIFFERENZIABILE IN x E g É DIFFERENZIABILE IN $f(x)$ ALLORA:

- $g \circ f$ É DIFFERENZIABILE IN x
- $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$
- $J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$

Vittorio Alzetta

LE COORDINATE SFERICHE

FISSIAMO $R > 0$. DEFINIAMO ORA LA FUNZIONE $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ COME:



$$\sigma(\varphi, \theta) := (R \sin\varphi \cos\theta, R \sin\varphi \sin\theta, R \cos\varphi)$$

SE TI CHIEDI IL PERCHÉ φ PUÓ VARIARE IN $[0, \pi]$ E NON IN $[0, 2\pi]$ COME θ LA RISPOSTA É PERCHÉ NON É NECESSARIO PER COPRIRE TUTTA LA SUPERFICIE SFERICA.

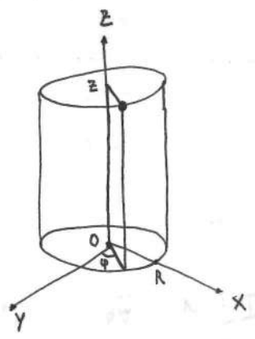
SE INVECE ANCHE θ POTESSE VARIARE IN $[0, \pi]$ ALLORA NON SI RIUSCIREBBE CHE A COPRIRE UNA SEMISFERA, IN PARTICOLARE LA SEMISFERA DI DESTRA (CHE CONTIENE UNA PARTE DELL'ASSE y).

CON INSIEME DI DEFINIZIONE $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ DEFINIAMO LA SEMISFERA SUPERIORE.

SE DEFINIAMO UNA FUNZIONE $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ CHE HA COME VARIABILI φ, θ E R SIAMO IN GRADO DI DESCRIVERE I PUNTI DELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$ ED ESSE SI CHIAMERANNO COORDINATE SFERICHE.

LE COORDINATE CILINDRICHE

FISSIAMO ANCHE QUI $R > 0$ E DEFINIAMO LA FUNZIONE $\sigma : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$



COME:

$$\sigma(\varphi, z) = (R \cos\varphi, R \sin\varphi, z)$$

SI NOTI CHE SE DOVESSIMO FISSARE z SI OTTERREBBE UNA PARAMETRIZZAZIONE DELLA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R E CENTRO SULL'ASSE z E PARALLELA AL PIANO xy.

LA RESTRIZIONE DI σ A $[0, 2\pi] \times [0, h]$ DESCRIVE IL CILINDRO (LA SUPERFICIE LATERALE DEL CILINDRO) DI ALTEZZA h. SE FACCIAMO ANCHE VARIARE R OTTENIAMO TUTTI PUNTI SU $\mathbb{R}^3$ E CHIAMEREMO φ, z, R COORDINATE CILINDRICHE.

SUPERFICIE GRAFICO

SIA $K \subseteq \mathbb{R}^2$ UN INSIEME DI PARAMETRI E SIA $f : K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

LA FUNZIONE VETTORIALE:

$$\sigma := (t, v) \in K \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto (t, v, f(t, v)) \in \mathbb{R}^3$$

É CONTINUA E LA SUA IMMAGINE $\sigma(K)$ COINCIDE CON IL GRAFICO DI f (CHE É IN $\mathbb{R}^3$). σ É UNA PARAMETRIZZAZIONE DI f E LA SUPERFICIE CORRISPONDENTE É DETTA SUPERFICIE GRAFICO (O CARTESIANA)

LE LINEE COORDINATE

SIA (Σ, σ) UNA SUPERFICIE CON INSIEME DEI PARAMETRI $K \subseteq \mathbb{R}^2$.

SIANO $(u_0, v_0) \in K$ E $P_0 := \sigma(u_0, v_0)$. ($\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$!)

CONSIDERIAMO ORA UNA CURVA CON SOSTEGNO CONTENUTO IN $K \subseteq \mathbb{R}^2$ E CONTENENTE (u_0, v_0):

- $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ CONTINUA CON $\varphi(I) \subseteq K \subseteq \mathbb{R}^2$
- ESISTE, PER IPOTESI (COSTRUZIONE), $t_0 \in I : \varphi(t_0) = (u_0, v_0)$

LA FUNZIONE COMPOSTA $r := \sigma \circ \varphi : I \to \mathbb{R}^3$ É CONTINUA E DUNQUE DEFINISCE UNA CURVA CON SOSTEGNO Σ CHE CONTIENE P_0.

AD ESEMPIO SE $\sigma = (\overbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{\text{SONO LE 3 FUNZIONI COMPONENTI}})$ AVREMO:

$$x = \sigma_1(u, v) \qquad y = \sigma_2(u, v) \qquad z = \overbrace{\sigma_3(u, v)}^{(\sigma_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}!)}$$

CON $(u, v) \in K$.

FISSANDO u A u_0 E FACENDO VARIARE v OTTENIAMO UNA CURVA SULLA SUPERFICIE. FACENDO VARIARE u_0 OTTENIAMO UNA CURVA DIVERSA PER OGNI u_0.

LA STESSA COSA SUCCEDE CAMBIANDO u CON v. QUESTE FAMIGLIE DI CURVE SONO DETTE LINEE COORDINATE. NELLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLA SFERA LE LINEE COORDINATE CON $\varphi = \varphi_0$ SONO I PARALLELI, PER $\theta = \theta_0$ I MERIDIANI

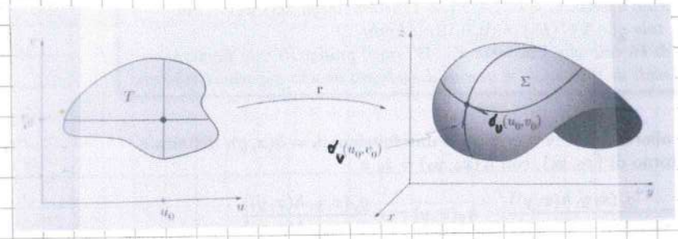
Vittorio Alzetta

FISSIAMO IL PUNTO $P_0 = \sigma(u_0, v_0)$ SULLA SUPERFICIE σ.

LE LINEE COORDINATE PASSANTI PER P_0 SARANNO $\sigma(u_0, v)$ e $\sigma(u, v_0)$

IL VETTORE TANGENTE A QUESTE LINEE COORDINATE PASSANTE PER P_0 É:

$$\sigma_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0))$$
$$\sigma_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0))$$



IL PIANO TANGENTE IN P_0, SE ESISTE, CONTIENE ENTRAMBI I VETTORI TANGENTI.

SUPERFICIE REGOLARE

UNA SUPERFICIE (Σ, σ) SI DICE REGOLARE IN (u_0, v_0) SE LA JACOBIANA $J_\sigma(u_0, v_0)$ HA RANGO 2.

UNA SUPERFICIE (Σ, σ) SI DICE REGOLARE SE LO É IN OGNI PUNTO DEL DOMINIO.

I PUNTI DI IRREGOLARITÁ SARANNO CHIAMATI PUNTI SINGOLARI

PER INDIVIDUARE IL PIANO TANGENTE DEFINIAMO IL VETTORE NORMALE ALLA SUPERFICIE IN (u_0, v_0) COME:

$$N_\sigma(u_0, v_0) := \sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)$$

SI OSSERVI CHE σ É REGOLARE $\Leftrightarrow$ $N_\sigma(u_0, v_0)$ NON É NULLO.

ORA, PER CONCLUDERE QUESTO CAPITOLO ESAMINIAMO IL TEOREMA DI DINI E IL TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE PER I 2 TIPI DI VINCOLI CHE POSSIAMO AVERE IN $\mathbb{R}^3$ (UNIDIMENSIONALE, CIOÉ CURVA, E BIDIMENSIONALE, CIOÉ SUPERFICIE)

VINCOLO BIDIMENSIONALE

TEOREMA DI DINI

SIANO $A \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO e $G \in C^1(A, \mathbb{R})$ ($G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$), $Z := \{(x, y, z) \in A : G(x, y, z) = 0\}$.

PRENDIAMO $P_0 := (x_0, y_0, z_0) \in Z$ TALE CHE $\nabla G(P_0) \neq (0, 0, 0)$.

ALLORA ESISTE UN INTORNO W DI P_0 TALE CHE $W \cap Z$ SIA IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1 E DUNQUE IL SOSTEGNO DI UNA SUPERFICIE REGOLARE.

SE $G_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ALLORA $W \cap Z$ É IL GRAFICO DI $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ DEFINITA IN UN INTORNO DI P_0 (DOVE IN REALTÁ $z_0 = f(x_0, y_0)$ E QUINDI SI RAMMENTA DIRE Y IN UN INTORNO DI (x_0, y_0)) CON:

$$h_x(x, y) = -\frac{G_x(x, y, h(x, y))}{G_z(x, y, h(x, y))} \qquad h_y(x, y) = -\frac{G_y(x, y, h(x, y))}{G_z(x, y, h(x, y))}$$

TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO E SIA $f \in C^1(A, \mathbb{R})$.

SIA $G \in C^1(A, \mathbb{R})$ E SIA $Z := \{(x, y, z) \in A : G(x, y, z) = 0\}$.

SIA $(x_0, y_0, z_0) \in Z$ TALE CHE $\nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$

SUPPONIAMO CHE (x_0, y_0, z_0) SIA UN PUNTO DI ESTREMO LOCALE VINCOLATO PER f.

ALLORA ESISTE $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ É PUNTO STAZIONARIO PER LA LAGRANGIANA $L: A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda G(x, y, z)$$

VINCOLO UNIDIMENSIONALE

SIANO $A \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO, $G \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ ($G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$), Z L'INSIEME DEGLI ZERI DI G ($Z := \{(x,y,z) \in A : G(x,y,z) = (0,0)\}$).

SIA $P_0 := (x_0, y_0, z_0) \in Z$ TALE CHE LA MATRICE JACOBIANA DI G IN P_0 HA RANGO 2.

NEL VINCOLO BIDIMENSIONALE ABBIAMO IMPOSTO $\nabla G(P_0) \neq (0,0,0)$, IN QUANTO $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. SE AVESSIMO VOLUTO TRARRE DENTRO LA JACOBIANA AVREMMO POTUTO DIRE CHE LA MATRICE JACOBIANA DOVEVA AVERE ALMENO RANGO 1, MA SI OSSERVI CHE LA MATRICE JACOBIANA IN QUESTO CASO SAREBBE:

$$J_G(P_0) = \left(\nabla G(P_0)\right)$$

DATO CHE G HA UNA SOLA FUNZIONE COMPONENTE.

IN QUESTO CASO, CON IL VINCOLO BIDIMENSIONALE CI SI ORTA PER PORRE $\nabla G_1(P_0) \neq 0 \wedge \nabla G_2(P_0) \neq 0$ O PER LA MATRICE JACOBIANA AL RANGO 2:

$$J_G(P_0) = \begin{pmatrix} \nabla G_1(P_0) \\ \nabla G_2(P_0) \end{pmatrix} \leftarrow \text{RANGO 2 IMPONE CHE QUESTE 2 RIGHE SIANO NON NULLE}$$

ALLORA ESISTE UN INTORNO W DI P_0 TALE CHE $Z \cap W$ É IL GRAFICO DI FUNZIONE DI UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, OVVERO É IL SOSTEGNO DI UNA CURVA REGOLARE

TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^3$ UN INSIEME APERTO E SIA $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ ($f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$).

SIA $G \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ E SIA $Z := \{(x,y,z) \in A : G(x,y,z) \neq (0,0)\}$.

SIA $(x_0, y_0, z_0) \in Z$ TALE CHE $J_G(P_0)$ ABBIA RANGO 2.

ALLORA ESISTONO $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ TALI CHE $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ É PUNTO STAZIONARIO DELLA LAGRANGIANA $L: A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) := f(x,y,z) - \lambda G_1(x,y,z) - \mu G_2(x,y,z)$$

DOVE G_1 E G_2 SONO LE FUNZIONI COMPONENTI DI G.

Vittorio Alzetta

INTEGRAZIONE

IN ANALISI 1 ABBIAMO DEFINITO L'INTEGRALE DI RIEMANN PER FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE.

ORA VOGLIAMO ESTENDERE TALE DEFINIZIONE A:

- FUNZIONI VETTORIALI DI UNA VARIABILE REALE $(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$
- FUNZIONI REALI DI n VARIABILI REALI, $n \geq 2$ $(f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$
- FUNZIONI VETTORIALI DI n VARIABILI REALI $(f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$

INTEGRALE PER FUNZIONI VETTORIALI DI VARIABILE REALE

SIANO $a, b \in \mathbb{R}$ CON $a < b$. DEFINIAMO $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ CON $n \geq 2$. DIREMO CHE γ É INTEGRABILE SECONDO RIEMANN IN $[a,b]$ SE LO SONO TUTTE LE SUE FUNZIONI COMPONENTI $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

IN TAL CASO L'INTEGRALE DI RIEMANN DI γ IN $[a,b]$ SARÁ IL VETTORE:

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t)\,dt \right)$$

SI OSSERVI CHE SE γ É CONTINUA IN $[a,b]$ ALLORA γ É INTEGRABILE SECONDO RIEMANN IN $[a,b]$.

INOLTRE, SE γ É CONTINUA IN $[a,b]$, E h É UNA SUA PRIMITIVA ALLORA

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = h(b) - h(a)$$

DOVE $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

VALE INOLTRE LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \| \gamma(t) \|\,dt$$

INTEGRALE PER FUNZIONI VETTORIALI DI m VARIABILI REALI

IPER-RETTANGOLI

PONIAMOCI IN $\mathbb{R}^n$, CHIAMEREMO IPER-RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^n$ IL PRODOTTO CARTESIANO DI n INTERVALLI LIMITATI DI $\mathbb{R}$, CIOÉ:

$$R := I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \qquad [1]$$

ESEMPI:

$R_1 : [1,2] \times [10,14]$ É UN IPER-RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^2$

$R_2 : [0,1] \times (0, 2\pi] \times (-5, 24)$ É UN IPER-RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^3$

LA MISURA

PRENDIAMO UN IPER-RETTANGOLO R E DENOTIAMO CON a_j E b_j GLI ESTREMI DEL j-ESIMO INTERVALLO, CON $a_j \leq b_j$:

$$I_j = [a_j, b_j] \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

CHIAMEREMO MISURA DI R IL NUMERO REALE:

$$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

SI OSSERVI CHE PER $n = 2$ LA MISURA É L'AREA DEL RETTANGOLO DI LATI $(b_1 - a_1)$ E $(b_2 - a_2)$, MENTRE PER $n = 3$ LA MISURA É IL VOLUME DEL PARALLELOPIPEDO DI DIMENSIONI $(b_1 - a_1)$, $(b_2 - a_2)$ E $(b_3 - a_3)$.

SI OSSERVI INOLTRE CHE POICHÉ $a_j \leq b_j$ LA MISURA DI UN IPER-RETTANGOLO SARÁ SEMPRE POSITIVA, E:

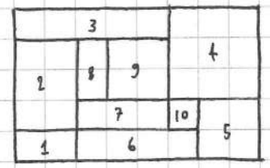
$$m(R) = 0 \iff \exists\, a_j, b_j : a_j = b_j$$

LA MISURA NON DIPENDERÁ DAL FATTO CHE GLI INTERVALLI $I_1, \dots, I_n$ CONTENGANO O MENO GLI ESTREMI.

Vittorio Alzetta

LA FUNZIONE A SCALA

PRENDIAMO UN IPER-RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^n$. CHIAMEREMO SUDDIVISIONE DI R UNA FAMIGLIA FINITA DI IPER-RETTANGOLI, A DUE A DUE PRIVI DI PUNTI INTERNI IN COMUNE, LA CUI UNIONE É R, AD ESEMPIO:



IN FIGURA UN IPER-RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^2$ SUDDIVISO IN 10 IPER-RETTANGOLI.

IN FORMULE AVREMO CHE $\{R_1, \dots, R_k\}$ É UNA SUDDIVISIONE DI R SE

- $\forall\, j \in \{1, \dots, k\} : R_j$ É UN IPER-RETTANGOLO
- $\forall\, i, j \in \{1, \dots, k\},\ i \neq j : \operatorname{int}(R_i) \cap \operatorname{int}(R_j) = \emptyset$
- $R_1 \cup \dots \cup R_k = R$

SIA f UNA FUNZIONE REALE DEFINITA IN R (DUNQUE SE R É IPER-RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^n$ LA NOSTRA f SARÁ DEFINITA DA $\mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}$).

SE ESISTE UNA SUDDIVISIONE DI R TALE CHE PER OGNI $j \in \{1, \dots, k\}$ LA RESTRIZIONE DI f ALL'IPER-RETTANGOLO R_j É COSTANTE (LA FUNZIONE COSTANTE) ALLORA CHIAMEREMO f FUNZIONE A SCALA.

DIREMO CHE, IN TAL CASO, f É ADATTATA ALLA SUDDIVISIONE $\{R_1, \dots, R_k\}$.

SIA f UNA FUNZIONE A SCALA E SIA R UN IPER-RETTANGOLO DI $\mathbb{R}^n$ E SIA $\{R_1, \dots, R_k\}$ UNA SUDDIVISIONE DI R ADATTATA A f.

CHIAMIAMO c_j IL VALORE ASSUNTO DA f NELL'IPER-RETTANGOLO R_j.

CHIAMIAMO INTEGRALE DI f SU R IL NUMERO:

$$\int_R f(x)\,dx := \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot m(R_j)$$

SI OSSERVI CHE SE f É UNA FUNZIONE A SCALA SU UN IPER-RETTANGOLO R ESISTONO INFINITE SUDDIVISIONI DI R ADATTATE A f (BASTI PENSARE CHE PRESA UNA SUDDIVISIONE GENERICA SI POTREBBE PRENDERE UN ELEMENTO DI TALE SUDDIVISIONE E DIVIDERLO IN INFINITI MODI DIVERSI OTTENENDO SEMPRE SUDDIVISIONI DIVERSE E SAPENDO CHE LÍ LA FUNZIONE SARÁ SEMPRE COSTANTE).

DA CIÓ RICONOSCIAMO CHE L'INTEGRALE DI f SU R NON DIPENDE DALLA SUDDIVISIONE SCELTA.

SE UNA FUNZIONE É COSTANTE NELL'INTERIORE (PARTE INTERNA) DI R (IPER-RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^n$) ALLORA SARÁ UNA FUNZIONE A SCALA E DATO c IL SUO VALORE COSTANTE AVREMO:

$$\int_R f(x)\,dx = c \cdot m(R)$$

INTEGRALE DOPPIO E TRIPLO

SIA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, L'INTEGRALE DI f SU R SI PUÓ DENOTARE COME:

$$\int_R f \quad , \quad \int_R f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$$

E VIENE CHIAMATO INTEGRALE MULTIPLO

NEL CASO IN CUI $n = 2$ AVREMO UN INTEGRALE DOPPIO:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

NEL CASO IN CUI $n = 3$ AVREMO UN INTEGRALE TRIPLO:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Vittorio Aizetta

PROPRIETÁ DELL'INTEGRALE (FUNZIONI A SCALA)

SIANO f, g FUNZIONI A SCALA SU UN IPER-RETTANGOLO R IN $\mathbb{R}^n$ E SIA λ IN $\mathbb{R}$. VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÁ:

- LINEARITÁ:

$$\int_R \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_R f(x)\,dx + \int_R g(x)\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

- MONOTONIA:

$$f \le g \;\Rightarrow\; \int_R f(x)\,dx \le \int_R g(x)\,dx$$

- ADDITIVITÁ:

$$\int_R f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{R_j} f(x)\,dx$$

DOVE $\{R_1, \dots, R_k\}$ É UNA QUALSIASI SUDDIVISIONE DI R.

INTEGRALE DI RIEMANN DI FUNZIONI LIMITATE

PRENDIAMO f UNA FUNZIONE LIMITATA SU UN IPER-RETTANGOLO R IN $\mathbb{R}^n$, CIÓ VUOL DIRE CHE POICHÉ $f: R \to \mathbb{R}$ VARÁ $\inf(f) \in \sup(f) \in \mathbb{R}$.

DEFINIAMO I 2 SEGUENTI INSIEMI:

$$H_f^- := \{h : R \to \mathbb{R} : h \text{ FUNZIONE A SCALA SU } R \in h \le f\}$$
$$H_f^+ := \{h : R \to \mathbb{R} : h \text{ FUNZIONE A SCALA SU } R \in h \ge f\}$$

SONO GLI INSIEMI DELLE FUNZIONI MINORI E MAGGIORI DI f A SCALA SU R.

TALI INSIEMI NON SARANNO MAI VUOTI, INFATTI CONTERRANNO SEMPRE LE FUNZIONI COSTANTI $h = \inf f$ E $h = \sup f$.

Vittorio Alzetta

L'INSIEME $\{\int_R h : h \in H_f^-\}$ É NON VUOTO E SUPERIORMENTE LIMITATO, INFATTI:

$$h \in H_f^- \Rightarrow h \le f \overset{\text{MONOTONIA}}{\Rightarrow} h \le \sup f \Rightarrow \int_R h \le \sup f \cdot m(R)$$

L'INSIEME $\{\int_R h : h \in H_f^+\}$ É NON VUOTO E INFERIORMENTE LIMITATO, INFATTI:

$$h \in H_f^+ \Rightarrow h \ge f \overset{\text{MONOTONIA}}{\Rightarrow} h \ge \inf f \Rightarrow \int_R h \ge \inf f \cdot m(R)$$

GLI INSIEMI $\{\int_R h : h \in H_f^-\}$ E $\{\int_R h : h \in H_f^+\}$ SONO SEPARATI DA f, INFATTI UNO CONTIENE GLI INTEGRALI DELLE FUNZIONI MAGGIORI DI f E L'ALTRO QUELLE MINORI

$$h_- \in H_f^-,\ h_+ \in H_f^+ \Rightarrow h_- \le f \le h_+ \Rightarrow \int_R h_- \le \int_R h_+ \qquad [1]$$

DEFINIAMO ORA I 2 SEGUENTI INSIEMI:

$$\underline{\int_R} f := \sup\left\{\int_R h : h \in H_f^-\right\} \quad \text{INTEGRALE INFERIORE DI } f \text{ SU } R$$

$$\overline{\int_R} f := \inf\left\{\int_R h : h \in H_f^+\right\} \quad \text{INTEGRALE SUPERIORE DI } f \text{ SU } R$$

DALLA [1], DOVE ABBIAMO CONSIDERATO UN h_- E UN h_+ QUALSIASI, RICAVIAMO

$$\underline{\int_R} f \le \overline{\int_R} f$$

SE VALE:

$$\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$$

DIREMO CHE f É INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SU R E CHIAMEREMO INTEGRALE DI RIEMANN DI f SU R IL REALE:

$$\int_R f(x)\,dx := \underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$$

DORA IN POI CON FUNZIONE INTEGRABILE SI INTENDERÁ SECONDO RIEMANN

DEFINIZIONI EQUIVALENTI SONO:

- f É INTEGRABILE SECONDO RIEMANN IN R
- L'INSIEME DEGLI INTEGRALI DELLE FUNZIONI A SCALA SU R MINORI O UGUALI DI f E L'INSIEME DEGLI INTEGRALI DELLE FUNZIONI A SCALA SU R MAGGIORI O UGUALI DI f SONO CONTIGUI (CIOÉ HANNO UN PUNTO IN COMUNE, CIOÉ L'INTEGRALE DI f).
- $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; g, h$ A SCALA SU R TALI CHE:

$$g \le f \le h \;\wedge\; \int_R h(x)\,dx - \int_R g(x)\,dx < \varepsilon$$

PROPRIETÁ DEGLI INTEGRALI SU IPER-RETTANGOLI

SIANO f, g INTEGRABILI SECONDO RIEMANN SU R CON $\lambda \in \mathbb{R}$, VARRANNO LE PROPRIETÁ GIÁ ELENCATE PER GLI INTEGRALI DI FUNZIONI A SCALA E IN PIÚ:

- DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$\left| \int_R f(x)\,dx \right| \le \int_R |f(x)|\,dx$$

- IL PRODOTTO $f \cdot g$ É INTEGRABILE SU R
- SE f É CONTINUA E R É UN IPER-RETTANGOLO CHIUSO ALLORA f É INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SU R.

Vittorio Alzetta

LA MISURA DI PEANO - JORDAN

COME ABBIAMO VISTO LA NOZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN SU IPER-RETTANGOLI SI BASA SUI CONCETTI DI:

- ESTREMO SUPERIORE ED INFERIORE DI INSIEMI
- INTEGRALE DI FUNZIONI A SCALA
- MISURA DI UN IPER-RETTANGOLO

ORA VOGLIAMO ESTENDERE IL CONCETTO DI INTEGRALE AD INSIEMI PIÚ GENERALI DEGLI IPER-RETTANGOLI, QUINDI ABBIAMO BISOGNO DI UNA NUOVA DEFINIZIONE DI MISURA PER INSIEMI PIÚ GENERICI.

ANZITUTTO PRENDIAMO $A \subset \mathbb{R}^n$, CHIAMIAMO FUNZIONE INDICATRICE (O CARATTERISTICA) DI A LA FUNZIONE:

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

IN SOSTANZA CI DICE SE UN PUNTO APPARTIENE O NO AD A.

SIA DUNQUE $A \subset \mathbb{R}^n$ UN INSIEME LIMITATO E SIA R UN QUALSIASI IPER-RETTANGOLO CONTENENTE ~~XXXXXXXXXXX~~ L'INSIEME A.
DIREMO CHE A É MISURABILE SECONDO PEANO - JORDAN SE LA FUNZIONE INDICATRICE χ_A É INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SU R, IN TAL CASO:

$$m(A) := \int_R \chi_A(x)\,dx$$

IN SOSTANZA ABBIAMO PRESO A CHE NON É UN IPER-RETTANGOLO, LO ABBIAMO APPROSSIMATO AD UN IPER-RETTANGOLO E ABBIAMO USATO χ PER CAPIRE QUALI PUNTI ESCLUDERE PERCHÉ NON APPARTENENTI AD A.

Vittorio Alzetta

CON $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ DENOTEREMO L'INSIEME DI TUTTI GLI INSIEMI P-J-MISURABILI SU $\mathbb{R}^n$.

PROPRIETÀ DELLA MISURA SECONDO PEANO-JORDAN

SIANO $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, ALLORA $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cup B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ E INOLTRE:

① $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \wedge m(\emptyset) = 0$

② $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

③ $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$

④ $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \setminus B)$

⑤ $B \subseteq A \Rightarrow m(A \setminus B) = m(A) - m(B) \wedge m(B) \leq m(A)$

⑥ $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \emptyset \Rightarrow m(A \cap B) = 0 \wedge m(A \setminus B) = m(A) \wedge$
$\wedge m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

SI DIMOSTRANO OSSERVANDO IL FATTO CHE È COME TRATTARE DEI SEMPLICI INSIEMI.

SE $m(A) = 0$ CON $A \subset \mathbb{R}^n$ DICIAMO CHE A È TRASCURABILE SECONDO P-J.

SI OSSERVI CHE SE $A \subset \mathbb{R}^n$ È MISURABILE SECONDO P-J ALLORA LA FRONTIERA DI A È UN INSIEME TRASCURABILE SECONDO PEANO-JORDAN.

OSSERVAZIONI

SIA f INTEGRABILE SECONDO RIEMANN (CON $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), ALLORA IL GRAFICO DI f IN $\mathbb{R}^2$ È TRASCURABILE SECONDO PEANO-JORDAN.
(f È LIMITATA)

QUESTA CONSIDERAZIONE DERIVA DAL FATTO CHE SE f È LIMITATA IL SUO SOTTOGRAFICO, CHE DIREMO A, SARÀ LIMITATO, E DUNQUE LA SUA FRONTIERA (IL GRAFICO DI f) SARÀ TRASCURABILE SECONDO P-J.

IN SOSTANZA RISULTA CHE:

$$m(A) = \int_a^b f(t)\,dt$$

SE f È CONTINUA IL SUO SOTTOGRAFICO SARÀ MISURABILE SECONDO P-J.

INTEGRALE DI FUNZIONI LIMITATE SU INSIEMI LIMITATI MISURABILI

VOGLIAMO ORA DEFINIRE L'INTEGRALE PER FUNZIONI CHE NON SONO DEFINITE IPER-RETTANGOLI MA SU INSIEMI MISURABILI SECONDO P-J QUALSIASI.

SIA $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ E SIA $f : A \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE LIMITATA.
SIA R UN QUALSIASI IPER-RETTANGOLO DI $\mathbb{R}^n$ CONTENENTE A.
DEFINIAMO $\bar{f}_R : R \to \mathbb{R}$ LA FUNZIONE:

$$\bar{f}_R(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in R - A \end{cases}$$

LO 0 ANNULLA L'EFFETTO DEI PUNTI FUORI DA A.
SE $\bar{f}_R$ È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN IN R DICIAMO CHE f È INTEGRABILE SU A E DEFINIAMO L'INTEGRALE DI f SU A COME:

$$\int_A f(x)\,dx = \int_R \bar{f}_R(x)\,dx$$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

PER FUNZIONI LIMITATE INTEGRABILI IN INSIEMI MISURABILI QUALSIASI VALGONO SEMPRE LE SOLITE PROPRIETÀ (LINEARITÀ, MONOTONIA, ADDITIVITÀ, DISUGUAGLIANZA

TRIANGOLARE, SE CONTINUA IN CAMPO ALORA INTEGRABILE, PRODOTTO DI INTEGRABILI É INTEGRABILE).

VALGONO INOLTRE LE PROPOSIZIONI:

① SIA $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, SIA f LIMITATA E INTEGRABILE SU A.
$B \subset A$ MISURABILE $\Rightarrow$ f INTEGRABILE SU B.

② SIA $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, SIA $f : A \to \mathbb{R}$ LIMITATA.
A TRASCURABILE $\Rightarrow$ $\int_A f(x)\,dx = 0$

③ SIA $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, SIA $f : A \to \mathbb{R}$ LIMITATA.
(se) $\exists\, B \subset A$ TRASCURABILE : f CONTINUA IN $A \setminus B$ $\Rightarrow$ f INTEGRABILE SU A
(É UNA VARIAZIONE DI QUELLA f CONTINUA IN A $\Rightarrow$ f INTEGRABILE SU A)

④ SIANO $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, SIA f LIMITATA E INTEGRABILE SU $A \cup B$.
ALLORA f É INTEGRABILE SU A E SU B.

$$m(A \cap B) = 0 \Rightarrow \int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$$

$m(A \cap B) = 0$: NO PUNTI IN COMUNE

GLI INSIEMI NORMALE

SIA $A \subset \mathbb{R}^2$.

SE ESISTONO $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE TALI CHE:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$$

DIREMO CHE A É UN INSIEME NORMALE NELLA DIREZIONE **x**. SE INVECE:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b,\ g(y) \le x \le h(y)\}$$

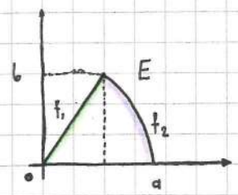
DIREMO CHE A É UN INSIEME NORMALE NELLA DIREZIONE **y**

A SARÁ SEMPLICEMENTE UN INSIEME NORMALE SE LO SARÀ IN ALMENO UNA DIREZIONE

UNA DEFINIZIONE ALTERNATIVA E INFORMALE DI INSIEME NORMALE RISPETTO A x (VA DI CONSEGUENZA RISPETTO A y) É:

D É NORMALE RISPETTO ALL'ASSE DELLE X SE É POSSIBILE DESCRIVERLO LIMITANDO LE ASCISSE TRA VALORI NUMERICI E LE ORDINATE TRA VALORI DATI DA FUNZIONI.

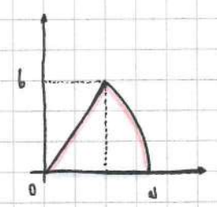
ESEMPIO:

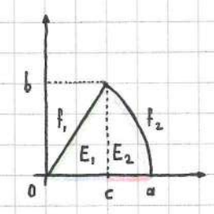


CONSIDERIAMO L'INSIEME E, ESSO É NORMALE RISPETTO ALL'ASSE y, INFATTI:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le b,\ f_1(y) \le x \le f_2(y)\}$$

SE TUTTAVIA PROVIAMO A SCRIVERLO COME INSIEME NORMALE RISPETTO A x CI ACCORGIAMO CHE MENTRE É INFERIORMENTE LIMITATO DA UNA FUNZIONE COSTANTE É SUPERIORMENTE LIMITATO DA 2 FUNZIONI $\overset{\text{CONTINUE}}{V}$, DUNQUE SIAMO COSTRETTI A SPEZZARE IL DOMINIO IN 2 INSIEMI NORMALI RISPETTO A x:





$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le c,\ 0 \le y \le f_1(x)\}$$

$$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le x \le a,\ 0 \le y \le f_2(x)\}$$

TEOREMA SULLE FORMULE DI RIDUZIONE

SIA $A \subset \mathbb{R}^2$ UN INSIEME NORMALE DESCRITTO MEDIANTE UN INTERVALLO $[a,b]$ E DUE FUNZIONI CONTINUE $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$. SIA ANCHE $f : A \to \mathbb{R}$ CONTINUA

(CONTINUA)

Vittorio Alzetta

IL TEOREMA AFFERMA CHE SE A É NORMALE NELLA DIREZIONE y, OVVERO:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b,\ g(y) \le x \le h(y)\}$$

ALLORA POSSIAMO SCRIVERE UN INTEGRALE DOPPIO A 2 SINGOLI:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

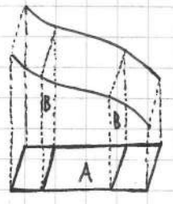
SE INVECE A É NORMALE NELLA DIREZIONE x, OVVERO:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$$

ALLORA POSSIAMO SCRIVERE:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

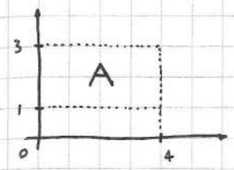
PER CAPIRE CIÓ CHE STIAMO FACENDO DOBBIAMO IMMAGINARCI CHE A SIA IL NOSTRO INSIEME DI DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE E NOI VOLLIAMO CALCOLARE IL VOLUME TRA LA SUPERFICIE A SUL PIANO xy E IL GRAFICO DELLA NOSTRA FUNZIONE f. PER FARLO PRIMA DIVIDIAMO A IN STRISCE SOTTILISSIME E CALCOLIAMO A QUEL PUNTO L'AREA DEL SOTTOGRAFICO, CHE NELLA FIGURA QUI SOTTO HO INDICATO CON B. DOPODICHÉ ANDREMO A SOMMARE TRA LORO TUTTI I NUMERI CHE ABBIAMO TROVATO (LE AREE) PER TROVARE IL VOLUME DEL SOLIDO COMPRESO TRA A E LA FUNZIONE CHE HO RAPPRESENTATO.



ESEMPIO:

SI CALCOLI L'INTEGRALE DI $f(x,y) = x^2 + xy$ NELL'INSIEME $[0,1] \times [1,3]$

L'INSIEME DI DEFINIZIONE É:



CHE É NORMALE SIA RISPETTO A x, SIA RISPETTO A y, DUNQUE PER COMODITÁ LO CONSIDEREREMO NORMALE RISPETTO A x.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4,\ g(x) \le y \le h(x)\}$$

PER LE FORMULE DI RIDUZIONE AVREMO:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 \left(\int_{y(x)}^{(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_1^3 \tfrac{1}{2}x^2 + xy\,dy \right) dx$$

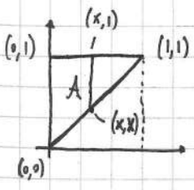
$$= \int_0^4 \left[x^2 y + \frac{x y^2}{2} \right]_1^3 dx = \int_0^4 3x^2 + \frac{2}{2}x - x^2 - \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \int_0^4 2x^2 + 4x\,dx = \left[\tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 = \frac{224}{3}$$

ESEMPIO:

CALCOLARE L'INTEGRALE DI $f(x,y) = xy^2$ NEL TRIANGOLO DI VERTICI $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

L'INSIEME DI DEFINIZIONE É:



CHE VEDREMO COME NORMALE RISPETTO A x:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$$

DA CUI OTTENIAMO IL SEGUENTE INTEGRALE:

HO POTUTO PORTARE FUORI LA x PERCHÉ É UNA COSTANTE

NON HO POTUTO FARE SUBITO L'INTEGRALE PERCHÉ DA QUI SPARISCE LA VARIABILE DI x.

$$\iint_A f(x,y) = \int_0^1 dx \int_x^1 xy^2\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_x^1 y^2\,dy = \int_0^1 x\,dx \left[\frac{y^3}{3} \right]_x^1$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{3} - \frac{x^4}{3}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^{01} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{10}$$

Vittorio Alzetta

INSIEME NORMALE RISPETTO A z

SIA $A \subset \mathbb{R}^3$. DICIAMO CHE A É **z-SEMPLICE** (o NORMALE RISPETTO A z) SE ESISTONO $D \subset \mathbb{R}^2$ COMPATTO E MISURABILE E 2 FUNZIONI $\gamma, h : D \to \mathbb{R}$ TALI CHE:

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \gamma(x,y) \le z \le h(x,y) \}$$

LA DEFINIZIONE SI PUÓ FACILMENTE MODIFICARE PER INSIEMI NORMALI RISPETTO A x E y IN $\mathbb{R}^3$.

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER FILI

SIA $A \subset \mathbb{R}^3$ UN INSIEME NORMALE NELLA DIREZIONE z, CIOÉ:

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \gamma(x,y) \le z \le h(x,y) \}$$

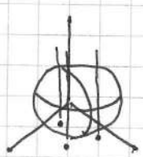
CON $D \subset \mathbb{R}^2$ COMPATTO E MISURABILE E $\gamma, h : D \to \mathbb{R}$ FUNZIONI CONTINUE.

SIA $f : A \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA, ALLORA:

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\gamma(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

SI OSSERVI CHE DALL'INTEGRALE IN dz VERRÁ FUORI UNA FUNZIONE DIPENDENTE DA x E y, A QUEL PUNTO USEREMO LE SOLITE TECNICHE 2D VISTE IN PRECEDENZA.

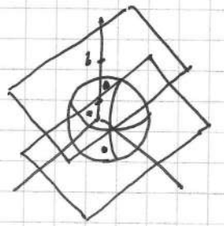
IN QUESTO CASO STIAMO PRATICAMENTE CALCOLANDO L'IPER-VOLUME A PARTIRE DAI FILI PARALLELI ALL'ASSE z. CON OVVIE MODIFICHE SI PUÓ INTEGRARE A PARTIRE DA FILI PARALLELI ALL'ASSE x O ALL'ASSE y.

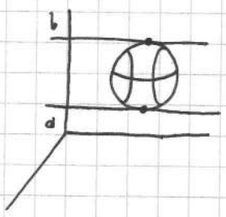


FORMULA DI INTEGRAZIONE PER STRATI

SIA $A \subset \mathbb{R}^3$ UN INSIEME MISURABILE E COMPATTO E SIA $f : A \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA.

PONIAMO $d := \min \pi_z(A)$, CIOÉ d SARÁ LA QUOTA ALLA QUALE SI TROVERÁ IL PIANO PARALLELO AL PIANO xy CHE SEZIONA A PIÚ BASSO IN ASSOLUTO. DEFINIAMO INVECE $b := \max \pi_z(A)$ LA QUOTA DEL PIÚ ALTO IN ASSOLUTO.





LE DUE PROSPETTIVE QUI DI FIANCO RAPPRESENTANO LA STESSA COSA CON ANGOLAZIONI DIFFERENTI.

SUPPONIAMO ORA CHE PER OGNI $z \in [a,b]$ L'INSIEME:

$$A_z := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A \}$$

SIA MISURABILE. A_z NON É ALTRO CHE L'INSIEME DELLE **SEZIONI** DI A DI QUOTA O **PIEDE** z.

ALLORA:

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

DUNQUE IN QUESTO CASO STIAMO CALCOLANDO L'INTEGRALE CONSIDERANDO TUTTI GLI STATI CHE COMPONGONO A e (DENTRO LE PARENTESI CI OCCUPIAMO DI CAPIRE COSA SUCCEDE AL VARIARE DI x E y PER OGNI SEZIONE, INTEGRANDO RISPETTO A z CI OCCUPIAMO DI SOMMARE TUTTI QUESTI RISULTATI).

Vittorio Alzetta

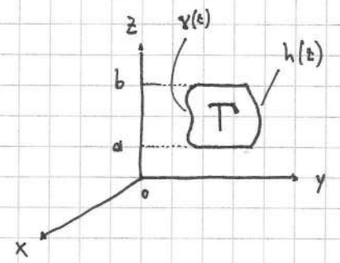
VOLUME SOLIDI DI ROTAZIONE

SIANO $g, h \in C([a,b], \mathbb{R})$ (CIOÈ $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE) TALI CHE $0 \leq g(t) \leq h(t)$ PER OGNI $t \in [a,b]$.

PONIAMO:

$$T := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b,\ g(z) \leq y \leq h(z)\}$$

AD ESEMPIO:



SIA ORA A IL SOLIDO OTTENUTO RUOTANDO T DI 2π ATTORNO ALL'ASSE z, AVREMO CHE LA MISURA DI A (UTILE AL CALCOLO DEL VOLUME DEL SOLIDO DI ROTAZIONE) SARÀ:

$$m(A) = \pi \int_a^b \left(h(z)^2 - g(z)^2 \right) dz$$

CAMBIO DI VARIABILE INTEGRALI MULTIPLI

SIA $E \subset \mathbb{R}^n$ LA CHIUSURA DI UN INSIEME APERTO E LIMITATO E SIA $\underline{\Phi}$ APPARTENENTE A $C^1(E, \mathbb{R}^n)$ ($\underline{\Phi} : E \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA CON DERIVATE CONTINUE).

SUPPONIAMO CHE:

- LA RESTRIZIONE DI $\underline{\Phi}$ ALLA PARTE INTERNA DI E SIA INIETTIVA
- PER OGNI $\vec{v} \in \text{int}(E)$ SI HA CHE $\det(J_{\underline{\Phi}}(\vec{v})) \neq 0$
- GLI INSIEMI E E $\underline{\Phi}(E)$ SIANO MISURABILI

ALLORA PER OGNI $f \in C(\underline{\Phi}(E), \mathbb{R})$ SI HA:

$$\int_{\underline{\Phi}(E)} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_E \left(f(\underline{\Phi}(\vec{v})) \cdot \left| \det(J_{\underline{\Phi}}(\vec{v})) \right| \right) d\vec{v}$$

QUANDO CAMBIAVAMO VARIABILE NEGLI INTEGRALI DI ANALISI 1 CALCOLAVAMO DI NUOVO IL DIFFERENZIALE, ORA, IL FATTO DI AVER ALLUNGATO IL DETERMINANTE DELLO JACOBIANO VUOL PROPRIO RAPPRESENTARE QUEL PASSAGGIO LÌ.

NEL CASO DI CAMBIO ALLE <u>COORDINATE POLARI</u> (DA QUELLE CARTESIANE) SI HA:

$$\left| \det(J_{\underline{\Phi}}(\rho, \theta)) \right| = \rho$$

NEL CASO DI CAMBIO ALLE <u>COORDINATE CILINDRICHE</u> SI HA:

$$\left| \det(J_{\underline{\Phi}}(\rho, \theta, z)) \right| = \rho$$

E NEL CASO DI CAMBIO ALLE <u>COORDINATE SFERICHE</u> SI HA:

$$\left| \det(J_{\underline{\Phi}}(\rho, \theta, \varphi)) \right| = \rho \sin(\varphi)$$

Vittorio Alzetta

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI SONO EQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA È UNA FUNZIONE (DOVREMO QUINDI SPECIFICARE FUNZIONE + DOMINIO DELLA FUNZIONE).

L'EQUAZIONE SARÀ ESPRESSA DA:

VARIABILI INDIPENDENTI + FUNZIONE INCOGNITA + DERIVATE FUNZIONE INCOGNITA

FAREMO LA SEGUENTE DISTINZIONE :

- EQUAZIONE DIFFERENZIALE **ORDINARIA** SE L'INCOGNITA È UNA FUNZIONE DI 1 VARIABILE REALE (EDO) (ES. $y(x) + y^{IV}(x) = t - y^{IX}(x)$)
- EQUAZIONE DIFFERENZIALE **ALLE DERIVATE PARZIALI** SE L'INCOGNITA È UNA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI REALI E NELLA RELAZIONE COMPAIONO DERIVATE PARZIALI RISPETTO A PIÙ VARIABILI (ES. $0 = z + y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$)

L'ORDINE PIÙ ALTO DI DERIVAZIONE PRESENTE NELL'EQUAZIONE SI DIRÀ **ORDINE** DELLA EQUAZIONE DIFFERENZIALE (NEGLI ESEMPI PRECEDENTI SAREMMO 9 E 2).

SCRIVEREMO LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE COME:

$$F(t, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$$ ← FORMA GENERALE

DOVE t È LA VARIABILE INDIPENDENTE, y^n È LA DERIVATA n-ESIMA DI y E F È DEFINITA IN $\mathbb{R}^{n+2}$ (CI SONO $n+2$ VARIABILI INGRESSO).

SE F NON DIPENDE DALLA VARIABILE INDIPENDENTE L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SI DICE **AUTONOMA** (ES. $y(x) + y^{XV}(x) = y^{LM}(x)$).

SIGNIFICATO DI RISOLVERE UNA EDO

DATA $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, RISOLVERE L'EDO DI ORDINE n IN FORMA GENERALE RELATIVA ALLA FUNZIONE F SIGNIFICA TROVARE UNA COPPIA (f, I) TALI CHE:

- I È INTERVALLO
- $f : I \to \mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE DERIVABILE n VOLTE IN I
- $\forall\, t \in I : \quad (t, f(t), \dots, f^{(n)}) \in \Omega$
- $\forall\, t \in I : F(t, f(t), \dots, f^{(n)}) = 0$

ESEMPIO:

LA COPPIA $(\sin, \mathbb{R})$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y^2 + (y')^2 = 1$

INFATTI :

$$\sin^2 + (\cos)^2 = 1$$
$$\sin^2 + \cos^2 = \sin^2 + \cos^2$$
$$0 = 0 \quad \checkmark$$

QUESTO ESEMPIO DÀ LO SPUNTO PER INTRODURRE UNA PROPRIETÀ GENERALE DELLE EQUAZIONI AUTONOME:

$$\left[(y, (a,b)) \text{ È SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE AUTONOMA}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c}(y(x-t_0), (a+t_0, b+t_0)) \text{ È} \\ \text{ANCORA SOLUZIONE}\end{array}\right]$$

ESEMPIO

LA COPPIA $(\sin, (0, \pi))$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$y|y| + (y')^2 = 1$$

INFATTI :

$$\sin \cdot \sin + (\cos)^2 = 1$$
$$\sin^2 + \cos^2 = 1 \quad \checkmark$$

AVREMMO AGGIUNTO UNA π ALLA FUNZIONE E TOLTO π AGLI ESTREMI DELL'INTERVALLO OTTENIAMO LA COPPIA $(\underbrace{\sin(x+\pi)}_{-\sin(x)}, (-\pi, 0))$ E IL RISULTATO È:

$$-\sin|-\sin| + (-\cos)^2 = 1 \iff \sin^2 + \cos^2 = 1 \quad \checkmark$$

È ANCORA SOLUZIONE

↳ IL SENO È NEGATIVO IN $(-\pi, 0)$ E QUINDI $-\sin$ SARÀ POSITIVO QUINDI NON FA NULLA IL VAL. ASSOLUTO

FORMA NORMALE

GENERALMENTE NSOLVERE UNA EDO É UN ARDUO COMPITO, CI SI LIMITA PIUTTOSTO A STABILIRE SE ESISTONO SOLUZIONI, QUANTE SONO E CHE PROPRIETÁ HANNO.

PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN FORMA GENERALE É DIFFICILE ANCHE SOLO STABILIRE SE ESISTONO MENTRE PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN **FORMA NORMALE** É FATTIBILE. QUESTE ULTIME POSSONO ~~MANIFESTARE~~ ESSERE SCRITTE COME:

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

DOVE $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. IN SOSTANZA UNA EDO É IN FORMA NORMALE SE LA DERIVATA DI ORDINE MASSIMO PUÓ ESSERE SCRITTA IN FUNZIONE DELLA VARIABILE INDIPENDENTE, LA FUNZIONE INCOGNITA E LE DERIVATE DI ORDINE INFERIORE.

ESEMPIO:

L' EDO $y'' + \sin(y) - \cos(3t) = 0$ É IN FORMA NORMALE, INFATTI POSSIAMO ESPRIMERE LA DERIVATA SECONDA COME:

$$y'' = \cos(3t) - \sin(y)$$

AL CONTRARIO, L'EDO $y^2 + (y')^2 - 1 = 0$ NON É IN FORMA NORMALE, INFATTI:

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$$

E NON POSSIAMO ESPRIMERE y' UNIVOCAMENTE.

D'ORA IN POI VEDREMO SOLTANTO EDO IN FORMA NORMALE.

PROBLEMA DI CAUCHY

Vittorio Alzetta

CON I SEGUENTI ESEMPI CAPIREMO CHE UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE, NONOSTANTE SIA IN FORMA NORMALE, POTREBBE AVERE MOLTE SOLUZIONI:

- $y' = 0$

  HA PER SOLUZIONI TUTTE LE FUNZIONI COSTANTI

- $y'' = 0$

  HA PER SOLUZIONI TUTTE LE RETTE, DUNQUE LE FUNZIONI AFFINI, INFATTI SE $y = ax + b$ SI HA $y' = a$, $y'' = 0$.

- $y^{(n)} = 0$

  HA PER SOLUZIONI TUTTE LE FUNZIONI DI POLINOMI DI GRADO $\leq n-1$ INFATTI SE PRENDIAMO UN POLINOMIO DI GRADO $n-1$ E LO DERIVIAMO UNA VOLTA AVREMO CHE IL TERMINE NOTO SCOMPARIRÁ E L'INCOGNITA DI GRADO MASSIMO DIMINUIRÁ DI 1.

  $$y = x^{56} + x^{40} + 3 \rightsquigarrow y' = 56x^{55} + 40x^{39}$$

- $y' = y$

  HA PER SOLUZIONI TUTTE LE FUNZIONI DEL TIPO $y = C \cdot e^x$ CON $C \in \mathbb{R}$.

OSSERVIAMO CHE NEGLI ESEMPI PRECEDENTI LE SOLUZIONI DIPENDEVANO SEMPRE DA TANTI PARAMETRI QUANTO ~~PARI~~ ALTO ERA L'ORDINE DELL'EDO. I ~~PARAMETRI~~ PARAMETRI DEI POLINOMI ERANO I COEFFICIENTI.

PER AVERE QUINDI UNA SOLUZIONE UNICA É NECESSARIO FORNIRE n PARAMETRI QUESTA COSA É POSSIBILE RICHIEDENDO CHE LE DERIVATE DELLA SOLUZIONE ~~VARIABILE~~ ASSUMANO DETERMINATI VALORI PER UN DETERMINATO ISTANTE x_0.

DI FATTO PER AVERE UNICITÁ SERVONO n PARAMETRI E POICHÉ LE DERIVATE

Vittorio Alzetta

FINO ALLA PENULTIMA SONO $n-1$ PIÚ LA FUNZIONE STESSA RAPPRESENTIAMO $n\ (n-1+1)$ VINCOLI SI AVRÁ UNICITÁ DELLA SOLUZIONE.

ANCHE NOI SIA QUINDI $f: \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ E SIA $(t_0, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}) \in \Omega$, CHIAMEREMO PROBLEMA DI CAUCHY O PROBLEMA AI VALORI INIZIALI IL SEGUENTE SISTEMA:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y^{(n-1)}(t_0) = \bar{y}_{n-1} \\ \vdots \\ y'(t_0) = \bar{y}_1 \\ y(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \quad \text{CONDIZIONI INIZIALI}$$

RISOLVERE QUESTO PROBLEMA SIGNIFICHERÁ TROVARE UNA FUNZIONE y E UN INTERVALLO I TALI CHE $\forall t \in I: y(t)$ SODDISFA L'EDO E VALGONO ANCHE LE CONDIZIONI INIZIALI

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

CONSIDERIAMO UN PUNTO MATERIALE CHE SI MUOVE NEL PIANO (AVRÁ QUINDI 2 COORDINATE) CON LEGGE DEL MOTO:

$$P(t) := (x(t), y(t))$$

APPLICHIAMO AL CORPO UNA FORZA (CHE ESSENDO UN VETTORE AVRÁ ANCH'ESSA BISOGNO DI 2 COMPONENTI) DEFINITA DA:

$$f(t) := (f_1(t), f_2(t))$$

E SUPPONIAMO CHE IL CORPO ABBIA MASSA VARIABILE NEL TEMPO $m(t)$, CON PERDITA PROPORZIONALE ALLA VELOCITÁ.

POSSIAMO QUINDI IMPOSTARE IL SEGUENTE SISTEMA SPIEGANDO PRIMA:

$$\begin{cases} (m(t) \cdot P'(t))' = f(t) \\ m'(t) = -\|P'(t)\| \end{cases}$$

NELLA PRIMA EQUAZIONE $P'(t)$ RAPPRESENTA LA VELOCITÁ IN OGNI ISTANTE t DEL CORPO MENTRE $m(t) \cdot v(t)$ RAPPRESENTA LA QUANTITÁ DI MOTO CHE DERIVATA CI DÁ LA FORZA.

NELLA SECONDA EQUAZIONE STA RIASSUNTO IL FATTO CHE IL CORPO PERDE MASSA PROPORZIONALMENTE ALLA VELOCITÁ ($P'(t)$), IL "MENO" INDICA CHE L'ANDAMENTO DI $m(t)$ É DECRESCENTE E LA NORMA INDICA LA PROPORZIONALITÀ

RISCRIVENDO LE 2 EQUAZIONI ESPLICITANDO LE COMPONENTI OTTENIAMO:

$$\begin{cases} m'(t) \cdot x'(t) + m(t) \cdot x''(t) = f_1(t) \\ m'(t) \cdot y'(t) + m(t) \cdot y''(t) = f_2(t) \\ m'(t) = -\sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)} \end{cases} \leftarrow \text{ABBIAMO PRESO LA NORMA EUCLIDEA}$$

DUNQUE QUESTO É UN SISTEMA DI 3 EDO DI ORDINE 2 (COMPARE AL MASSIMO LA DERIVATA SECONDA) IN 3 EQUAZIONI E 3 INCOGNITE $(m(t), \underbrace{x(t), y(t)}_{P(t)})$.

ESPRIMIAMO ORA $V_x = x'$ E $V_y = y'$ (LE VELOCITÁ DEL CORPO LUNGO x E y) E RISCRIVIAMO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} x' = V_x \\ y' = V_y \\ V_x'(t) = \dfrac{f_1(t) + \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)}\ V_x(t)}{m(t)} \\ V_y'(t) = \dfrac{f_2(t) + \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)}\ V_y(t)}{m(t)} \\ m'(t) = -\sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} \end{cases}$$

CON QUALCHE SEMPLICE PASSAGGIO ALGEBRICO SIAMO PASSATI AD UN SISTEMA DI EDO IN FORMA NORMALE DI ORDINE 1 DI 5 EQUAZIONI E 5 INCOGNITE $(m(t), X(t), Y(t), V_x(t), V_y(t))$.

DA QUESTO ESEMPIO SI CAPISCE COME UN SISTEMA DI EDO DI ORDINE SUPERIORE A 1 POSSA ESSERE RIDOTTO AD UNO DI ORDINE 1, QUINDI D'ORA IN POI CI LITEREMO A CONSIDERARE EDO IN FORMA NORMALE DI PRIMO ORDINE.

SISTEMI DI n EDO DI ORDINE 1

DATI $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ E $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ UN SISTEMA DI n EDO DI ORDINE 1 PUÓ ESSERE SCRITTO COME:

$$y' = F(t, y)$$

- HA n FUNZIONI COMPONENTI (ECCO PERCHÉ $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$)
- RICEVE n+1 ARGOMENTI (ECCO PERCHÉ $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$)
- É UNA FUNZIONE CON n FUNZIONI COMPONENTI
- É UNA VARIABILE INDIPENDENTE QUINDI PUÓ ESSERE INTESA COME CONTENUTA IN $\mathbb{R}$.

DEFINIAMO SOLUZIONE LOCALE DELLA PRECEDENTE EQUAZIONE LA FUNZIONE $y : J \to \mathbb{R}^n$ TALE CHE:

- J É UN INTERVALLO IN $\mathbb{R}$
- $\forall t \in J : (t, y(t)) \in \Omega$
- y É DERIVABILE E $\forall t \in J : y'(t) = F(t, y(t))$

ABBIAMO DETTO CHE $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, DUNQUE PRESO $A \subset \mathbb{R}^n$ ~~APERTO~~ E $I \subset \mathbb{R}$ TALI CHE $\Omega = I \times A$ CHIAMEREMO y SOLUZIONE GLOBALE SE $J = I$.

OSSERVAZIONI

SE $n = 1$ IL SISTEMA SARÁ FORMATO DA UNA SINGOLA EDO DI FUNZIONI (PERCHÉ $n=1$) REALI A VARIABILE (SOLO 1, $I \subset \mathbb{R}$) REALE E LORO DERIVATE (SE É DI PRIMO ORDINE CI SARÁ SOLO LA DERIVATA PRIMA).

Vittorio Alzetta

SE $n \geq 2$ LA:

$$y' = F(t, y) \qquad [1]$$

DARÁ VITA AD UN SISTEMA DI n EDO CON FUNZIONI VETTORIALI DI VARIABILE REALE. POICHÉ $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ E $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ POSSIAMO SCRIVERE

$$F = (F_1, \dots, F_n), \quad F_i : \Omega \to \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n$$
$$y = (y_1, \dots, y_n), \quad y_i : I \to \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n$$

IN SOSTANZA QUESTE CONSIDERAZIONI CI PERMETTONO DI SCRIVERE IL SISTEMA RIASSUNTO DALLA [1] COME:

$$\begin{cases} y_1'(t) = F_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ y_2'(t) = F_2(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = F_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}$$

IN GENERALE DATO UN SISTEMA DI k EDO DI ORDINE n:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

- OGNUNA DI QUESTE HA k FUNZIONI COMPONENTI

CON $y : J \to \mathbb{R}^k$ SI PUÓ RICONDURRE AD UN SISTEMA DI $k \cdot n$ EDO DI ORDINE 1 CON DEI OPPORTUNI CAMBI DI ~~VARIABILE~~ INCOGNITA.

ESEMPIO

SUPPONIAMO PER SEMPLICITÁ CHE $k = 1$ E $n = 2$, QUINDI AVREMO UN SISTEMA DI 1 EDO DI ORDINE 2, TIPO:

$$v'' = f(x, v, v')$$

- UNA QUALCHE FUNZIONE CHE HA COME ARG. LE DERIVATE INFERIORI E LA VAR. INDIP. ⇒ EDO ⇒ FORMA NORM.
- x v v' ↓ ↓ ↓ $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Vittorio Alzetta

LA FUNZIONE INCOGNITA SARÀ $v : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DERIVABILE 2 VOLTE (TALE PER CUI VALGONO I 3 PUNTI DELLA SOLUZIONE LOCALE).

CAMBIANDO L'INCOGNITA CERCHIAMO $y : J \to \mathbb{R}^2$ (QUINDI DA 2 FUNZIONI COMPONENTI y_1 e y_2) TALI CHE:

$$\begin{cases} y_1(x) = v(x) \\ y_2(x) = v'(x) = y_1'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'(x) = v'(x) \\ y_2'(x) = v''(x) \end{cases}$$

SIAMO DUNQUE PASSATI DA UN SISTEMA DI 1 EDO DI ORDINE 2 A UNO DI 2 EDO DI ORDINE 1.

IL SISTEMA PUÒ ESSERE RIASSUNTO NELLA SEGUENTE FORMA:

$$y' = (y_1', y_2') = (y_2(x), f(x, v, v'))$$

E SI POTREBBE DEFINIRE F COME:

$$F(x, y) := \begin{matrix} y_2(x) \\ \downarrow \\ f(x, v, v') \end{matrix}$$

PROBLEMI DI CAUCHY PER SISTEMI DI ODE DEL 1° ORDINE

QUESTO PARAGRAFO POTRÀ SEMBRARE MOLTO SIMILE A QUELLO SUI SISTEMI DI N EDO DI ORDINE 1°, LA DIFFERENZA È CHE LÌ SI CONSIDERAVANO SOLAMENTE DEI SISTEMI MENTRE QUA SI CONSIDERA IL SISTEMA + LE CONDIZIONI INIZIALI (PERCHÉ IL PROBLEMA DI CAUCHY PREVEDE ANCHE QUELLE).

SIANO QUINDI $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ E $t_0 \in \mathbb{R}$, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ TALI CHE $(t_0, Y_0) \in \Omega$

CHIAMEREMO SOLUZIONE LOCALE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

(SOTTOSEGNANDO INDICO FUNZIONI A VALORI VETTORIALI O COMUNQUE LORO VETTORI)

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{F}(t, \underline{y}) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

LA FUNZIONE $\underline{y} : J \to \mathbb{R}^n$ TALE PER CUI:

- $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$
- $\underline{y}' = E(t, \underline{y}(t)) \quad \forall t \in J$
- $t_0 \in J$

DOVE J È UN INTERVALLO ED È UN'INCOGNITA DEL PROBLEMA. L'ALTRA INCOGNITA SARÀ $\underline{y} : J \to \mathbb{R}^n$.

INOLTRE, COME PRIMA, AVREMO CHE Ω (È UGUALE A) $= I \times A$ E SE $J = I$ CHIAMEREMO $\underline{y}$ SOLUZIONE GLOBALE DEL PROBLEMA DI CAUCHY.

REGOLARITÀ DELLE SOLUZIONI

SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ E $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. CONSIDERIAMO LA SEGUENTE EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

$$y' = f(t, y)$$

SI OSSERVANO I SEGUENTI 3 FATTI (COLLEGATI TRA LORO IN REALTÀ):

- SE f È CONTINUA ALLORA OGNI SOLUZIONE y DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE È DI CLASSE C^1 NEL PROPRIO INTERVALLO DI DEFINIZIONE

dim: SE f È CONTINUA ALLORA y' (CHE È UGUALE A f) SARÀ CONTINUA E DUNQUE y AVRÀ DERIVATA CONTINUA E SARÀ C^1.

- SE f È DI CLASSE C^k IN Ω ALLORA OGNI SOLUZIONE y DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE È DI CLASSE C^{k+1} NEL PROPRIO INTERVALLO DI DEFINIZIONE.

dim: SE f È DI CLASSE C^k CON $k > 1$ SARÀ ANCHE DI CLASSE C^1 E DUNQUE y (UNA QUALSIASI SOLUZIONE) SARÀ DI CLASSE C^2. SI PUÒ FARE LO STESSO RAGIONAMENTO ARRIVANDO A DIMOSTRARE CHE y È $C^1, C^2, \dots, C^{k+1}$.

Vittorio Alzetta

- INFINE, SE f É DI CLASSE C^∞ IN Ω, ALLORA OGNI SOLUZIONE y DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE É DI CLASSE C^∞ NEL PROPRIO INTERVALLO DI DEFINIZIONE.

ESEMPIO 1

SIA $g(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA E NON DIPENDENTE DA y, PER OGNI COPPIA DI DATI $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ IL PROBLEMA DI CAUCHY SEGUENTE:

$$\begin{cases} y' = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

HA COME UNICA SOLUZIONE <u>GLOBALE</u>:

$$\int_{t_0}^{x} g(s)\,ds = y(x) - y(t_0) \iff y(x) = y(t_0) + \int_{t_0}^{x} g(s)\,ds$$

SI OSSERVI CHE HO SEMPLICEMENTE APPLICATO IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA.

IN GENERE NON SI POSSONO TROVARE SOLUZIONI GLOBALI DI UN PROBLEMA DI CAUCHY MA PIUTTOSTO SOLUZIONI LOCALI. NONOSTANTE CIÓ ANCHE LE SOLUZIONI LOCALI (A MENO CHE F, CHE NEL NOSTRO ESEMPIO É RAPPRESENTATA DA g, NON SIA SPECIALE) SPESSO NON SONO ESPRIMIBILI ESPLICITAMENTE.

EDO A VARIABILI SEPARABILI

INTERROMPO LA SERIE DI ESEMPI CON UNA DIGRESSIONE SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE A VARIABILI SEPARABILI.

SIANO $I, B \subset \mathbb{R}$ APERTI E $t_0 \in I$, $y_0 \in B$ CON $g : I \to \mathbb{R}$ E $h : B \to \mathbb{R}$ CONTINUE.

DIRE CHE UNA EDO É A VARIABILI SEPARABILI SIGNIFICA DIRE CHE LE VARIABILI DI F POSSONO ESSERE ESPRESSE SINTOCALMENTE DA FUNZIONI DIVERSE, COME NEL SEGUENTE ESEMPIO:

$$\begin{cases} y' = g(t)\,h(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

NON ABBIAMO SCRITTO $F(t,y)$ MA ABBIAMO SEPARATO t E y

QUESTA É LA <u>FUNZIONE</u> y

SARÁ NECESSARIO DISTINGUERE 2 CASI:

<u>CASO $h(y_0) = 0$</u>

IN QUESTO CASO UNA SOLUZIONE COSTANTE GLOBALE É $y(t) \equiv y_0$, INFATTI SE $y(t)$ É COSTANTE A y_0 AVREMO CHE $h(y)$ ($h(y(t))$) SARÁ SEMPRE $h(y_0)$ E DUNQUE SEMPRE NULLO: $y' = g(t) \cdot 0 = 0$. MA TUTTO TORNA, D'ALTRONDE SE $y(t)$ É COSTANTE A y_0 LA SUA DERIVATA <u>DEVE</u> ESSERE COSTANTE A 0.

<u>CASO $h(y_0) \neq 0$</u>

SE CI TROVIAMO IN QUESTO CASO ED ESISTE UNA SOLUZIONE y ALLORA ESSA SARÁ:

$$y \text{ É DERIVABILE} \Rightarrow y \text{ É CONTINUA} \Rightarrow t \mapsto \underbrace{h(y(t))}_{\text{COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE}} \text{ É CONTINUA}$$

E SICCOME $h(y(t_0)) = h(y_0) \neq 0$ POSSIAMO AFFERMARE CHE PRENDENDO s IN UN INTORNO J DI t_0 AVREMO:

$$h(y(s)) \neq 0 \quad \forall\, s \in J \in \mathcal{U}(t_0)$$

E DUNQUE POTREMO DIVIDERE NELLA PRIMA EQUAZIONE DEL SISTEMA OTTENENDO:

$$\frac{y'(s)}{h(y(s))} = g(s) \quad \forall\, s \in J$$

Vittorio Alzetta

INTEGRANDO ORA TRA t_0 E t ENTRAMBI I MEMBRI OTTENIAMO:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{h(y(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds \qquad \forall t \in J$$

A QUESTO PUNTO POSSIAMO EFFETTUARE IL CAMBIO DI VARIABILI $y(s) = u$ E $du = y'(s)\, ds$ NEL PRIMO INTEGRALE:

$$\int_{y_0 \leftarrow y(t_0)}^{y(t)} \frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds \qquad \forall t \in J$$

SE DUNQUE SIAMO IN GRADO DI CALCOLARE UNA PRIMITIVA DI q SU I E DI $1/h$ IN UN INTORNO DI y_0 POTREMO RIUSCIRE AD ESPRIMERE ESPLICITAMENTE $y(t)$ IN UN INTORNO DI t_0, CIOÉ J.

ESEMPIO 2

SIA $q \in C(I)$ (É CONTINUA IN I), $t_0 \in I$ E $y_0 \in \mathbb{R}$ E CONSIDERIAMO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = q(t)\, y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

SI OSSERVI COME IN QUESTO CASO $h(y) = y$.

PER QUANTO DETTO NEL PARAGRAFO PRECEDENTE POSSIAMO DISTINGUERE I SEGUENTI CASI:

- $y_0 = 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in I$ É SOLUZIONE
- $y_0 \neq 0 \wedge t \approx t_0 \Rightarrow$ É POSSIBILE APPLICARE IL METODO DELLE VARIABILI SEPARABILI OTTENENDO:

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{u} = \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds \iff [\ln u]_{y_0}^{y(t)} = \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds \iff \frac{\ln y(t)}{\ln y_0} = \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds$$

$$y_0(t) = y_0\, e^{\int_{t_0}^{t} q(s)\, ds} \qquad \forall t \in J \in \mathcal{U}(t_0)$$

DERIVANDO SI OTTIENE $q(t) \cdot y$ E SI PUÓ MOSTRARE CHE LA RELAZIONE VALE PER OGNI $t \in I$ DENOTANDO CON L'ESISTENZA DI UN'UNICA SOLUZIONE GLOBALE

ESEMPIO 3

IL PROBLEMA CHE PROPONGO ORA RAPPRESENTA L'EQUAZIONE LOGISTICA, CIOÉ IL

Vittorio Alzetta

ESEMPIO 3

IL PROBLEMA CHE ORA PROPONGO RAPPRESENTA IL MODELLO BASE CON IL QUALE VIENE STUDIATA L'EVOLUZIONE DI UNA POPOLAZIONE:

$$\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad , \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

ANZITUTTO OSSERVIAMO CHE SE y É COSTANTE A 0 O A 1 IL PROBLEMA É RISOLTO GLOBALMENTE, . DIREMO QUINDI CHE PER $y_0 = 0 \wedge y_0 = 1$ LA FUNZIONE $y(t) \equiv$ COSTANTE É SOLUZIONE DEL PROBLEMA.

SE INVECE $y_0 \neq 0$ E $y_0 \neq 1$ POSSIAMO DI NUOVO SFRUTTARE QUANTO DETTO NEL CAPITOLO SULLE EDO A VARIABILI SEPARABILI, PER $t \approx 0$ AVREMO:

$$t = \int_0^t 1 \, ds = \int_0^t \frac{y'(s)\,ds}{y(s)[1-y(s)]} = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{u(1-u)}$$

QUESTA QUANTITÁ VALE 1

$y(0)$

$$= \int_{y_0}^{y(t)} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \left[\log|u| - \log|1-u| \right]_{y_0}^{y(t)}$$

PER LA PERMA. DEL SEGNO DATO CHE y É CONTINUA SI HA CHE $y(t)$ E y_0 HANNO LO STESSO SEGNO

$$= \log \frac{y(t)}{1-y(t)} - \log \frac{y_0}{1-y_0} = \log \frac{y(t)}{1-y(t)} \cdot \frac{1-y_0}{y_0}$$

$$t = \log \frac{y(t)}{1-y(t)} \cdot \frac{1-y_0}{y_0} \iff e^t = \frac{y(t)}{1-y(t)} \cdot \frac{1-y_0}{y_0} \iff$$

$$y(t) = \frac{y_0 e^t}{1-y_0} \cdot \frac{1-y_0}{y_0 e^t + 1 - y_0} = \boxed{\frac{y_0 e^t}{y_0 e^t - y_0 + 1}}$$

SE DUNQUE ESISTERÁ UNA SOLUZIONE SARÁ QUELLA CHE HO TROVATO.

Vittorio Alzetta

FACCIAMO BREVEMENTE LA PROVA CHE LA FUNZIONE TROVATA RISOLVA IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$y(0) = \frac{y_0 e^0}{1 - y_0 + y_0 e^0} = \frac{y_0}{1 - y_0 + y_0} = y_0$$

$$y' = y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_0 e^t}{1 - y_0 + y_0 e^t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_0 \blacklozenge}{(1-y_0)e^{-t} + y_0}\right) = y_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1-y_0)e^{-t}+y_0}\right)$$

$$= \frac{y_0 (1-y_0) e^{-t}}{[(1-y_0)e^{-t} + y_0]^2}$$

L'HO ESPRESSA COSÌ

$$y(1-y) = y(t)(1-y(t)) = \frac{y_0}{(1-y_0)e^{-t}+y_0} \cdot \left(1 - \frac{y_0}{(1-y_0)e^{-t}+y_0}\right)$$

$$= \frac{y_0 \cdot (1-y_0) e^{-t}}{(1-y_0)e^{-t} + y_0}$$

DUNQUE ALMENO ~~DA~~ IN UN INTORNO DI 0 ABBIAMO TROVATO UNA SOLUZIONE (LOCALE), MA VOGLIAMO SAPERE QUANTO DEV'ESSERE E PUÓ ESSERE GRANDE QUESTO INTORNO PER POTERCI SPINGERE AVANTI NELLE PREVISIONI.

IN SOSTANZA SI TRATTA DI DETERMINARE IL DOMINIO NATURALE DI $f(x)$:

$$f(x) := \frac{y_0 e^x}{1 - y_0 + y_0 e^x}$$

É SEMPLICE VERIFICARE CHE IL DENOMINATORE É DIVERSO DA 0 NEI SEGUENTI CASI:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : y_0 e^x \neq y_0 - 1\} = \begin{cases} \mathbb{R} & 0 \leq y_0 \leq 1 \\ \mathbb{R} \setminus \left\{\log \frac{y_0 - 1}{y_0}\right\} & y_0 \notin [0,1] \end{cases}$$

POICHÉ PER $y_0 \notin [0,1]$ IL DOMINIO NON É UN INTERVALLO SIAMO COSTRETTI A SPEZZARLO IN DUE PONENDO LE SEGUENTI CONDIZIONI.

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY SARÁ:

$$y(t) = \frac{y_0 e^t}{1 - y_0 + y_0 e^t} \qquad I_y = \begin{cases} \left(-\infty, \log \frac{y_0 - 1}{y_0}\right) & \text{SE } y_0 < 0 \\ \mathbb{R} & \text{SE } 0 \leq y_0 \leq 1 \\ \left(\log \frac{y_0 - 1}{y_0}, +\infty\right) & \text{SE } 1 < y_0 \end{cases}$$

PERTANTO SE $y_0 \in [0,1]$ DIREMO CHE $y(t)$ É <u>SOLUZIONE GLOBALE</u> MENTRE NEGLI ALTRI CASI SARÁ SOLO <u>SOLUZIONE LOCALE</u>.

ESEMPIO 4

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE FUNZIONE:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{SE } t > 0 \\ 0 & \text{SE } t = 0 \\ -1 & \text{SE } t < 0 \end{cases}$$

E IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

TALE PROBLEMA NON AVRÁ SOLUZIONI DEFINITE IN UN INTORNO DI 0, INFATTI f IN 0 NON É CONTINUA:

$$\lim_{t \to 0^-} f(t) = -1 \neq \lim_{t \to 0^+} f(t) = +1$$

ESEMPIO 5

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

PER SEMPLICITÁ NOTIAMO SUBITO LE SOLUZIONI $y \equiv 0$ E $y(t) = t^3$. É

FACILE VERIFICARE CHE esse SONO GLOBALI (ENTRAMBE SONO DEFINITE SU TUTTO $\mathbb{R}$).

DA QUESTE 2 SOLUZIONI É POSSIBILE COSTRUIRE INFINITE ALTRE SOLUZIONI, ~~esse~~ CI BASTERÁ INCOLLARE LE 2 FUNZIONI SOLUZIONI.



TEOREMA DI PEANO [BREVE]

SIANO $\Omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ APERTO E $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ CON $(t_0, y_0) \in \Omega$.

ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY :

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

AMMETTE ALMENO UNA SOLUZIONE DEFINITA IN $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ CON δ OPPORTUNO.

TEOREMA DI PEANO [COMPLETO]

SIANO $\Omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ E $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ CON $(t_0, y_0) \in \Omega$.

SIANO $a, b > 0$ IN $\mathbb{R}$ TALI CHE L'INSIEME :

$$T := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(y_0)$$

SIA CONTENUTO IN Ω.

PONIAMO M E δ RISPETTIVAMENTE :

$$M := \max_{(t,y) \in T} \| f(t,y) \|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\delta := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad \text{SE } M = 0 \text{ ALLORA } \delta = a$$

ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

AMMETTE SOLUZIONE (ALMENO UNA) IN $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

- SI OSSERVI CHE L'ESISTENZA DELLA SOLUZIONE NON ESCLUDE CHE CE NE POSSANO ESSERE INFINITE. PER AVERE L'UNICITÁ BISOGNA FARE ULTERIORI RICHIESTE -

PER DIMOSTRARE QUESTO TEOREMA (COSA CHE NON FAREMO) SI FA USO DEL SEGUENTE LEMMA.

LEMMA

SIANO $\Omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ E $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA CON $(t_0, y_0) \in \Omega$.

SIA $y : J \to B_r(y_0)$ CONTINUA, É SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

SE E SOLO SE $y \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ E RISOLVE IL PROBLEMA DI CAUCHY :

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dim : ($\Rightarrow$) SUPPONIAMO CHE y SIA CONTINUA E RISOLVA L'EQUAZIONE INTEGRALE. PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE y É DERIVABILE E DERIVANDO IL MEMBRO DI DESTRA OTTENIAMO:

$$y'(t) = f(t, u(t))$$

E DUNQUE, POICHÉ f É CONTINUA, ANCHE y' SARÁ CONTINUA.

($\Leftarrow$) SUPPONENDO CHE y SIA C^1 E RISOLVA IL PROBLEMA DI CAUCHY INTEGRIAMO $y' = f(t,y)$ TRA t_0 E t :

$$\int_{t_0}^{t} y' = y(t) + c \underbrace{=}_{\text{SI PONGA } t = t_0} \int_{t_0}^{t} f(t,y)$$

Vittorio Alzetta

Vittorio Alzetta

INOLTRE POICHÉ y É DI CLASSE C^0 y SARÁ OVVIAMENTE CONTINUA. □

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

SIANO $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ E $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, CON $f = f(t,x)$ DOVE $x \in \mathbb{R}^n$.

DIREMO CHE f É LIPSCHITZIANA IN Ω RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t SE ESISTE $L > 0$ TALE CHE:

$$\| f(t,x) - f(t,y) \|_{\mathbb{R}^m} \leq L \cdot \| x - y \|_{\mathbb{R}^m}$$

$\forall (t,x), (t,y) \in \Omega$. E CHIAMEREMO L COSTANTE DI LIPSCHITZ.

OSSERVAZIONE:

SIA $m \geq 2$ E CHIAMIAMO $f_1, \dots, f_m$ LE FUNZIONI COMPONENTI DI f.

- SE f É LIPSCHITZIANA RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t CON COSTANTE DI LIPSCHITZ L ALLORA LO SONO ANCHE TUTTE LE FUNZIONI COMPONENTI f_j CON COSTANTE DI LIPSCHITZ L.
- SE CIASCUNA f_j É LIPSCHITZIANA RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t CON COSTANTE DI LIPSCHITZ L_j ALLORA LO É ANCHE f CON COSTANTE DI LIPSCHITZ $L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_m$.

FUNZIONI LOCALMENTE LIPSCHITZIANE

DIREMO CHE f É LOCALMENTE LIPSCHITZIANA IN Ω RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t SE É LIPSCHITZIANA RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t IN UN QUALSIASI SOTTOINSIEME DI Ω DEL TIPO:

$$[\alpha, \beta] \times \overline{B}_r(\overline{x})$$

($[\alpha,\beta]$: SONO IN $\mathbb{R}$; $\overline{B}_r(\overline{x})$: PALLA CHIUSA DI CENTRO $\overline{x}$ E RAGGIO r IN $\mathbb{R}^n$)

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA LOCALE LIPSCHITZIANITÁ

SE f É DI CLASSE C^1 IN Ω ALLORA f É LOCALMENTE LIPSCHITZIANA IN Ω RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t.

dim: DALLE PRECEDENTI OSSERVAZIONI É CHIARO CHE PER DIMOSTRARE CHE f É LOCALMENTE LIPSCHITZIANA BASTA DIMOSTRARE CHE LO SONO TUTTE LE SUE COMPONENTI.

SAPENDO CHE f É CONTINUA (E QUINDI LO SONO TUTTE LE COMPONENTI) E CHE $[\alpha,\beta] \times \overline{B}_r(\overline{x}) \subset \Omega$ É CHIUSO E LIMITATO, PER WEIERSTRASS ESISTE:

$$L_j := \max \left\{ \| \nabla f_j(t,x) \|, t \in [\alpha,\beta], x \in \overline{B}_r(\overline{x}) \right\}$$

INOLTRE, APPLICANDO IL TEOREMA DI LAGRANGE SAPPIAMO CHE ESISTE z IN $[x,y]$ TALE CHE:

$$| f_j(t,x) - f_j(t,y) | = | \langle \nabla f_j(t,z) \cdot (x-y) \rangle | \leq L_j \| x - y \|$$

L'ULTIMA DISUGUAGLIANZA É GIUSTIFICATA DAL FATTO CHE L_j É IL MAX DI ... PER COSTRUZIONE. □

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÁ LOCALE

SIANO $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA E $(t_0, y_0) \in \Omega$.

SUPPONIAMO CHE ESISTANO:

- $a, b > 0$: $T := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(y_0) \subset \Omega$
- f LIPSCHITZIANA IN T RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t CON COSTANTE L

PONIAMO $M := \max_{(t,x) \in T} \| f(t,x) \|_{\mathbb{R}^n}$

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \qquad (M = 0 \Rightarrow \varepsilon_0 = a)$$

ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

NOTO CHE $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

AMMETTE UNA SOLUZIONE y DEFINITA IN $I_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ CON $\delta < \frac{1}{L}$ E $\delta \leq \varepsilon_0$.

TALE SOLUZIONE É UNICA NEL SENSO CHE SE UNA FUNZIONE z RISOLVE IL PROBLEMA DI CAUCHY ALLORA ESSA COINCIDE CON y IN $J \cap I_\delta$, DOVE J É L'INTERVALLO IN CUI z É SOLUZIONE.

dim: ESISTENZA

PER SEMPLICITÁ CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI $n = 1$. COSTRUIAMO UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $y_n(t) : I_\delta \to \overline{B}_r(\overline{y}_0)$

$$y_0(t) := y_0 \quad \text{COSTANTE}$$

$$y_1(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\, ds$$

$$y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds$$

TALI FUNZIONI SONO BEN POSTE (CIOÉ DEFINITE), NEL SENSO CHE:

$$|y_{n+1}(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds \right| \leq M |t - t_0| \leq M\delta \leq M\varepsilon_0 = M\frac{b}{M} = b$$

- SUCCESSIVAMENTE RAPPRESENTA L'ALTEZZA DEL SOTTOGRAFICO E M É IL VALORE PIÚ ALTO CHE RAGGIUNGE LA FUNZIONE
- SIAMO IN I_δ CIOÉ $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

PER COME É DEFINITA LA SUCCESSIONE POSSIAMO SCRIVERE:

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))\, ds \right|$$

RICORDANDO CHE $\|y_n - y_{n-1}\|_\infty = \max_{s \in I_\delta} |y_n(s) - y_{n-1}(s)|$ E USANDO LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE PER INTEGRALI E LA LIPSCHITZIANITÁ DI f AVREMO:

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))\, ds \right| \leq$$

LIPSCHITZIANITÁ $\Rightarrow$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |L\, y_n(s)| - |L\, y_{n-1}(s)| \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\, |y_n(s) - y_{n-1}(s)| \right| \leq$$

PRENDIAMO IL MAX DEL VALORE ASSOLUTO E PORTIAMO FUORI L

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|y_n - y_{n-1}\|_\infty\, ds \right| =$$

$$= L \|y_n - y_{n-1}\|_\infty \int_{t_0}^{t} ds =$$

$$= L \|y_n - y_{n-1}\|_\infty (t - t_0) \leq$$

COME PRIMA $(t - t_0) \leq \delta$

$$\leq L\delta \|y_n - y_{n-1}\|_\infty \qquad [1]$$

POICHÉ NON VIENE POSTO UN LIMITE INFERIORE A δ POSSIAMO PORRE $q = L\delta < 1$ POICHÉ LA DISUGUAGLIANZA CHE ABBIAMO OTTENUTO VALE PER OGNI $t \in I_\delta$ VALE ANCHE PER IL $\sup I_\delta$ E QUINDI:

$$\sup_{I_\delta} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq q \|y_n - y_{n-1}\|_\infty$$

$$\|y_{n+1} - y_n\|_\infty \leq q \|y_n - y_{n-1}\|_\infty \qquad \forall n \geq 1$$

ITERANDO AVREMO:

$$\|y_{n+1} - y_n\|_\infty \leq q \|y_n - y_{n-1}\| \leq q\left(q \|y_{n-1} - y_{n-2}\|\right) \leq q\left[q\left(q \|y_{n-2} - y_{n-3}\|\right)\right] \leq \dots \leq q^n \|y_1 - y_2\|_\infty$$

Vittorio Alzetta

Vittorio Alzetta

ESSENDO $q < 1$ LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \| y_1 - y_0 \|_\infty$ È CONVERGENTE, QUINDI LA SERIE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_{n+1} - y_n)$$

CONVERGE TOTALMENTE. MA QUINDI CONVERGE UNIFORMEMENTE IN I_δ.

POSSIAMO CHIEDERCI OM A COSA CONVERGA?

LA SOMMA PARZIALE S_n VALE:

$$S_n = y_{n+1} - y_1$$

DATO CHE TUTTI I TERMINI IN MEZZO SI SEMPLIFICANO, DEFINIAMO y COME LA FUNZIONE A CUI CONVERGE LA SOMMA PARZIALE:

$$y_{n+1} - y_1 \to S$$

$$y_{n+1} \to S + y_1$$

$$y := S + y_1$$

E DAL FATTO CHE y_{n+1} CONVERGE UNIFORMEMENTE A y IN I_δ SAPPIAMO CHE y DEVE ESSERE CONTINUA (RICORDATI CHE ALTRIMENTI SI AVREBBE CONVERGENZA PUNTUALE SOLO IN ALCUNI PUNTI) E DUNQUE POSSIAMO PASSARE AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE:

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds$$

TESI

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

E QUINDI y RISOLVE IL PROBLEMA DI CAUCHY (PER IL LEMMA DI QUALCHE PAGINA FA)

UNICITÀ:

SIANO y E z SOLUZIONI DEL PROBLEMA DI CAUCHY DIVERSE, QUINDI:

$$\| y - z \|_\infty \neq 0$$

RAGIONANDO CON LE DISUGUAGLIANZE [1] AVREMO:

$$|y(t) - z(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s))\, ds \right| \leq$$

LIPSCHITZIANITÀ $\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\, |y(s) - z(s)|\, ds \right| \leq$

$$\leq L\, \delta\, \| y - z \|_\infty$$

MA ABBIAMO APPENA TROVATO UN PARADOSSO, INFATTI PASSANDO AL SUP E PONENDO DI NUOVO $L\delta < 1$ AVREMO:

$$\| y - z \|_\infty \leq L\delta \| y - z \|_\infty$$

POSSO DIVIDERE PERCHÉ È $\neq 0$ $\longrightarrow$ $\dfrac{\| y - z \|_\infty}{\| y - z \|_\infty} \leq L\delta < 1$

$$1 < 1$$

□

LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA CI DICE COME OTTENERE UNA SOLUZIONE LOCALE MEDIANTE APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE, CI BASTERÀ INFATTI SPINGERCI AVANTI NELLA DETERMINAZIONE DEI TERMINI DELLA SUCCESSIONE CHE ABBIAMO DEFINITO ALL'INIZIO.

Vittorio Alzetta

COROLLARIO

SIA $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ APERTO, CON $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$.

DAL TEOREMA APPENA DIMOSTRATO AVREMO:

- f CONTINUA IN Ω E LOCALMENTE LIPSCHITZIANA IN Ω RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t. $\Rightarrow$ PER OGNI $(t_0, y_0) \in \Omega$ IL PROBLEMA DI CAUCHY HA UN UNICA SOLUZIONE (y, J) DEFINITA IN UN OPPORTUNO INTORNO J DI t_0.
- f DI CLASSE C^1 IN Ω $\Rightarrow$ (CONDIZIONI SUFFICIENTI DI LOCALE LIPSCHITZIANITÀ) PER OGNI $(t_0, y_0) \in \Omega$ IL PROBLEMA DI CAUCHY HA UN UNICA SOLUZIONE (y, J) CON J OPPORTUNO INTORNO DI t_0.

OSSERVAZIONE:

PRENDIAMO UNA EDO DI ORDINE 1 IN FORMA NORMALE:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

SIANO y E z DUE SOLUZIONI DELLA EDO I CUI INSIEMI DI DEFINIZIONE CONDIVIDONO UN INTERVALLO I. EBBENE IL TEOREMA APPENA DIMOSTRATO CI DICE CHE NELL'INTERVALLO I LE FUNZIONI y E z O COINCIDONO O NON SI INTERSECANO (PERCHÉ SE SI INTERSECASSERO POTREMMO DEFINIRE IL PROBLEMA DI CAUCHY CON DATO INIZIALE IL PUNTO DI INTERSEZIONE, E PER L'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE y E z NON POTREBBERO SODDISFARE LO STESSO DATO INIZIALE E RISOLVERE LA EDO ESSENDO DIVERSE).

EDO A VARIABILI SEPARABILI E TEUL

CONSIDERIAMO UNA EDO DI ORDINE 1 A VARIABILI SEPARABILI:

$$y' = g(t) \cdot h(y) =: f(t, y)$$

AVREMO CHE:

- $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{dom}(h)$,
- g CONTINUA (PERCHÉ NON C^1?), h C^1 $\Rightarrow$ f DI CLASSE C^1 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ f LOC. LIPSCHITZIANA $\Rightarrow$ TEUL APPLICABILE NEI PUNTI INTERNI (LE IPOTESI PREVEDONO CHE SI LAVORI IN UN INSIEME CHIUSO)
- SI È GIÀ NOTO CHE $y(t) \equiv \bar{y}$ CON $h(\bar{y}) = 0$ È UNA SOLUZIONE COSTANTE
- NEL CASO DI $h(\bar{y}) \neq 0$ POTREMO PROCEDERE COME SEGUE PER TROVARE LE SOLUZIONI NON COSTANTI:

1) RICORDO GLI INTEGRALI CHE AVEVAMO TROVATO NEL PARAGRAFO SULLE EDO A VARIABILI SEPARABILI:

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{h(u)} \quad \overset{u = y(s)}{=} \quad \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

2) TROVO H PRIMITIVA DI $\frac{1}{h}$ E G PRIMITIVA DI g

3) DETERMINO L'INVERSA FUNZIONALE (FUNZIONE INVERSA) DI H E LA CHIAMO H^{-1}, AVREMO:

$$H(y(s)) = G(s) + c$$
$$H^{-1}\big(H(y(s))\big) = H^{-1}(G(s) + c)$$
$$y_c(s) = H^{-1}(G(s) + c)$$

4) OTTENUTA LA FAMIGLIA DI SOLUZIONI AL VARIARE DI c IN $\mathbb{R}$ (CON LE OPPORTUNE RESTRIZIONI IMPOSTE IN 1) E 2)) POSSIAMO AFFERMARE PER IL TEUL CHE PER c DIVERSI LE SOLUZIONI y_c NON SI INTERSECANO. INFATTI SE SI INTERSECASSERO ALLORA SAREBBERO COINCIDENTI (TEUL) MA AVENDO c DIVERSI SICURAMENTE SONO DIVERSE IN UN PUNTO

Vittorio Alzetta

LEMMA DI INCOLLAMENTO

SIA $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA E (φ, I), (ψ, J) SOLUZIONI DELLA EDO:

$$y' = f(t,y) \qquad [1]$$

CON $I, J \subset \mathbb{R}$ INTERVALLI ADIACENTI TALI CHE $\sup I = \inf J := \alpha$.

SE VALGONO LE SEGUENTI CONDIZIONI:

- $\exists \lim_{t \to \alpha^-} \varphi(t) = \lim_{t \to \alpha^+} \psi(t) := v \quad (\in \mathbb{R}^n)$
- $(\alpha, v) \in \Omega$

ALLORA LA FUNZIONE $\eta : I \cup J \cup \{\alpha\} \to \mathbb{R}^n$ DEFINITA COME:

$$\eta(t) := \begin{cases} \varphi(t) & t \in I \setminus \{\alpha\} \\ v & t = \alpha \\ \psi(t) & t \in J \setminus \{\alpha\} \end{cases}$$

È SOLUZIONE DELLA EDO [1]. CHIAMEREMO η LA GIUSTAPPOSIZIONE DI φ E ψ.

dim:

η È CONTINUA PER COSTRUZIONE (IL LIMITE DESTRO E SINISTRO IN t COINCIDONO).

η È DERIVABILE PERCHÉ:

$$\lim_{t \to \alpha^-} \eta'(t) = \lim_{t \to \alpha^-} \varphi'(t) = \lim_{t \to \alpha^-} f(t, \varphi(t)) = f(t, v)$$

$$\lim_{t \to \alpha^+} \eta'(t) = \lim_{t \to \alpha^+} \psi'(t) = \lim_{t \to \alpha^+} f(t, \psi(t)) = f(t, v)$$

DA CUI $\eta'(\alpha) = f(\alpha, v) = f(\alpha, \eta(\alpha))$ E DUNQUE η RISOLVE ANCHE LA EDO [1]

□

PROLUNGAMENTI E SOLUZIONI MASSIMALI

SIANO $\Omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ E $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

SIA $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ SOLUZIONE DELLA EDO $y' = f(t,y)$.

DIREMO CHE LA FUNZIONE $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ È UN PROLUNGAMENTO DI φ SE:

- ψ È SOLUZIONE DELLA STESSA EDO
- $I \subset J$
- $\forall t \in I : \psi(t) = \varphi(t)$

DIREMO INOLTRE CHE UNA SOLUZIONE DELLA EDO È MASSIMALE SE NON AMMETTE PROLUNGAMENTO.

NEL PRECEDENTE PARAGRAFO η È UN PROLUNGAMENTO SIA DI φ SIA DI ψ.

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA PROLUNGABILITÀ

SIANO $\Omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ E $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA IN Ω.

SIA $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ SOLUZIONE DELLA EDO $y' = f(t,y)$.

PONIAMO $\tau := \sup I$ E SUPPONIAMO CHE:

- $\tau \in \mathbb{R}$
- $\exists \lim_{t \to \tau^-} \varphi(t) =: \xi \in \mathbb{R}^n$, CON $(\tau, \xi) \in \operatorname{int}(\Omega)$ (così possiamo applicare Peano)

ALLORA ESISTE $T > \tau$ TALE CHE φ AMMETTE (NON È DETTO CHE ESISTA) UN PROLUNGAMENTO DESTRO IN $I \cup [\tau, T]$

dim:

CONSIDERIAMO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$

Vittorio Alzetta

TALE PROBLEMA AMMETTE, PER IL TEOREMA DI PEANO, UNA SOLUZIONE CHE CHIAMEREMO ψ IN UN OPPORTUNO INTERVALLO $[\tau-\delta, \tau+\delta]$. CHIAMIAMO $\tau+\delta := T$ E ABBIAMO OTTENUTO UNA FUNZIONE ψ CHE É SOLUZIONE DEL PROBLEMA IN $[\tau, T]$, DUNQUE PUÓ ESSERE UGUAGLIATA A φ FORNENDO UN SUO PROLUNGAMENTO. □

PER IL PROLUNGAMENTO A SINISTRA SI FA LA STESSA COSA.

COROLLARIO

SIA $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA IN Ω.

SIA φ UNA SOLUZIONE MASSIMALE (NON AMMETTE PROLUNGAMENTI) DELLA EDO $y' = f(t,y)$.

SE $\tau \in \mathbb{R}$ SI VERIFICA UNO ED UN SOLO DEI SEGUENTI CASI:

- $\exists \lim_{t\to\tau} \varphi(t) = \xi \left(\in \mathbb{R}^n\right)$ MA $(\tau, \xi) \in \partial\Omega$ ($\Rightarrow$ COSÍ NON C'É PROLUNGAMENTO)
- $\exists \lim_{t\to\tau} \varphi(t)$ @ MA ALMENO UNA COMPONENTE DIVERGE ($\Rightarrow$ COSÍ NON C'É PROLUNGAMENTO)
- $\nexists \lim_{t\to\tau} \varphi(t)$ ($\Rightarrow$ COSÍ NON C'É PROLUNGAMENTO)

SI OSSERVI CHE ANCHE SE NON VALE NESSUNA DELLE 3 CONDIZIONI ALLORA $\tau \notin \mathbb{R}$ E L'INTERVALLO DI DEFINIZIONE DELLA SOLUZIONE MASSIMALE É ILLIMITATO.

ESISTENZA DEL PROLUNGAMENTO MASSIMALE

SIA $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA IN Ω E LOCALMENTE LIPSCHITZIANA IN Ω RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t E CONSIDERIAMO L'EDO:

$$y' = f(t,y)$$

1) SE 2 SOLUZIONI DELLA EDO HANNO INTERVALLI DI DEFINIZIONE NON DISGIUNTI E COINCIDONO IN UN PUNTO ALLORA ESSE COINCIDONO IN TUTTI I PUNTI DELL'INTERSEZIONE DEGLI INTERVALLI DI DEFINIZIONE
2) OGNI SOLUZIONE DELLA EDO AMMETTE UN UNICO PROLUNGAMENTO MASSIMALE

SUBLINEARITÁ

SIA I UN INTERVALLO E SIA $f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

DICIAMO CHE f É SUBLINEARE IN $I \times \mathbb{R}^n$ SE PER OGNI INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $K \subseteq I$ ESISTONO $p, q > 0$ TALI CHE:

$$\| f(t,x) \|_{\mathbb{R}^n} \leq p + q \|x\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall t \in K, x \in \mathbb{R}^n$$

CONDIZIONI SUFFICIENTI SUBLINEARITÁ

1) $f: K \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ LIMITATA $\forall K \subseteq I \Rightarrow f$ É SUBLINEARE
2) f LIPSCHITZIANA RISPETTO A x UNIFORMEMENTE IN t E CONTINUA $\Rightarrow f$ É SUBLINEARE
3) $\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq q$ $\quad \forall t \in K, \forall K \subseteq I \Rightarrow f$ É SUBLINEARE
   $\quad\quad\quad

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

SIA $n \geq 1$ E $I \subset \mathbb{R}$ UN INTERVALLO, CONSIDERIAMO LE FUNZIONI:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$$

CHIAMEREMO EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE LA SEGUENTE EQUAZIONE:

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t) z^{(n-1)} + \dots + a_0(t) z = b(t)$$

IN PARTICOLARE LA CHIAMEREMO:

- OMOGENEA SE LA FUNZIONE $b \equiv 0$
- COMPLETA (NON OMOGENEA) ALTRIMENTI

É POSSIBILE TRASFORMARE UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE NON OMOGENEA IN UNA OMOGENEA SOSTITUENDO IL TERMINE NOTO CON LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA, IN TAL CASO AVREMO OTTENUTO L'OMOGENEA ASSOCIATA.

CHIAMEREMO INOLTRE INTEGRALE GENERALE L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE, E INTEGRALE PARTICOLARE UNA SINGOLA SOLUZIONE.

SONO ESEMPI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI I SEGUENTI:

- $z^{IV} + z'' + 50 t z' + \ln t \, z = 0$
- $z^{X} + t z^{IX} + e^{t - t^2} z = t^{-2}$
- $z^{VIII} + t^2 z' = \sin(t)$

DA EL A SISTEMA DI EDO

OSSERVIAMO ORA COME UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE (EL) POSSA ESSERE TRASFORMATA IN UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE. CONSIDERIAMO LA EL:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) y = b(t)$$

E IL SISTEMA DI EDO:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ \vdots \\ y_n' = b(t) - a_{n-1}(t) y_n' - \dots - a_0(t) y_1 \end{cases}$$

SE IL VETTORE $y = (y_1, \dots, y_n)$ RISOLVE IL SISTEMA ALLORA LA PRIMA COMPONENTE y_1 RISOLVE LA EL.

SPIEGAZIONE: SEGUENDO LA CATENA DI UGUAGLIANZE SI OSSERVA CHE $y_2 = y_1'$, $y_3 = y_1''$, $y_4 = y_1'''$, $\dots$. QUESTO SIGNIFICA CHE $y_h = y_1^{(h-1)}$ E $y_n' = y_1^{(n)}$, DUNQUE CON QUESTE SOSTITUZIONI L'ULTIMA EQUAZIONE DEL SISTEMA DIVENTA ESATTAMENTE LA EL.

SE z RISOLVE LA EL ALLORA IL VETTORE $y = (z, z', z'', \dots, z^{(n-1)})$ RISOLVE IL SISTEMA (LA SPIEGAZIONE É IDENTICA ALLA PRECEDENTE LETTA AL CONTRARIO).

EL E CONDIZIONI INIZIALI

PRENDIAMO $t_0 \in I$ E $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ E ASSOCIAMO ALLA EL LE n CONDIZIONI INIZIALI:

$$z(t_0) = x_1, \quad z'(t_0) = x_2, \dots, z^{(n-1)}(t_0) = x_n$$

OTTENIAMO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_{n-1}(t) z^{(n-1)} + \dots + a_0(t) z = b(t) \\ z(t_0) = x_1, \ z'(t_0) = x_2, \dots, z^{(n-1)}(t_0) = x_n \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO LA PRIMA EQUAZIONE PUÓ ESSERE TRASFORMATA IN UN SISTEMA DI

Vittorio Alzetta

Vittorio Alzetta

EDO ESATTAMENTE COME NEL PARAGRAFO PRECEDENTE.

TEOREMA

SIANO $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ FUNZIONI CONTINUE, VALGONO:

1) SE z RISOLVE L'EL ALLORA É SOLUZIONE GLOBALE DEL PROB. DI CAUCHY $\Leftrightarrow$ E $z \in C^n(I)$
2) PER OGNI $t_0 \in I$ E $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ IL PROBLEMA DI CAUCHY AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE GLOBALE.

dim 2: ABBIAMO VISTO CHE IL PROBLEMA DI CAUCHY É EQUIVALENTE AL SISTEMA DI EDO. QUEST'ULTIMO SODDISFA LE IPOTESI DEL TEUC, INFATTI:

- f (É TUTTO QUELLO CHE SI TROVA A DX DELL'UGUALE NELL'ULTIMA EQUAZIONE DEL SISTEMA) É CONTINUA POICHÉ SOMMA E PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE.
- OGNI TERMINE CHE COMPARE A DX DELL'UGUALE NELL'ULTIMA EQ. DEL SISTEMA É DERIVABILE, PERTANTO f É DI CLASSE C^1 E INOLTRE SONO SODDISFATTE LE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA LOCALE LIPSCHITZIANITÁ.
- POICHÉ f É CONTINUA E LOCALMENTE LIPSCHITZIANA NEL DOMINIO RISPETTO A V X UNIFORMEMENTE IN t. ALLORA SARÁ ANCHE SUBLINEARE.

PERTANTO SE z RISOLVE L'EL ALLORA SARÁ SOLUZIONE GLOBALE PER IL TEUC E SARÁ DI CLASSE $C^n(I)$ IN QUANTO ESISTONO LE DERIVATE FINO ALL'ORDINE n E POICHÉ $z^{(n)}$ É UNA FUNZIONE CONTINUA (SOMMA E PRODOTTO DI CONTINUE) A CASCATA LO SARANNO TUTTE LE DERIVATE DI ORDINE INFERIORE PROVANDO LA TESI □

OPERATORE ASSOCIATO ALL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

SIA I UN INTERVALLO E $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ CONTINUE. DEFINIAMO L'APPLICAZIONE LINEARE L COME:

$$L : C^n(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$$

$$u \longmapsto u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_0 u$$

LO CHIAMEREMO OPERATORE ASSOCIATO ALL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE E VARRANNO LE DUE SEGUENTI PROPRIETÁ:

- L É LINEARE E QUINDI:

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v) \quad \forall u, v \in C^n(I, \mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- UNA FUNZIONE $\varphi \in C^n(I, \mathbb{R})$ RISOLVE LA SEGUENTE EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t) z^{(n-1)} + \dots + a_0(t) z = b(t)$$

SE E SOLO SE $L(\varphi)(t) = b(t) \quad \forall t \in I$

(L: OPERATORE ASSOCIATO ALLA PRECEDENTE EQUAZIONE DIFFERENZIALE)

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

DAL TEOREMA PRECEDENTE SE φ_1 E φ_2 SONO SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI CON COEFFICIENTI $a_{n-1}, \dots, a_0$ E TERMINI NOTI b_1, b_2 ALLORA PRESI $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ AVREMO CHE:

$\underbrace{\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2}_{=: x}$ É SOLUZIONE DI $x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_0(t) = \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t)$

Vittorio Alzetta

TEOREMA SULLA STRUTTURA DELL'INTEGRALE GENERALE

SIA $I \subseteq \mathbb{R}$ E $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in C(I, \mathbb{R})$.

SIANO V L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE NON OMOGENEA:

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t)\, z^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, z = b(t) \qquad [1]$$

E V_0 L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA:

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t)\, z^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, z = 0 \qquad [2]$$

ALLORA VALGONO I SEGUENTI RISULTATI:

- V E V_0 SONO SOTTOINSIEMI DI $C^n(I, \mathbb{R})$
- V_0 É UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI C^n DI DIMENSIONE n
- CHIAMATO $\bar{\varphi}$ UN QUALSIASI INTEGRALE PARTICOLARE DELLA [1] SI HA CHE $V = V_0 + \bar{\varphi}$

dim A: CHIARAMENTE SE UNA FUNZIONE É SOLUZIONE DELLA [1] O DELLA [2] ESSENDO DERIVABILE n VOLTE (NON PER FORZA L'n-ESIMA DERIVATA SARÁ CONTINUA → IN REALTÀ LO É, É SOMMA E DIFF. DI CONTINUE) AVRÁ LE DERIVATE DALL'ORDINE 1 ALL'ORDINE $n-1$ CONTINUE, INOLTRE SARÁ CONTINUA LEI STESSA, PERTANTO APPARTERRÁ A $C^n(I, \mathbb{R})$.

C: DAL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE SAPPIAMO CHE PRESA UNA SOLUZIONE φ_1 DELLA [2] E $\bar{\varphi}$ CHE PER IPOTESI É SOLUZIONE DELLA [1] POTREMO PRENDERE $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\alpha \varphi_1 + \beta \bar{\varphi} =: X \qquad X^{(n)} + a_{n-1}(t) X^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, z = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot b(t)$$

BASTERÁ QUINDI PRENDERE $\beta = 1$ PER DIMOSTRARE CHE UNA QUALSIASI SOLUZIONE DELLA [2] A CUI VIENE SOMMATA $\bar{\varphi}$ DIVENTA AUTOMATICAMENTE SOLUZIONE DELLA [1]

B: L É UN'APPLICAZIONE LINEARE E PERTANTO V_0 É SPAZIO VETTORIALE E $V_0 = \ker(L)$.

DIMOSTRIAMO CHE LA DIMENSIONE DI QUESTO SPAZIO VETTORIALE É n NEL CASO IN CUI QUEST'ULTIMO SIA PARI A 2.

IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE SARÁ:

$$z'' + a_1(t)\, z + a_0(t)\, z = 0 \qquad [1]$$

FISSATO t_0 IN I SIANO φ_1 E φ_2 SOLUZIONI DELLA [1] CON DATI INIZIALI

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0) = 1 \\ \varphi_1'(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2(t_0) = 0 \\ \varphi_2'(t_0) = 1 \end{cases}$$

DA CUI É FACILE VEDERE COME φ_1 E φ_2 SIANO LINEARMENTE INDIPENDENTI, INFATTI IN t_0 $c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 = 0$ SE E SOLO SE $c_1 = c_2 = 0$. É CHIARO CHE $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \subset V_0$ E PER VEDERE CHE I 2 SPAZI COINCIDONO PRENDIAMO $\varphi \in V_0$, POI PONIAMO

$$x_1 := \varphi(t_0) \qquad x_2 := \varphi'(t_0)$$

A QUESTO PUNTO NOTIAMO CHE IL PROBLEMA DI CAUCHY DI EQUAZIONE [1] E DATI INIZIALI $z(t_0) = x_1$, $z'(t_0) = x_2$ AMMETTE COME SOLUZIONI SIA φ SIA $x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2$, INFATTI

$$z(t_0) = x_1 \varphi_1(t_0) + x_2 \varphi_2(t_0) = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 = x_1 \qquad z(t_0) = \varphi(t_0) = x_1$$
$$z'(t_0) = x_1 \varphi_1'(t_0) + x_2 \varphi_2'(t_0) = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 = x_2 \qquad z'(t_0) = \varphi'(t_0) = x_2$$

E POICHÉ PER IL TEUL/b DEV'ESSERCI UNA SOLUZIONE VARRÁ $\varphi = x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2$ E QUINDI LA SOLUZIONE GENERICA $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$.

□

Vittorio Alzetta

CHIAMIAMO SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA L'INSIEME COSTITUITO DA n SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

COROLLARIO TEOREMA DI STRUTTURA

SIA $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ UN SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE OMOGENEA. ALLORA IL PUNTO 3 DEL TEOREMA DI STRUTTURA PUÓ ESSERE VISTO COME

$$V_0 = \{ c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \}$$

$$V = \{ c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n + \bar{\varphi} : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \} = V_0 + \bar{\varphi}$$

IN SOSTANZA, IL COROLLARIO CI STA DICENDO CHE PER TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI UN EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE BASTA

- TROVARE IL SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI DELL'OMOGENEA ASSOCIATA
- TROVARE 1 SOLA SOLUZIONE DELLA NON OMOGENEA

EQUAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE OMOGENEA A COEFFICIENTI COSTANTI

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_1 z' + a_0 z = 0 \qquad [1]$$

DOVE $a_j \in \mathbb{R}$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

POICHÉ L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y' + a y = 0$ É RISOLTA DA $t \mapsto e^{-at}$ CI CHIEDIAMO SE LA [1] SIA RISOLTA DA FUNZIONI DEL TIPO $e^{\lambda t}$ PER QUALCHE λ.

ANZITUTTO SCRIVIAMOCI $L(e^{\lambda t})$ DOVE L É L'OPERATORE ASSOCIATO ALLA [1]

$$L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \left(\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \right) \qquad [2]$$

EBBENE POICHÉ $e^{\lambda t}$ É SEMPRE DIVERSO DA ZERO, AFFINCHÉ $e^{\lambda t}$ RISOLVA LA [1] IL SECONDO FATTORE DELLA [2] DEVE VALERE ZERO. IN ALTRE PAROLE λ DEVE ESSERE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \qquad [3]$$

O, SIMILMENTE, λ DEVE ESSERE RADICE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO SEGUENTE

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \qquad [4]$$

IN PARTICOLARE SI PUÓ DIMOSTRARE CHE SE IL POLINOMIO [4] AMMETTE $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ SOLUZIONI REALI E DISTINTE ALLORA LE FUNZIONI ESPONENZIALI $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI. PERTANTO SE $P(\lambda)$ AMMETTE n SOLUZIONI REALI DISTINTE AVREMO UN SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI.

MA QUESTE SOLUZIONI POSSONO ESSERE ANCHE COMPLESSE, O POSSONO ESSERE DOPPIE O TRIPLE (CIOÉ NON DISTINTE).

SUPPONIAMO CHE λ SIA UN NUMERO COMPLESSO, ESPRIMIAMOLO QUINDI IN NOTAZIONE ALGEBRICA COME

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

PERTANTO LA FUNZIONE $t \mapsto e^{\lambda t}$ É UNA FUNZIONE IN $\mathbb{C}$, E QUINDI A VALORI VETTORIALI. SVOLGENDO I CALCOLI AVREMO

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} \qquad [5]$$

DA CUI, TENENDO PRESENTI LE PROPRIETÁ DEI NUMERI COMPLESSI SCRITTI IN FORMA POLARE (O ESPONENZIALE) AVREMO

Vittorio Alzetta

$$e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right) \qquad [6]$$

SVOLGENDO LA MOLTIPLICAZIONE CI RITROVIAMO CON UN NUMERO COMPLESSO IN FORMA ALGEBRICA, RAPPRESENTANDOLO QUINDI CON LE SUE COMPONENTI AVREMO

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{pmatrix} \qquad [7]$$

VOLENDO ORA DERIVARE QUESTA FUNZIONE, PER CAPIRE LA FORMA DELLA [2] NEL CASO DI RADICI COMPLESSE, CONVIENE DERIVARE LA [6]

$$\frac{d}{dt}\, e^{\lambda t} = \alpha e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\sin\beta t\right) + e^{\alpha t}\left(-\beta\sin\beta t + i\beta\cos\beta t\right)$$

$$= e^{\alpha t}\left(\left(\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t\right) + i\left(\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t\right)\right)$$

$$= (\alpha + i\beta)\, e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\sin\beta t\right) = (\alpha + j\beta)\, e^{\alpha t} e^{i\beta t}$$

$$= \lambda\, e^{(\alpha+i\beta)t} = \lambda e^{\lambda t}$$

DA CUI, ITERANDO, OTTENIAMO LA k-ESIMA DERIVATA

$$\frac{d^{(k)}}{dt^k}\cdot e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}$$

SE QUINDI $P(\lambda)$ HA 2 RADICI COMPLESSE ESSE SARANNO DELLA FORMA

$$\lambda_s = \alpha + i\beta \qquad \overline{\lambda_s} = \alpha - i\beta \qquad [8]$$

LE SOLUZIONI DELLA [3] SARANNO QUINDI LE SEGUENTI, SEGUENDO I RAGIONAMENTI FATTI PER ARRIVARE ALLA [6]

$$z_s(x) = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) \qquad [9]$$

$$\overline{z_s}(x) = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right) \qquad [10]$$

MA QUINDI ANCHE LE SEGUENTI FUNZIONI, OTTENUTE NARRANDO LA [9] E LA [10], SONO SOLUZIONI DELLA [6] ●

$$\frac{z_s(x) + \overline{z_s}(x)}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad [11]$$

$$-i\cdot\frac{z_s(x) - \overline{z_s}(x)}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad [12]$$

IL FATTO CHE LA [11] E LA [12] STANO DA $\mathbb{R}$ IN $\mathbb{R}$ CI PERMETTE DI AFFERMARE CHE SE LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO SONO DISTINTE (REALI O COMPLESSE) ALLORA ABBIAMO TROVATO UN SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI.

TEOREMA

CONSIDERIAMO DI NUOVO IL POLINOMIO CARATTERISTICO DELLA [1], CHE RIPORTO DI SEGUITO

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

HA RADICI REALI

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$$

CON MOLTEPLICITÀ m_j DELLA RADICE λ_j. HA ANCHE RADICI COMPLESSE

$$(\alpha_1 \pm i\beta_1), \dots, (\alpha_h \pm i\beta_h)$$

CON MOLTEPLICITÀ μ_ν DELLA RADICE $\alpha_\nu \pm i\beta_\nu$.

Vittorio Alzetta

POSTO n PARI A

$$\sum_{j=1}^{k} m_j + 2\sum_{\nu=1}^{h} \mu_\nu = n$$

CIOÉ, IN SOSTANZA, LA SOMMA DELLE MOLTEPLICITÁ DELLE RADICI REALI E DI QUELLE COMPLESSE (VANNO CONTATE 2 VOLTE).

ALLORA LE FUNZIONI

$$e^{\lambda_j t} \quad t e^{\lambda_j t} \quad \dots \quad t^{m_j-1} e^{\lambda_j t} \qquad \forall j = 1, \dots, k$$

$$e^{\alpha_\nu t}\cos\beta_\nu t \quad \dots \quad t^{\mu_\nu-1} e^{\alpha_\nu t}\cos\beta_\nu t$$

$$e^{\alpha_\nu t}\sin\beta_\nu t \quad \dots \quad t^{\mu_\nu-1} e^{\alpha_\nu t}\sin\beta_\nu t \qquad \forall \nu = 1, \dots, h$$

SONO n SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI DELLA [1] E NE FORMANO UN SISTEMA ~~DI~~ FONDAMENTALE DI SOLUZIONI.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI NON OMOGENEE

SI PRESENTANO ORA DUE METODI DA SFRUTTARE PER INDIVIDUARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE NON OMOGENEA. PER ADESSO ABBIAMO INFATTI VISTO SOLO METODI PER TROVARE SISTEMI FONDAMENTALI DI SOLUZIONI DI OMOGENEE.

I METODO: DI SOMIGLIANZA

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE NON OMOGENEA A COEFFICIENTI COSTANTI

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_1 z' + a_0 z = b(t) \qquad [1]$$

CON $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. SIA P IL POLINOMIO CARATTERISTICO DELL'EQUAZIONE DELLA [1]. SUPPONIAMO CHE

$$b(t) = e^{\lambda t} q(t) \qquad [2]$$

CON $\lambda \in \mathbb{R}$ E q POLINOMIO DI GRADO h. ALLORA ESISTE UNA SOLUZIONE DELLA [1] NELLA FORMA

$$\psi(t) = e^{\lambda t} \tilde{q}(t) t^m \qquad [3]$$

CON $\tilde{q}$ POLINOMIO DI GRADO h, λ RADICE DI P CON MOLTEPLICITÁ m.

SUPPONIAMO ORA CHE

$$b(t) = e^{\alpha t}\left(p(t)\cos(\beta t) + q(t)\sin(\beta t)\right) \qquad [4]$$

CON $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ E p, q POLINOMI DI GRADO h, k RISPETTIVAMENTE. ALLORA ESISTE UNA SOLUZIONE DELLA [1] NELLA FORMA

$$\psi(t) = e^{\alpha t}\left(\tilde{p}(t)\cos(\beta t) + \tilde{q}(t)\sin(\beta t)\right) t^m \qquad [5]$$

CON $\tilde{p}, \tilde{q}$ POLINOMI DI GRADO MINORE O UGUALE A $\max\{h, k\}$, $\lambda\,(:=\alpha+i\beta)$ RADICE DI P CON MOLTEPLICITÁ m.

II METODO: DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

IL SECONDO METODO CI PERMETTE DI RISOLVERE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI NON OMOGENEE QUALSIASI, CIOÉ NON NECESSARIAMENTE A COEFFICIENTI COSTANTI O CON TERMINE NOTO DI UN PARTICOLARE TIPO.

SIANO a, b FUNZIONI CONTINUE IN I E CONSIDERIAMO LA SEGUENTE EQUAZIONE LINEARE

Vittorio Alzetta

$$y' = a(t)\,y + b(t) \qquad [1]$$

CONOSCIAMO GIÁ LA SOLUZIONE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA, CIOÉ $c\varphi_1$. PER TROVARE LE SOLUZIONI DI QUELLA NON OMOGENEA PROVIAMO A CERCARNE NELLA FORMA

$$\psi(t) = \gamma(t)\,\varphi_1(t) \qquad [2]$$

DOVE NON ABBIAMO FATTO ALTRO CHE METTERE $\gamma(t)$ (FUNZIONE DA DETERMINARE) AL POSTO DI c. IMPONIAMO ORA CHE ψ SIA SOLUZIONE DELLA [1]

$$b(t) = \psi' - a(t)\psi = \gamma'\varphi_1 + \gamma\varphi_1' \mp a(t)\gamma\varphi_1 = \gamma'\varphi_1 + \gamma(\varphi_1' \mp a(t)\varphi_1)$$

ORA SI OSSERVI CHE L'OMOGENEA ASSOCIATA ALLA [1] É $y' - a(t)y = 0$ E φ_1 NE É SOLUZIONE, QUINDI $\varphi_1' - a(t)\varphi_1 = 0$, PERTANTO POSSIAMO CONTINUARE LA CATENA DI UGUAGLIANZE

$$b(t) = \gamma'\varphi_1 \qquad [3]$$

MA QUINDI γ É UNA PRIMITIVA DI b/φ_1 E PER IL TERZO PUNTO DEL TEOREMA DI STRUTTURA DELL'INTEGRALE GENERALE AVREMO CHE UN INTEGRALE GENERALE DELLA [1] É

$$c\varphi_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\varphi_1(s)}\,ds \qquad \forall c \in \mathbb{R} \qquad [4]$$

TEOREMA

SIANO $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ FUNZIONI CONTINUE. SIANO $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ UN SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI DELL'OMOGENEA ASSOCIATA A

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t)\,z^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\,z' + a_0(t)\,z = b(t) \qquad [1]$$

ALLORA ESISTE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELLA [1] NELLA FORMA

$$\psi = \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 + \dots + \gamma_n\varphi_n \qquad [2]$$

DOVE $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ SONO n FUNZIONI DA DETERMINARE IMPONENDO CHE ψ SIA SOLUZIONE DELLA [1].

Vittorio Alzetta

SERIE DI FOURIER

IN QUESTO CAPITOLO VOGLIAMO CAPIRE SE É POSSIBILE ESPRIMERE UNA QUALSIASI FUNZIONE $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T PERIODICA ($T = 2\pi$ PER SEMPLICITÀ) E QUINDI TALE CHE

$$f(x+T) = f(x) \qquad [1]$$

COME SOMMA DI FUNZIONI T PERIODICHE ELEMENTARI. CON FUNZIONI PERIODICHE ELEMENTARI SI INTENDONO LE FUNZIONI

$$\cos(kx) \qquad \sin(kx) \qquad k \in \mathbb{N}$$

E TUTTE LE LORO COMBINAZIONI LINEARI, PERTANTO LA DOMANDA INIZIALE PUÓ ESSERE RIASSUNTA NELLA RICERCA DI $a_0, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \qquad [2]$$

POLINOMIO TRIGONOMETRICO

CHIAMIAMO POLINOMIO TRIGONOMETRICO DI ORDINE n UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE FUNZIONI 1 (SI INTENDE LA FUNZIONE COSTANTE A 1) E $\cos kx$, $\sin kx$ CON $k \in \{1, \dots, n\}$. IN SOSTANZA SAREBBE

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \qquad [3]$$

DOVE $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ RAPPRESENTANO I COEFFICIENTI.

SIANO ORA DATE UNA SUCCESSIONE $(a_n)_{n\geq 0}$ E UN'ALTRA $(b_n)_{n\geq 1}$ POSSIAMO COSTRUIRE LA SEGUENTE SERIE DI FUNZIONI

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \qquad [4]$$

CHE CHIAMEREMO SERIE TRIGONOMETRICA DI COEFFICIENTI $(a_n)_{n\geq 0}$ E $(b_n)_{n\geq 1}$.

SE QUINDI LA SERIE $\sum a_n$ E LA SERIE $\sum b_n$ CONVERGONO ASSOLUTAMENTE ALLORA LA [4] CONVERGERÁ UNIFORMEMENTE.

LEMMA

DI SEGUITO ELENCHERÓ 5 PROPRIETÁ DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE UTILI A COMPRENDERE LA SUCCESSIVA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA CHE VEDREMO POI.

1- $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(vx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(vx)\,dx = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

2- $$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{FORMULE DI PROSTAFERESI}$$

3- $$\left.\begin{aligned} 2\cos(kx)\cos(mx) &= \cos[(k+m)x] + \cos[(k-m)x] \\ 2\sin(mx)\sin(kx) &= \cos[(k-m)x] - \cos[(k+m)x] \\ 2\sin(kx)\cos(mx) &= \sin[(k+m)x] + \sin[(k-m)x] \end{aligned}\right\} k,m \in \mathbb{N}$$

4- $$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin mx)(\cos kx)\,dx = 0$$

5- $$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)(\cos mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)(\sin mx)\,dx = \pi \cdot \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}$$

DIMOSTRERÓ ORA LE ULTIME 2 PROPRIETÁ, PERTANTO

dim 4: IL COSENO É PAR E IL SENO É DISPARI, QUINDI IL LORO PRODOTTO É DISPARI E L'INTEGRALE IN UN INTERVALLO SIMMETRICO SARÁ NULLO.

Vittorio Alzetta

dim 5: DAL LEMMA 3 POSSIAMO RISCRIVERE L'INTEGRALE COME

$$2\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)(\cos mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left[(k+m)x\right]dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left[(k-m)x\right]dx$$

DOVE IL PRIMO TERMINE SI ANNULLA PER IL PRIMO PUNTO DEL LEMMA, IL SECONDO TERMINE NEL CASO IN CUI $k-m \neq 0$ SARÀ PARI A 0 MENTRE SE $k-m=0$ AVREMO

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left[(k-m)x\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi$$

DA CUI, DIVIDENDO PER 2 OTTENIAMO IL QUINTO PUNTO DEL LEMMA.

TEOREMA

SIANO $(a_k)_{k\geq 0}$ E $(b_k)_{k\geq 1}$ DUE DATE SUCCESSIONI DI NUMERI REALI E SUPPONIAMO CHE LA SERIE DI FUNZIONI

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \qquad [1]$$

CONVERGA UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{R}$ (ESSENDO LE SOMME PARZIALI 2π-PERIODICHE BASTEREBBE IMPORRE LA CONVERGENZA UNIFORME SU $[-\pi, \pi]$). ALLORA LA FUNZIONE SOMMA

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \qquad [2]$$

È CONTINUA, 2π-PERIODICA E VALGONO LE RELAZIONI

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k\geq 0) \qquad [3]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k\geq 1) \qquad [4]$$

PRIMA DI PROCEDERE CON LA DIMOSTRAZIONE SI OSSERVI CHE

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(0\cdot x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad [5]$$

dim: OMETTEREMO DA QUI IN AVANTI IL SIMBOLO dx PER SEMPLICITÀ. PER LE IPOTESI FATTE AVREMO CHE $\forall x \in \mathbb{R}$ VALE LA [2] E QUINDI

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \qquad [6]$$

E POICHÉ CONVERGE UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{R}$ POSSIAMO CONCLUDERE CHE

- f É CONTINUA PERCHÉ LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI CONTINUE
- f É 2π-PERIODICA PERCHÉ LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI 2π-PERIODICHE

DIMOSTRIAMO ORA LA VALIDITÀ DELLE FORMULE OTTENUTE PER I COEFFICIENTI INIZIANDO DA a_m. SI OSSERVA CHE PER OGNI $m \geq 0$ VALE

$$f(x)\cdot\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(\cos kx)(\cos mx) + b_k(\sin kx)(\cos mx)\right) \qquad [7]$$

DOVE LA [7] É STATA OTTENUTA MOLTIPLICANDO PER $\cos mx$ LA [2]. SI HA ANCHE CONVERGENZA UNIFORME SU $[-\pi, \pi]$ E SI PUÓ APPLICARE IL TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE (TPLSSI) $\left(\int\sum = \sum\int\right)$. DOPO AVER INTEGRATO I MEMBRI DELLA [7] OTTENIAMO

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kx)(\cos mx) + b_k\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kx)(\cos mx)\right) \qquad [8]$$

PER IL QUARTO PUNTO DEL LEMMA L'ULTIMO INTEGRALE VALE 0. PERTANTO, RISCRIVENDO, AVREMO

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi}(\cos kx)(\cos mx) \qquad [9]$$

SE $\boxed{m=0}$ SI HA $\cos mx = 1$ E $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx = 0$ (PER IL PRIMO PUNTO DEL LEMMA). INVECE ESPLICITANDO QUESTE CONSIDERAZIONI

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + \sum_{k\geq 1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + 0 = \pi a_0 \qquad [10]$$

SE INVECE $\boxed{m \neq 0}$ ALLORA $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx = 0$ (PER IL PRIMO PUNTO DEL LEMMA), INOLTRE $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kx)(\cos mx) = \pi\cdot(0 \text{ se } k\neq m,\ 1 \text{ se } k=m)$ DAL QUINTO PUNTO DEL LEMMA. ESPLICITANDO DI NUOVO LE OSSERVAZIONI FATTE AVREMO

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cdot 0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cdot\pi = \overset{k=m}{\uparrow} a_m \pi \qquad [11]$$

DIVIDENDO QUINDI LA [11] PER π OTTENIAMO LA [3].

PER QUANTO RIGUARDA I COEFFICIENTI b_m, CON $m \geq 1$ SI PROCEDE IN MODO SIMILE. ANZITUTTO MOLTIPLICHIAMO LA [2] PER $\sin mx$ E INTEGRIAMO TRA $-\pi$ E π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kx)(\sin mx) + b_k\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kx)(\sin mx)\right) \qquad [12]$$

DOVE $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx = 0$ (PER IL PRIMO PUNTO DEL LEMMA), $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kx)(\sin mx) = 0$ (PER IL QUARTO PUNTO DEL LEMMA) E $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kx)(\sin mx) = \pi\cdot(0 \text{ se } k\neq m,\ 1 \text{ se } k=m)$. ESPLICITANDO AVREMO

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cdot 0 + b_k\cdot\pi) = \overset{k=m}{\uparrow} b_m\pi \qquad [13]$$

IN CONCLUSIONE CI BASTERÀ DIVIDERE LA [13] PER π PER OTTENERE LA [4]. □

Vittorio Alzetta

SERIE DI FOURIER

SIA $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-PERIODICA E INTEGRABILE SU $[-\pi,\pi]$. DEFINIAMO I COEFFICIENTI DI FOURIER COME

$$a_m := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad (m\geq 0) \qquad [1]$$

$$b_m := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad (m\geq 1) \qquad [2]$$

CHIAMIAMO INVECE POLINOMIO DI FOURIER DI f DI ORDINE n IL POLINOMIO TRIGONOMETRICO DI ORDINE n CHE HA PER COEFFICIENTI I COEFFICIENTI DI FOURIER DI f. LO DENOTEREMO CON F_n

$$F_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \qquad [3]$$

CHIAMEREMO INFINE SERIE DI FOURIER DI f LA SERIE TRIGONOMETRICA CHE HA PER COEFFICIENTI I COEFFICIENTI DI FOURIER DI f. DENOTEREMO LA SUA SOMMA CON S_f

$$S_f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx + b_m\sin mx) \qquad [4]$$

PERTANTO LA DOMANDA CHE CI SIAMO POSTI ALL'INIZIO DEL CAPITOLO PUÓ ESSERE TRASFORMATA IN: PER QUALI f LA SERIE DI FOURIER DI f CHE ABBIAMO CHIAMATO S_f CONVERGE TOTALMENTE / UNIFORMEMENTE / PUNTUALMENTE AD UNA FUNZIONE $S_f(x)$, E QUAL'É IL LEGAME TRA f E S_f?

Vittorio Alzetta

FUNZIONI A TRATTI

UNA FUNZIONE $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-PERIODICA SI DICE C^1 A TRATTI SE ESISTONO UN NUMERO FINITO DI PUNTI

$$a_0 = -\pi < a_1 < \dots < a_h = \pi$$

E UN NUMERO FINITO DI FUNZIONI DERIVABILI CON DERIVATA CONTINUA E TALI

$$f_1 : [a_0, a_1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_2 : [a_1, a_2] \to \mathbb{R} \quad , \dots , \quad f_h : [a_{h-1}, a_h] \to \mathbb{R}$$

TALI CHE LA FUNZIONE f SIA PARI A QUESTE h FUNZIONI NEI LORO INTERVALLI DI DEFINIZIONE, IN FORMULE

$$f = f_i \quad \text{su} \quad (a_{i-1}, a_i)$$

PERTANTO f É DERIVABILE ALMENO SU $[-\pi, \pi] \setminus \{a_0, \dots, a_h\}$. É ANCHE INTEGRABILE SU $[-\pi, \pi]$ E VALE

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{a_{h-1}}^{\pi} f(x)\,dx$$

TEOREMA DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER

SIA $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA, C^1 A TRATTI E 2π-PERIODICA.

LA SERIE DI FOURIER DI f CONVERGE TOTALMENTE, E QUINDI ANCHE UNIFORMEMENTE E PUNTUALMENTE A f SU $[-\pi, \pi]$.

IN PARTICOLARE $\forall x \in \mathbb{R}$ AVREMO

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos mx + b_m \sin mx \right)$$

TEOREMA DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER (AMPLIATO)

SIA $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 A TRATTI E 2π-PERIODICA (SI NOTI CHE QUA f NON É CONTINUA). ALLORA POSSIAMO DIRE CHE

- LA SERIE DI FOURIER S_f DI f CONVERGE PUNTUALMENTE E IL SUO LIMITE PUNTUALE (CIOÉ LA COSA A CUI TENDE) É:

$$S_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

ANCHE CHIAMATA REGOLARIZZATA DI f. IN PARTICOLARE IN TUTTI I PUNTI x IN CUI f É CONTINUA VARRÁ

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos mx + b_m \sin mx \right)$$

- LA SERIE DI FOURIER S_f CONVERGERÁ UNIFORMEMENTE (E QUINDI PUNTUALMENTE) A f IN OGNI INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a, b]$ SU CUI f É CONTINUA

LO SPAZIO $C^0_{per}(\mathbb{R})$

DEFINIAMO LO SPAZIO $C^0_{per}(\mathbb{R})$ COME

$$C^0_{per}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ É CONTINUA SU } \mathbb{R} \text{ E } 2\pi\text{-PERIODICA} \right\}$$

É FACILE DIMOSTRARE CHE C^0_{per} É UNO SPAZIO VETTORIALE E CHE

$$\langle \varphi \cdot \psi \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

É UN PRODOTTO SCALARE IN $C^0_{per}(\mathbb{R})$. DI CONSEGUENZA AVREMO CHE

$$\|\varphi\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^2\,dx \right)^{1/2}$$

É UNA NORMA SULLO SPAZIO VETTORIALE $C^0_{per}(\mathbb{R})$. INOLTRE SE $(g_k)_k$ É UNA SUCCESSIONE IN $C^0_{per}(\mathbb{R})$ E g E C^0_{per} ALLORA

$$g_k \to g \text{ IN NORMA } \|\cdot\|_2 \iff \|g_k - g\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (g_k(x) - g(x))^2 dx \to 0$$

SE NELLE CONSIDERAZIONI CHE ABBIAMO APPENA FATTO SOSTITUIAMO C^0_{per} CON R^*_{per}, CHE DEFINISCO COSÍ

$$R^*_{per}(\mathbb{R}) := \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g \text{ É NEMANN-INTEGRABILE SU } [-\pi,\pi] \text{ E } 2\pi\text{-PERIODICA} \}$$

ALLORA $\|\cdot\|_2$ NON É PIÚ UNA NORMA, NEL SENSO CHE $\|g\|_2 = 0 \not\Rightarrow g \equiv 0$ (QUI UNA FUNZIONE PUÓ ANCHE NON ESSERE IDENTICAMENTE NULLA E NONOSTANTE CIÓ AVERE NORMA NULLA).

A PARTE CIÓ TUTTE LE PROPRIETÁ DOTTE PER UNO SPAZIO VETTORIALE CON PRODOTTO SCALARE CONTINUANO A VALERE ANCHE PER R_{per} MUNITO DI PRODOTTO SCALARE. OVVIAMENTE $C^0_{per}(\mathbb{R})$ É UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $R_{per}(\mathbb{R})$ (É INFATTI UN'IPOTESI PIÚ FORTE QUELLA CHE f SIA CONTINUA PIUTTOSTO CHE SOLO NEMANN-INTEGRABILE).

ARMONICA FONDAMENTALE

IN BASE A QUANTO ABBIAMO DETTO NEL PRECEDENTE PARAGRAFO POSSIAMO DIRE CHE LE SEGUENTI FUNZIONI (CON $k \geq 1$)

$$\phi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \phi_{-k}(x) := \cos(kx) \qquad \phi_k(x) := \sin(kx) \qquad [1]$$

SONO ORTONORMALI, CIOÉ ORTOGONALI FRA LORO E HANNO NORMA UNITARIA, INFATTI

$$\|\phi_0\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{1} = 1 \qquad [2]$$

$$\|\phi_{-k}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |\cos kx|^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{-\pi}^{\pi}} = 1 \qquad [3]$$

$$\|\phi_k\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |\sin kx|^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{-\pi}^{\pi}} = 1 \qquad [4]$$

CON QUESTA INTERPRETAZIONE I COEFFICIENTI DI FOURIER SONO LE COMPONENTI DI f NELLA DIREZIONE DI TALI VETTORI (SONO FUNZIONI IN REALTÁ) $\phi_0, \phi_{-k}, \phi_k$. AD ESEMPIO I COEFFICIENTI b_k POTRANNO ESSERE SCRITTI COME LAVORO AL PRODOTTO SCALARE DA POCO DEFINITO

$$b_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \langle f, \phi_k \rangle \qquad [5]$$

DOVE $b_k \phi_k$ RAPPRESENTA IL VETTORE PROIEZIONE DI f SULLA "RETTA" (NON É UNA VERA E PROPRIA RETTA) INDIVIDUATA DAL VETTORE (FUNZIONE) $\sin kx = \phi_k$. SIMILMENTE POSSIAMO ESPRIMERE I COEFFICIENTI a_k COME

$$a_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \langle f, \phi_{-k} \rangle \qquad [6]$$

DOVE $a_k \phi_{-k} = \langle f, \phi_{-k} \rangle \phi_{-k}$ RAPPRESENTA LA PROIEZIONE DI f SULLA "RETTA" INDIVIDUATA DAL VETTORE (FUNZIONE) $\cos kx = \phi_{-k}$.
INVECE, $a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ RAPPRESENTA IL VETTORE PROIEZIONE DI f NEL <u>PIANO</u> INDIVIDUATO DAI VETTORI $\sin(kx)$ E $\cos(kx)$. CHIAMEREMO QUESTO VETTORE PROIEZIONE ARMONICA FONDAMENTALE DI f DI ORDINE k.
PERTANTO $\langle f, \phi_0 \rangle \phi_0$ SARÁ LA PROIEZIONE DI f SULLA RETTA INDIVIDUATA DALLA FUNZIONE COSTANTE ϕ_0 (CIOÉ SULLA RETTA DELLE FUNZIONI COSTANTI). RISULTA INOLTRE CHE

$$\langle f, \phi_0 \rangle \phi_0 = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx\right) \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \qquad [7]$$

Vittorio Alzetta

PERTANTO IL POLINOMIO TRIGONOMETRICO

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \qquad [8]$$

SARÀ LA PROIEZIONE DI f SULLO SPAZIO VETTORIALE (DI DIMENSIONE $2n+1$) GENERATO DAI VETTORI (FUNZIONI) $[1]$ CON $1 \le k \le n$.

ENERGIA DI UNA FUNZIONE

SIA f UNA FUNZIONE 2π-PERIODICA E RIEMANN-INTEGRABILE IN $[-\pi, \pi]$, DEFINIAMO ENERGIA (O VALORE EFFICACE) DI f LA QUANTITÀ

$$E(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

IN SOSTANZA È LA MEDIA DI $|f|^2$ SU UN INTERVALLO DI LUNGHEZZA 2π (~~MEDIA~~ È MEDIA ARITMETICA), PER QUESTO DIVIDIAMO PER 2π).

PER COMODITÀ IN SEGUITO FAREMO RIFERIMENTO ALL'ENERGIA DI f COME

$$E(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \|f\|_2^2$$

TEOREMA (IDENTITÀ DI PARSEVAL)

SIANO $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE 2π-PERIODICA E RIEMANN-INTEGRABILE, $(a_m)_{m \ge 0}$ $(b_m)_{m \ge 1}$ I COEFFICIENTI DI FOURIER DI f E SIA F_n IL SUO POLINOMIO DI FOURIER DI ORDINE n. ALLORA

1) SE P_n È UN QUALSIASI POLINOMIO TRIGONOMETRICO DI ORDINE n SI HA

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(x)|^2 \, dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 \, dx$$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(x)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

3) L'ENERGIA DI f È PARI ALLA SOMMA DELLE ENERGIE DELLE SUE ARMONICHE FONDAMENTALI

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$$

E QUESTA PRENDE IL NOME DI IDENTITÀ DI PARSEVAL, IN PARTICOLARE LA SERIE NUMERICA CHE COMPARE A SECONDO MEMBRO È SEMPRE CONVERGENTE

4) $$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(x)|^2 \, dx \to 0 \quad \text{PER} \quad n \to +\infty$$

Vittorio Alzetta

Dim: DIMOSTREREMO SOLTANTO IL PRIMO PUNTO NEL CASO $n = 1$, GLI ALTRI SONO UGUALI. CONSIDERIAMO IL GENERICO POLINOMIO TRIGONOMETRICO DI ORDINE 1 DI COEFFICIENTI (γ, β, α): $P_1(x) = \frac{\gamma}{2} + \beta \sin(x) + \alpha \cos(x)$. CONSIDERIAMO ORA LA FUNZIONE $(\gamma, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mapsto G(\gamma, \beta, \alpha)$ COSÌ DEFINITA

$$G(\gamma, \beta, \alpha) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_1(x)|^2 \qquad [1]$$

LA DIMOSTRAZIONE CONSISTE NEL TROVARE IL MINIMO DI G, INFATTI IL PUNTO 1 DEL TEOREMA IDENTIFICA PROPRIO QUELLO. INIZIAMO ESPLICITANDO LA [1]

$$G(\gamma, \beta, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 + P_1^2 - 2 f P_1$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_1^2 - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\gamma}{2} f + \beta \sin(x) f(x) + \alpha \cos(x) f(x) \right) \qquad [2]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \, dx + \left(\frac{\gamma^2}{2} + \beta^2 + \alpha^2 \right) - 2 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\gamma}{2} f + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta \sin(x) f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha \cos(x) f(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx + \left(\frac{\gamma^2}{2}+\beta^2+\alpha^2\right) - 2\left(\frac{\gamma}{2}a_0 + \beta b_1 + \alpha a_1\right)$$

A QUESTO PUNTO SI OSSERVI CHE PONENDO $\gamma = a_0$, $\beta = b_1$, $\lambda = a_1$ SI OTTIENE

$$G(\gamma,\beta,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - \left(\frac{\gamma^2}{2}+\beta^2+\lambda^2\right) \qquad [3]$$

$$G(a_0,b_1,a_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - \left(\frac{a_0^2}{2}+b_1^2+a_1^2\right) \qquad [4]$$

TALE PUNTO (a_0, b_1, a_1) É DI MINIMO, INFATTI NOTIAMO CHE

$$E_f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx = \|f\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + b_1^2 + a_1^2 \qquad (\text{per } n=1) \qquad [5]$$

OTTENIAMO, SOSTITUENDO LA [5] NELLA [4]

$$G(a_0, b_1, a_1) = 0$$

E POICHÉ G É UNA FUNZIONE POSITIVA (a_0, b_1, a_1) É UN PUNTO DI MINIMO E DUNQUE É VERIFICATO IL NOSTRO PUNTO, INFATTI a_0, b_1, a_1 SONO PROPRIO I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO DI FOURIER DI f DI ORDINE 1.

IL PUNTO 2 SI OTTIENE PONENDO $\gamma = a_0$, $\beta = b_1$, $\alpha = a_1$ NELLA [2].

CASO PARTICOLARE (f CONTINUA E C^1 A TRATTI SU $\mathbb{R}$)

RICORDANDO CHE

$$F_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}\left(a_m \cos mx + b_m \sin mx\right)$$

PER I TEOREMI SULLA CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER ABBIAMO CHE $F_n \to f$ UNIFORMEMENTE SU $[-\pi,\pi]$, QUINDI ANCHE $F_n^2 \to f^2$ SU $[-\pi,\pi]$.

PERTANTO AVREMO CHE

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n^2 \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2$$

OSSERVAZIONI PER ESERCIZI

DI SEGUITO UN ELENCO DI UTILI OSSERVAZIONI PER RISOLVERE GLI ESERCIZI

- SIA $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE 2π-PERIODICA CONTINUA A TRATTI, AVREMO

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} v(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} v(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} v(x+2\pi)\,dx + \int_{0}^{\pi} v(x)\,dx$$
$$= \int_{\pi}^{2\pi} v(s)\,ds + \int_{0}^{\pi} v(x)\,dx = \int_{0}^{2\pi} v(x)\,dx$$

DOVE É STATO POSSIBILE SCRIVERE $x = x + 2\pi$ PER LA PERIODICITÀ DI v. IN SOSTANZA SI PUÒ USARE UN QUALUNQUE INTERVALLO DI INTEGRAZIONE DI LUNGHEZZA 2π PER CALCOLARE I COEFFICIENTI DI FOURIER DI UNA QUALUNQUE FUNZIONE.

- POICHÉ I COEFFICIENTI DELLA SERIE DI FOURIER DIPENDONO LINEARMENTE DALLA FUNZIONE 2π-PERIODICA ASSEGNATA DATE $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUE A TRATTI E 2π-PERIODICHE E DATI $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ AVREMO

$$S_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha S_\varphi + \beta S_\psi$$

DOVE RICORDO CHE CON S_f SI INDICA LA SERIE DI FOURIER DI f.

Vittorio Alzetta

Vittorio Alzetta

FUNZIONI T-PERIODICHE

SIA $T>0$ UN VALORE DATO. SE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ É T-PERIODICA, CIOÉ $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ALLORA LA FUNZIONE

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) \qquad [1]$$

É 2π-PERIODICA, INFATTI

$$\tilde{f}(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad [2]$$

CALCOLIAMO ORA I COEFFICIENTI DI FOURIER DI $\tilde{f}$ INDICANDO CON a_m, $m \geq 0$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) (\cos mx) \, dx \qquad [3]$$

OSSERVANDO CHE $s = \frac{T}{2\pi} x$ E $x = \frac{2\pi}{T} s$ POSSIAMO EFFETTUARE IL CAMBIO DI VARIABILE

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi \cdot \frac{T}{2\pi}}^{\pi \cdot \frac{T}{2\pi}} f(s) \left(\cos\left(m \frac{2\pi}{T} s\right)\right) ds \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(x) \cos\left(m \frac{2\pi}{T} x\right) dx \qquad [4]$$

SIMILMENTE POSSIAMO CALCOLARE b_m CON $m \geq 1$ E OTTENERE

$$b_m = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(m \frac{2\pi}{T} x\right) dx \qquad [5]$$

IL CHE CI PERMETTE DI SCRIVERE LA SERIE DI FOURIER DELLA FUNZIONE f T-PERIODICA

$$S_f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{m \geq 1} \left(a_m \cos\left(m \frac{2\pi}{T} x\right) + b_m \sin\left(m \frac{2\pi}{T} x\right) \right) \qquad [6]$$

PER QUESTA SERIE VARRÁ IL TEOREMA DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER AMPLIATO E VARRÁ ANCHE L'IDENTITÁ DI PARSEVAL SULL'ENERGIA (ADOTTIAMO ANCHE IN QUESTO CASO LA CONVENZIONE SUL SUO VALORE, VEDI CAPITOLO SU ENERGIA).