

Corso di Logica (linguaggio enunciativo)

Vittorio Alzetta

September 2, 2024

Contents

1	Introduzione	3
2	Cos'è la logica	3
3	Alcuni concetti introduttivi	4
3.1	Proposizioni ipotetiche	4
3.2	Proposizioni universali e particolari	4
3.3	Ragionamento	5
4	Le 3 leggi del pensiero	5
4.1	Principio di identità	5
4.2	Principio di non contraddizione	6
4.3	Principio del terzo escluso	6
5	Enunciati dichiarativi	6
6	Le 3 leggi del pensiero (formalmente)	6
6.1	Principio di determinatezza	7
6.2	Principio di bivalenza	7
6.3	Principio di vero-funzionalità	7
7	Connettivi logici	7
7.1	Negazione	7
7.2	Congiunzione	8
7.3	Disgiunzione	8
7.4	Implicazione	8
7.5	Equivalenza	9
8	Regole di formazione	10
9	Campi dei connettivi	11
10	Proposizioni fondamentali	13
10.1	Tautologie, contraddizioni e proposizioni contingenti	13
10.2	Equivalenza semantica	14
10.3	Consistenza	14
10.4	Validità	15
10.5	Alcuni legami fra proposizioni	15
11	Regole di inferenza	17
11.1	Convenzioni di scrittura	17
11.2	Modus ponens	17
11.3	Modus tollens	19
11.4	Regola di congiunzione	19
11.5	Regola di semplificazione	20
11.6	Regola di addizione	20
11.7	Regola del sillgismo disgiuntivo	21
11.8	Regola del sillogismo ipotetico	21
11.9	Regola del dilemma costruttivo	21

12 Regole di equivalenza	22
12.1 Regola di idempotenza	22
12.2 Regola di commutazione	22
12.3 Regola di associazione	23
12.4 Regola di assorbimento	23
12.5 Regola di distribuzione	23
12.6 Leggi di De Morgan	24
12.7 Regola di implicazione	24
12.8 Regola di contrapposizione	25
12.9 Regola dell'esportazione	25
12.10Regola dell'equivalenza	26

1 Introduzione

È estate e mi è venuta voglia di studiare la logica. Spesso ci capita di usare la parola logica o qualche suo sinonimo, ho però l'impressione che non si sappia a cosa ci si riferisca esattamente. Cos'è la logica? Quali sono i principi su cui si basa la logica? Cosa caratterizza un argomento logico da uno non logico? Cos'è un ragionamento? Come si stabilisce la validità di un ragionamento? Credo che in pochi sappiano rispondere precisamente a questo breve elenco di domande. Per questo motivo ho deciso di seguire il corso di logica del professor Ermanno Ferretti. In questo piccolo libricino cercherò di riassumere e schematizzare in maniera chiara e ordinata il contenuto delle lezioni. Sperando che questo lavoro non risulti utile soltanto a me, auguro una buona lettura.

2 Cos'è la logica

La **logica** è un ramo della filosofia, come la metafisica, l'epistemologia, l'etica e l'estetica. La parola logica deriva dal greco *logos*, che ha molti significati (ad esempio parola, discorso, ragione, intelletto...). Possiamo intendere la logica come la scienza che studia le regole del ragionamento (che definiremo). Il padre di questa disciplina è Aristotele, che inizialmente la chiamò analitica. Egli formalizzò per primo questa disciplina nell'opera *organon* (lett. strumento), alludendo al fatto che queste regole sarebbero diventati strumenti per l'analisi dei ragionamenti. L'opera segue un percorso che porta all'analisi di elementi sempre più complessi ma sempre legati ai precedenti. In particolare parte dalle parole per passare poi alle frasi, unendo assieme più frasi (o proposizioni) analizza i ragionamenti e infine tratta le scienze, che secondo il filosofo non sono altro che insiemi di ragionamenti. Questo approccio ricorda per certi versi quello seguito da Euclide per presentare la sua geometria. Infatti, sia Aristotele che Euclide, iniziano formulando alcuni postulati, cioè verità assolute la cui veridicità non può essere messa in discussione. A seguire vengono elaborate le dimostrazioni, cioè ragionamenti che si basano sui postulati o sulle conclusioni di altri ragionamenti già dimostrati. Durante il medioevo non vennero dati particolari contributi alla logica, piuttosto spiegarono meglio ciò che si era detto fino a quel momento. Nel 700 Leibniz cercò di formalizzare simbolicamente la logica, voleva sostituire le frasi con delle lettere o dei simboli (falli). Circa un secolo dopo, nell'800, George Boole trattò la logica come un calcolo, notò che assegnando alle frasi un valore numerico (0 e 1) si potevano sostituire i connettivi logici con le operazioni. Per esempio

$$1 + 9 = 8$$

è una frase vera, perciò assegnamole il valore 1. Al contrario

$$8 - 4 = 2$$

è una frase falsa, perciò le assegneremo il valore 0. Ora, se provassimo ad unire le due proposizioni con la congiunzione "o" otterremo

$$1 + 9 = 8 \text{ o } 8 - 4 = 2$$

che è una frase vera (infatti una delle due proposizioni è vera), Boole capì che assegnando i valori alle frasi come abbiamo appena fatto, la congiunzione "o" poteva essere sostituita dalla somma. Infatti, 1 (valore della prima frase) + (operazione associata alla congiunzione "o") 0 (valore associato alla seconda frase) = 1 (valore che associamo alla terza, è vera!). Un ragionamento analogo si può fare con la congiunzione "e", che verrà sostituita

dalla moltiplicazione. Senza ripetermi, osserviamo che 1 (valore della prima frase) $\times$ (operazione associata alla congiunzione "e") 0 (valore associato alla seconda frase) $= 0$ (valore che associamo alla frase " $1 + 9 = 8$ e $8 - 4 = 2$ ", è falsa!).

Esistono infine anche le logiche non classiche, esse violano i 3 principi fondamentali del pensiero che vedremo più avanti. Uno degli elementi distintivi tra logiche classiche e *fuzzy* (non classiche) è il numero di valori di verità. Le prime ne ammettono solo 2, vero e falso, le altre ne ammettono molti di più. Per esempio una frase può essere vera (le associamo quindi il valore 1), falsa (valore 0) e tutto quello che sta in mezzo, in sostanza può essere parzialmente vera e parzialmente falsa.

3 Alcuni concetti introduttivi

3.1 Proposizioni ipotetiche

In natura spesso ci capita di osservare il rapporto tra causa ed effetto, per esempio se vinco una partita a biliardo poi mi sentirò benissimo. In logica è utile poter esprimere a parole e con chiarezza la consequenzialità tra degli eventi. Per farlo si ricorre alla semplice forma se...allora. Le proposizioni che presentano questa forma sono chiamate **proposizioni ipotetiche**, ne è un esempio il seguente

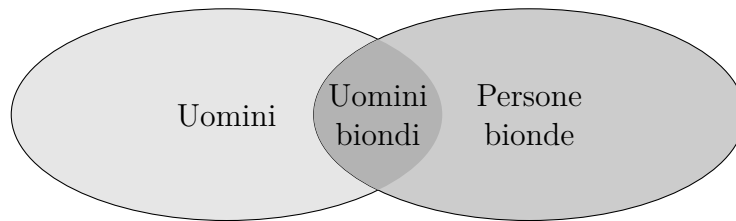
$$\underbrace{\text{Se perdo a biliardo}}_{\text{Antecedente}} \underbrace{\text{allora non prendo sonno facilmente}}_{\text{Consequente}}$$

É anche possibile creare delle catene condizionali unendo più periodi ipotetici. Consideriamo ad esempio le seguenti proposizioni "se perdo a biliardo non dormo la notte" e "se non dormo la notte allora il giorno dopo sono stanco". Appare chiaro come possano essere fuse per formare il singolo periodo ipotetico "se perdo a biliardo allora il giorno dopo sono stanco" (è come dire che se A implica B e B implica C allora A implica C, e infatti in questo caso il conseguente della prima frase corrisponde proprio all'antecedente della seconda).

3.2 Proposizioni universali e particolari

Chiamiamo **proposizioni universali** i periodi introdotti da "tutti", "nessuno" o loro sinonimi. Per esempio la frase "tutte le palline sono state imbucate da me" è una proposizione universale. Lo scopo di queste frasi è quello di assegnare a tutti gli elementi di un dato insieme, come quello delle palline nell'esempio, una caratteristica comune, sempre nell'esempio è il fatto che le abbia imbucate io. Questo ci porta ad introdurre un'altra classe di proposizioni, cioè le **proposizioni particolari**. Si capisce intuitivamente che saranno introdotte da "alcuni" o suoi sinonimi e serviranno a specificare una proprietà che avrà solo una parte degli elementi di un insieme. Per esempio "alcune palline sono state imbucate dal mio avversario" vuole indicare che solo una parte degli elementi (palline) dell'insieme delle palline sono state imbucate dall'avversario. Volendo essere più formali potremmo dire che preso l'insieme delle palline e l'insieme delle cose imbucate dall'avversario (non per forza palline) non avremo intersezione vuota. Forse la frase "alcuni uomini sono biondi" può essere utile a fissare meglio le idee. Consideriamo l'insieme degli uomini e l'insieme dei biondi (possono essere sia donne che uomini), la proposizione

particolare afferma che l'intersezione tra di essi non sarà vuota. Questo perchè esistono delle persone che sono sia uomini sia bionde.



3.3 Ragionamento

L'argomento logico, o **ragionamento**, è un insieme di proposizioni. In tempi antichi Aristotele proponeva il sillogismo (ne parleremo più approfonditamente in seguito) come principale forma di ragionamento, effettivamente essendo composto da 3 proposizioni rispetta la definizione che abbiamo appena dato. In particolare un ragionamento sarà formato da una prima parte di proposizioni chiamate **premesse** e da una finale detta **conclusione**. Per stabilire se la conclusione di un ragionamento è vera oppure no occorre analizzare la veridicità delle premesse e la struttura dell'**argomento** (cioè verificare se sono state rispettate le regole della logica). Se l'argomento è valido sappiamo che sono state rispettate le regole della logica, in altre parole la struttura del ragionamento è corretta. Questo però non basta, infatti nonostante l'argomento possa essere valido, le premesse potrebbero essere false. In tal caso la conclusione non sarà valida (sarà inutile prenderla in considerazione). Similmente, se le premesse dovessero essere vere e l'argomento dovesse risultare non valido allora la conclusione non sarebbe valida. É chiaro che affinché una conclusione sia vera dovranno essere vera la premessa e valido l'argomento. Nella prossima tabella è riassunto il contenuto di questo paragrafo

Premessa	Argomento	Conclusione
vera	valido	vera
vera	non valido	inutile
falsa	valido	inutile
falsa	non valido	inutile

4 Le 3 leggi del pensiero

In questo breve capitolo vedremo le 3 leggi fondamentali del pensiero. Vennero inizialmente proposte da Aristotele e in seguito riviste e formalizzate dal filosofo inglese Bertrand Russell. Potrebbero apparire decisamente semplici, ovvi, ed è anche per questo motivo che rappresentano le fondamenta della logica. In futuro vedremo alcuni strumenti della logica di gran lunga più elaborati, per arrivare a comprenderli a fondo occorre dedicare del tempo allo studio dei concetti più semplici, in modo da affrontare la materia gradualmente.

4.1 Principio di identità

Questo principio afferma che ogni cosa è uguale a se stessa. É ovvio, e bisogna assicurarsi che questo principio non venga mai violato. In altre parole si potrebbe dire che la proposizione $A = A$ è sempre vera.

4.2 Principio di non contraddizione

Una cosa non può mai essere contemporaneamente uguale a se stessa e al suo contrario. Un uomo non può essere contemporaneamente vivo e morto (cioè non vivo), o è vivo o è morto.

4.3 Principio del terzo escluso

Spesso questo principio è chiamato *tertium non datur*. Afferma che un enunciato può essere vero o falso, non esiste una terza possibilità. Un uomo è vivo o non vivo, non può trovarsi in nessun'altra condizione.

5 Enunciati dichiarativi

Nella logica classica non vengono studiate tutte le proposizioni, è chiaro che alcune non verranno prese in considerazione. Consideriamo per esempio la seguente frase

Questo tavolo è marrone

in questo caso la frase ha del contenuto informativo e potrebbe quindi trovarsi all'interno di un ragionamento. La logica terrà in considerazione le proposizioni di questo tipo. Al contrario, esistono frasi che non danno alcuna indicazione, come

Quante partite ho vinto fino ad ora?

le domande fanno infatti parte dell'insieme di proposizioni non studiate dalla logica. Anche le imprecazioni e gli ordini sono esempi di frasi prive di contenuto informativo e pertanto verranno trascurate. Le proposizioni interessanti per la logica sono chiamati **enunciati dichiarativi**. La logica, inoltre, si attiene a ciò che è esplicito, non a ciò che viene sottinteso. Per esempio, se durante una giornata tempestosa dovessi dire ad un amico (a cui so che piace la pioggia) "*che bella giornata!*", egli comprenderebbe subito la mia ironia e la falsità della frase (il tempo è brutto, non è bello). In logica non ci si interessa al trascorso tra me e il mio amico, prendiamo per buono tutto ciò che viene dichiarato, come in questo caso. Viene anche data lo stesso valore a tutte le congiunzioni. Comunemente si associa alle frasi

Anna è una ragazza bella e intelligente

Anna è una ragazza bella ma intelligente

un diverso significato. Nel primo caso si stanno semplicemente rendendo note due caratteristiche di Anna, nel secondo caso si sta affermando implicitamente che Anna è bella e, contrariamente a quanto si possa pensare sulle ragazze belle, è anche intelligente. Questa sfumatura tra il senso delle due frasi, in logica non è presa in considerazione. Entrambe le frasi hanno lo stesso significato.

6 Le 3 leggi del pensiero (formalmente)

Come accennavo nel primo capitolo, la logica moderna sostituisce le frasi con dei simboli. Per esempio l'enunciato "ho vinto una partita a biliardo" può essere rappresentato dalla generica lettera P. Questa scelta deriva dal fatto che nel linguaggio comune, soprattutto quello parlato, spesso si creano ambiguità e incomprensioni. La logica vuole ovviamente evitare queste situazioni, per questo motivo si è passati al simbolo, abbandonando le parole e le loro diverse sfumature. Oltre a questo, in epoca moderna sono state riviste e rese più formali le 3 leggi del pensiero.

6.1 Principio di determinatezza

Ogni enunciato ha uno ed un solo valore di verità.

6.2 Principio di bivalenza

Esistono 2 valori di verità: vero e falso.

Il primo principio afferma che il valore di verità di un enunciato è uno ed un solo, il secondo (questo) stabilisce quale può essere questo unico valore di verità (o vero o falso). Questa conclusione ci è già nota sotto il nome di principio del terzo escluso.

6.3 Principio di vero-funzionalità

Prima di esporre questo principio occorre definire gli **enunciati composti**. In precedenza abbiamo già visto esempi di enunciati semplici, ad esempio

Il tavolo da biliardo è verde

per crearne uno composto basta unire due o più enunciati semplici tra loro, come nella frase

Il tavolo da biliardo è verde e pesante

in questo caso sono state uniti gli enunciati *il tavolo da biliardo è verde* e *il tavolo da biliardo è pesante*.

Il principio di vero-funzionalità afferma che il valore di verità di un enunciato composto dipende interamente dai valori di verità degli enunciati semplici che lo compongono.

Riprendendo l'esempio di prima, questo principio dichiara che per stabilire il valore di verità di *il tavolo da biliardo è verde e pesante* dovremo studiare separatamente il valore di verità di *il tavolo da biliardo è verde* e *il tavolo da biliardo è pesante*.

7 Connettivi logici

I connettivi logici sono gli elementi che permettono di unire più enunciati semplici in enunciati composti. Ne vedremo 5 e studieremo come questi contribuiscono determinazione del valore di verità dell'enunciato composto.

7.1 Negazione

La **negazione** è il connettivo più semplice. Se applicato ad una proposizione ne cambia il valore di verità (da vero a falso e viceversa). È l'unico connettivo unario che vedremo, cioè l'unico che può essere applicato ad una proposizione sola. È indicato con il simbolo $\neg$. Di seguito mostrerò la **tabella di verità**, cioè la tabella che mostra come la negazione modifica il valore di verità della generica proposizione P

P	$\neg P$ (non P)
vera	falsa
falsa	vera

Per fissare meglio le idee supponiamo che P rappresenti la frase *ho vinto la partita* e che la frase sia vera, allora è chiaro che applicando la negazione otterremo *non ho vinto la*

partita, cioè una frase falsa (dato che l'ho vinta). Questo corrisponde al caso rappresentato dalla prima riga della tabella.

7.2 Congiunzione

La **coniunzione** "e" si indica con il simbolo $\wedge$ ed è un connettivo che unisce due enunciati semplici. Il risultato sarà un enunciato composto. La tavola di verità della congiunzione mostra come l'enunciato composto sarà vero nel caso in cui entrambe le proposizioni semplici che lo compongono saranno vere. Chiamata P la prima frase e Q la seconda avremo

P	Q	$P \wedge Q$ (P e Q)
vera	vera	vera
vera	falsa	falsa
falsa	vera	falsa
falsa	falsa	falsa

Per ora le cose rimangono abbastanza intuitive, è chiaro che affermando *oggi ho studiato e mi sono allenato*, affinché risulti vera la frase nel suo complesso dovrò sia aver studiato che essermi allenato. Se anche una delle due frasi semplici fosse falsa allora lo sarebbe anche quella composta.

7.3 Disgiunzione

La **disgiunzione** "o" è indicata con il simbolo $\vee$ e, come la congiunzione, serve ad unire due enunciati semplici. Nel linguaggio comune vengono fatti due utilizzi diversi della disgiunzione, in particolare può venir utilizzata la "o" inclusiva o esclusiva. La "o" esclusiva (in latino *aut*) si presenta nella forma *o...o*, dove tra le due proposizioni solo una può risultare vera. Ad esempio *o scegli me o scegli lei* impiega la "o" esclusiva per vincolare la scelta ad uno dei due elementi. D'altra parte esiste anche la "o" inclusiva (in latino *vel*). Essa non prevede che sia vero soltanto uno dei due enunciati, ammette la possibilità che siano entrambi veri. Per esempio nella frase *facciamo una partita a carte o una a biliardo* non viene escluso il caso in cui si gioca sia a carte che a biliardo. In logica la disgiunzione è sempre inclusiva, pertanto l'enunciato composto $P \vee Q$ (P o Q) sarà vero quando almeno uno tra P e Q risulterà vero.

P	Q	$P \vee Q$ (P o Q)
vera	vera	vera
vera	falsa	vera
falsa	vera	vera
falsa	falsa	falsa

Chiaramente quando sia P che Q sono false anche "P o Q" sarà falsa.

7.4 Implicazione

L'**implicazione** è il connettivo espresso dalla forma *se...allora*, viene solitamente indicato dal simbolo $\rightarrow$. Per fissare meglio le idee consideriamo i seguenti tre esempi

se sei a Milano allora ti trovi in Italia
se lascio cadere una palla allora questa scende verso il basso
se non passo il prossimo esame allora faccio la rinuncia agli studi

Mentre la prima esprime una condizione geografica, la seconda un rapporto di causa-effetto e la terza un proposito, c'è un elemento che accomuna questi esempi. In poche parole quando l'antecedente (la frase tra "se" e "allora") è vero e il conseguente (la frase che inizia dopo "allora") è falso allora l'enunciato composto risulta falso. Infatti, se non passo il prossimo esame e non rinuncio agli studi ho affermato una falsità. È forse ancora più evidente con il secondo esempio. Se lascio cadere un oggetto e questo non scende verso il basso allora è falso ciò che ho detto nella proposizione ipotetica. Il caso in cui fossero veri sia l'antecedente che il conseguente porterebbe evidentemente ad un enunciato composto vero. Forse meno intuitivo è il caso in cui l'antecedente dovesse essere falso, qui non potremmo affermare nulla sul valore di verità della proposizione composta. Se viene meno il punto di partenza (antecedente) non ha senso chiedersi anche solo quale sia il valore di verità del conseguente. In logica si è deciso di assegnare a questi due casi (antecedente falso/consequente vero e antecedente falso/consequente falso) meno intuitivi il valore di verità vero. Dunque la tavola di verità dell'implicazione sarà

P	Q	$P \rightarrow Q$ (P implica Q)
vera	vera	vera
vera	falsa	falsa
falsa	vera	vera
falsa	falsa	vera

Questo connettivo è anche chiamato "condizione sufficiente", in quanto le frasi ipotetiche forniscono una condizione sufficiente (antecedente) perchè si verifichi ciò che è descritto dal conseguente. Si osservi che questa condizione non per forza è necessaria. È sì vero che se mi trovo a Milano (condizione sufficiente per trovarsi in Italia) allora sono in Italia, ma è anche vero che non è necessario trovarsi a Milano per poter dire di essere in Italia (potrei trovarmi a Napoli o sulla punta del monte Rosa!).

7.5 Equivalenza

L'**equivalenza** è una doppia implicazione espressa in forma testuale come "... se e solo se ...". Non a caso il simbolo impiegato per rappresentarla è $\leftrightarrow$. Una frase composta in cui compare l'equivalenza può essere scomposta in due proposizioni semplici. Chiamiamole P e Q per semplicità. L'equivalenza sarà vera quando risulterà vero che (P implica Q) e (Q implica P). La definizione potrebbe sembrare contorta, ma capiamoci meglio con degli esempi. Anzitutto riprenderei quelli fatti per l'implicazione. È forse vero che trovandoci a Milano saremmo in Italia? Sì, è vero. Ma è anche vero il contrario, cioè che trovandoci in Italia allora saremmo a Milano? No, questo è falso, perchè ci sono tanti altri posti in Italia, oltre a Milano, dove potremmo trovarci (ad esempio Napoli). Per questo motivo non possiamo affermare che *mi trovo a Milano se e solo se sono in Italia*. Consideriamo la frase *se premo l'interruttore della luce allora la lampadina si accende*. È vera. Ma se la ripercorressimo al contrario, scambiando antecedente e conseguente, risulterebbe ancora vera? Se la luce si accende è chiaro che ho premuto l'interruttore, non può essere altrimenti. Quindi vale anche l'implicazione contraria e possiamo affermare *la luce si accende se e solo se premo l'interruttore*.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$ (P se e solo se Q)
vera	vera	vera
vera	falsa	falsa
falsa	vera	falsa
falsa	falsa	vera

In questo caso anche la terza riga è falsa. Questo perchè, come abbiamo visto, deve valere l'implicazione in entrambe le direzioni, e $Q \rightarrow P$ è falsa in questo terzo caso (si veda la tavola di verità dell'implicazione).

L'equivalenza è anche chiamata "condizione necessaria e sufficiente", questo perchè mette in relazione due enunciati che dipendono uno dall'altro. Il primo implica il secondo e viceversa. Pertanto la prima proposizione sarà una condizione sufficiente e necessaria al verificarsi della seconda proposizione. Sufficiente perchè siamo sicuri che implichi la seconda. Necessaria perchè una volta implicata la seconda, questa implicherà a sua volta la prima. Una non può esistere senza l'altra.

8 Regole di formazione

Ogni linguaggio è caratterizzato da un alfabeto. L'italiano ha le ventuno lettere e i segni di interpunzione e la matematica ha i numeri e le operazioni. Anche in logica si ha un alfabeto, i suoi elementi vengono generalmente divisi in tre categorie

- **Alfabeto logico:** consiste nei 5 connettivi logici che ho presentato nel capitolo precedente
- **Alfabeto descrittivo:** consistente in un numero indefinito di variabili enunciative (quelle che abbiamo indicato con le lettere P, Q, R...). Essendo gli elementi di questo insieme infiniti, una volta terminate le lettere si procede aggiungendo un pedice numerico $P_1, P_2, P_3, P_4...$
- **Alfabeto ausiliario:** fanno parte di questo alfabeto le parentesi tonde, utilizzate per togliere qualsiasi ambiguità sull'ordine con il quale va studiato un enunciato composto

L'alfabeto non è però sufficiente a definire completamente un linguaggio. Bisogna anche definire alcune regole sul modo in cui i simboli (gli elementi dell'alfabeto) possono essere combinati per formare espressioni composte. Per fare ciò, ci si rifà ad una tecnica ampiamente utilizzata in matematica per definire rigorosamente degli insiemi con infiniti elementi (il numero di enunciati composti che si possono ideare è infinito!): la definizione per induzione. Quest'ultima si compone di tre fasi, o passi. Nella prima, detta *base*, si specifica un certo numero iniziale di elementi appartenenti all'insieme che vogliamo definire. Nella seconda, detta *passo*, si specificano alcune operazioni, dicendo che applicando tali operazioni agli elementi dell'insieme che vogliamo caratterizzare, si otterranno altri elementi di questo insieme. Nella terza e ultima fase, chiamata *conclusione*, si afferma semplicemente che nient'altro è un elemento dell'insieme che vogliamo definire, tranne quanto specificato nella *base* e nel *passo*.

Prima di presentare nel dettaglio le regole di formazione per il linguaggio enunciativo, devo introdurre un altro semplice concetto: le *metavariabili*. Le variabili di variabili, o *metavariabili*, sono dei simboli (generalmente viene impiegato l'alfabeto greco) utilizzati per riferirsi ad enunciati semplici (anche se per quelli già avevamo introdotto

l'alfabeto descrittivo) e soprattutto ad enunciati composti. In sostanza il generico enunciato $\neg(\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge R))$ potrà essere etichettato con la lettera α . Lo scopo di queste metavariable è solamente quello di alleggerire la notazione.

Detto questo, possiamo finalmente dare le regole di formazione del linguaggio enunciativo.

(B) Base

La base consiste nel dire che ogni variabile enunciativa ($P, Q, R, \dots$) è una formula ben formata.

(P) Passo

Il passo è dato da cinque clausole:

1. Se α è una formula ben formata, allora anche $\neg\alpha$ sarà una formula ben formata.
2. Se α e β sono formule ben formate, allora anche $(\alpha \wedge \beta)$ è una formula ben formata.
3. Se α e β sono formule ben formate, allora anche $(\alpha \vee \beta)$ è una formula ben formata.
4. Se α e β sono formule ben formate, allora anche $(\alpha \implies \beta)$ è una formula ben formata.
5. Se α e β sono formule ben formate, allora anche $(\alpha \iff \beta)$ è una formula ben formata.

(C) Conclusione

Nient'altro è una formula ben formata tranne quanto definito nella base (B) e nel passo (P).

Consideriamo la formula ben formata $\neg(P \wedge (Q \vee \neg R)) \implies (S \iff T)$. Per costruire questa formula, seguiamo le regole di formazione del linguaggio enunciativo. Prima di tutto, le variabili enunciative P, Q, R, S , e T sono considerate formule ben formate (regola della base (B)). Successivamente, poiché R è una formula ben formata, anche $\neg R$ lo sarà, in accordo con la clausola (P1), che afferma che se α è una formula ben formata, allora $\neg\alpha$ è anch'essa una formula ben formata. A questo punto, possiamo combinare Q e $\neg R$ usando la clausola (P3), che permette di costruire la formula $(Q \vee \neg R)$, poiché $\alpha \vee \beta$ è una formula ben formata se entrambe α e β lo sono. Ora, utilizzando la clausola (P2), possiamo formare la formula $(P \wedge (Q \vee \neg R))$, dato che $\alpha \wedge \beta$ è ben formata se α e β sono ben formate. Successivamente, applichiamo nuovamente la clausola (P1) per ottenere $\neg(P \wedge (Q \vee \neg R))$. Infine, possiamo combinare questa formula con $(S \iff T)$ utilizzando la clausola (P4), che ci permette di costruire $\neg(P \wedge (Q \vee \neg R)) \implies (S \iff T)$, poiché $\alpha \implies \beta$ è una formula ben formata se α e β sono formule ben formate. Inoltre, $(S \iff T)$ è una formula ben formata grazie alla clausola (P5), che afferma che $\alpha \iff \beta$ è ben formata se α e β lo sono.

9 Campi dei connettivi

Può capitare che in una proposizione composta compaiano molti connettivi. Ad esempio

$$\neg(\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge R))$$

In questi casi lo stesso connettivo può comparire più volte. Per poter identificarne uno in particolare, senza lasciare spazio ad ambiguità, si contano da destra a sinistra le **occorrenze** di tale connettivo e ci si riferisce ad una di esse. Per esempio, la negazione occorre 3 volte, se volessi identificare la negazione che sta prima della lettera Q non dovrei far altro che parlare della "terza occorrenza della negazione".

Si può notare che alcune parti della proposizione potrebbero rappresentare delle proposizioni, ovviamente più piccole di quella di partenza, che potrebbero stare in piedi da sole. Considerando nuovamente l'esempio iniziale avremo che $(\neg Q \wedge R)$ o $(\neg P)$ o $(\neg Q)$ hanno senso di esistere anche senza il resto della proposizione iniziale. Al contrario, se isolassimo $(\neg P \rightarrow)$ non otterremmo niente che possa stare in piedi da solo, mancherebbe infatti il conseguente dell'implicazione. D'ora in poi chiameremo **sottoproposizioni** le parti di una proposizione che possono essere isolate.

Oltre a ciò definiamo anche il **campo**, o ambito, di un connettivo come la più piccola sottoproposizione in cui tale connettivo compare. Nel nostro esempio il campo della congiunzione è $(\neg Q \wedge R)$.

Supponiamo ora di voler studiare il valore di verità di questo enunciato, sapendo che le proposizioni semplici P, Q e R sono rispettivamente vera, falsa e vera. Procederemo scrivendo sotto ad ogni lettera il valore di verità corrispondente, in questo modo

$$\frac{\neg \quad (\neg \quad P \quad \rightarrow \quad (\neg \quad Q \quad \wedge \quad R))}{\quad \quad \quad V \quad \quad \quad F \quad \quad \quad V}$$

dopodichè, calcoleremo il valore di verità delle sottoproposizioni di cui conosciamo il valore dei rispettivi elementi. In questo caso possiamo calcolare il valore di $(\neg P)$ e $(\neg Q)$, ma non ancora di $(\neg Q \wedge R)$

$$\frac{\neg \quad (\neg \quad P \quad \rightarrow \quad (\neg \quad Q \quad \wedge \quad R))}{\quad \quad \quad F \quad V \quad \quad \quad V \quad F \quad \quad \quad V}$$

Ho aggiunto il valore di verità delle sottoproposizioni $(\neg P)$ e $(\neg Q)$ sotto il connettivo che mi ha permesso di calcolarlo. Ora possiamo finalmente studiare $(\neg P)$ e $(\neg Q)$

$$\frac{\neg \quad (\neg \quad P \quad \rightarrow \quad (\neg \quad Q \quad \wedge \quad R))}{\quad \quad \quad F \quad V \quad \quad \quad V \quad F \quad V \quad V}$$

In questo momento conosciamo il risultato di tutti gli elementi che si trovano nel campo dell'implicazione, quindi ne possiamo calcolare il valore di verità

$$\frac{\neg \quad (\neg \quad P \quad \rightarrow \quad (\neg \quad Q \quad \wedge \quad R))}{\quad \quad \quad F \quad V \quad V \quad \quad \quad V \quad F \quad V \quad V}$$

L'ultimo connettivo che rimane da esaminare prende il nome di **connettivo principale**, mentre tutti gli altri verranno detti **connettivi subordinati**. In questo caso è rimasta la prima occorrenza della negazione, che ci permetterà di ricavare il valore della proposizione intera

$\neg$	$(\neg$	P	$\rightarrow$	$(\neg$	Q	$\wedge$	$R))$
F	F	V	V	V	F	V	V

É falsa.

10 Proposizioni fondamentali

10.1 Tautologie, contraddizioni e proposizioni contingenti

Per ora abbiamo visto come calcolare il valore di verità di una proposizione, noti in partenza i valori di verità delle variabili che la compongono. Come dovremmo agire nel caso in cui non venissero forniti questi dati iniziali? Si potrebbe ancora estrarre qualche informazione dalla proposizione di partenza? Ebbene, aiutandosi con le tavole di verità è comunque possibile trarre qualcosa di utile da una generica proposizione.

Per prima cosa dobbiamo capire che se all'interno di una proposizione sono presenti 2 variabili (ad esempio P e Q), queste daranno vita a 4 scenari diversi. Uno dove entrambe sono vere, uno in cui entrambe sono false, uno dove la prima è vera e la seconda falsa e l'ultimo in cui la prima è falsa e la seconda vera. Si potranno quindi analizzare separatamente questi casi per vedere come le condizioni iniziali influenzano il risultato della proposizione. Proviamo a studiare il seguente enunciato

$$((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$$

Similmente a quanto fatto prima creiamo una tabella per tenere traccia del valore di verità delle sottoproposizioni che analizziamo. L'unica differenza sta nel fatto che questa volta la tabella avrà qualche riga in più, mentre prima potevamo partire assegnando già un valore alle lettere, ora dobbiamo considerare tutti i possibili casi

P	Q	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$					
V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F	F

Prima di proseguire faccio notare che in questo caso il connettivo principale, cioè l'ultimo che dovremo calcolare e quindi quello che fornirà il valore di verità della proposizione, è la prima (e unica) occorrenza dell'implicazione. Ora, senza perdere tempo a spiegare come compertare la tabella ne fornisco subito il risultato finale

P	Q	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$					
V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	F	V

La proposizione è sempre vera, indipendentemente dal valore di verità delle sue variabili (P e Q). Chiameremo questa e le proposizioni che risultano sempre vere **tautologie**. Al contrario, definiamo **contraddizioni** le proposizioni che risultano sempre false, a prescindere dal valore che assegniamo alle sue variabili. Nel caso in cui l'enunciato non fosse nè sempre vero nè sempre falso lo chiameremo **proposizione contingente**.

10.2 Equivalenza semantica

Diremo che due o più enunciati sono semanticamente equivalenti se indipendentemente dal valore di verità delle loro variabili avranno sempre lo stesso valore di verità complessivo. Per fissare meglio le idee consideriamo i seguenti enunciati

$$P \rightarrow Q$$

$$\neg P \vee Q$$

Svolgendo la tavola di verità di queste proposizioni otteniamo

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

da cui si nota immediatamente che le due proposizioni sono **equivalenti semanticamente**.

10.3 Consistenza

Preso un insieme di proposizioni affermiamo che sono **consistenti** se esiste almeno un caso in cui risultano tutte contemporaneamente vere. Di nuovo, per fissare meglio le idee, consideriamo il seguente esempio

$$P \vee \neg Q$$

$$P \rightarrow Q$$

$$P \leftrightarrow \neg Q$$

Per capire se le 3 proposizioni sono consistenti o meno occorre svolgere la loro tavola di verità. Prima di procedere vorrei far notare una cosa. Abbiamo detto che un gruppo di enunciati è consistente se esiste un caso in cui risultano veri tutti gli enunciati del gruppo. Ebbene, se scopriremo che per una certa combinazione uno degli enunciati fosse falso, allora non avrebbe senso valutare gli altri con tale combinazione. È chiaro quindi, che analizzando i tre enunciati separatamente, potremo evitare di studiare tutte le combinazioni, escludendo di volta in volta quelle in cui gli enunciati risulteranno falsi

P	Q	$P \vee \neg Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow \neg Q$
V	V	V	V	F
V	F	V	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

come anticipavo, ho analizzato il primo enunciato e ho ignorato la combinazione P falso e Q vero nell'analisi dei due enunciati successivi. Questo perchè in quel caso la prima proposizione è falsa e indipendentemente dal valore di verità delle altre due, non sarà questa la combinazione che ci permetterà di stabilire la consistenza del gruppo. Alla fine dell'analisi non ho trovato nessun caso in cui risultassero veri tutti e tre gli enunciati, quindi posso affermare che il gruppo è **inconsistente**.

10.4 Validità

Definendo il ragionamento abbiamo parlato dell'argomento e della sua validità. Ora vediamo come formalizzare il concetto di validità. Abbiamo bisogno di un gruppo di proposizioni che fungano da premesse e di una o più proposizioni che fungano da conclusione. Per esempio

Premessa 1: $P \wedge Q$
 Premessa 2: $R \rightarrow \neg P$
 Conclusione: $\neg Q \leftrightarrow R$

Diremo che il ragionamento, cioè l'insieme di proposizioni che lo compongono, è **valido**, se in tutti i casi in cui le premesse risultano vere è vera anche la conclusione. In altre parole, ogni volta che la premessa 1 e la premessa 2 sono vere deve essere vera anche la conclusione, altrimenti il ragionamento non sarà valido.

Per l'ennesima volta occorre costruire la tavola di verità. Inoltre, similmente a quanto fatto prima, escluderò dall'analisi degli enunciati successivi i casi in cui gli enunciati precedenti sono risultati falsi. Si osservi che in questo caso le variabili sono 3, quindi le combinazioni totali saranno $2^3 = 8$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$R \rightarrow \neg P$	$\neg Q \leftrightarrow R$
V	V	V	V	F	-
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	-	-
V	F	F	F	-	-
F	V	V	F	-	-
F	V	F	F	-	-
F	F	V	F	-	-
F	F	F	F	-	-

La combinazione P vera, Q vera e R falsa (seconda riga) è l'unica per cui le premesse sono entrambe vere. In tal caso la conclusione risulta vera, quindi possiamo affermare che il ragionamento è valido.

10.5 Alcuni legami fra proposizioni

Per adesso abbiamo visto 6 tipi di proposizioni, in ordine:

- Tautologie
- Contraddizioni
- Contingenti
- Equivalenti semanticamente
- Consistenti
- Valide

Le abbiamo viste separatamente. In questo capitolo vedremo che legami possono crearsi fra esse. In primo luogo consideriamo la tautologia, cioè la proposizione che indipendentemente dal valore di verità delle variabili risulterà sempre vera. È chiaro che

P	(P ∨ ¬ P)				¬	(P ∨ ¬ P)			
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V	V	F

anteponendo ad essa la negazione otterremo un enunciato sempre falso, cioè una contraddizione. Vediamolo con una tavola di verità, studieremo le proposizioni $P \vee \neg P$ e $\neg(P \vee \neg P)$

Si osserva, appunto, il passaggio da tautologia a contraddizione.

Consideriamo ora un gruppo di proposizioni inconsistenti. Sappiamo per ipotesi che non esisterà alcuna combinazione delle variabili di partenza secondo cui gli enunciati di questo gruppo saranno tutti contemporaneamente veri. Questo permette di dedurre che unendo con la congiunzione queste proposizioni otterremo una contraddizione. Nel seguente esempio chiamo A il primo enunciato, B il secondo e C il terzo

P	Q	P	∨	¬	Q	P	→	Q	P	↔	¬	Q	A ∧ (B ∧ C)
V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	F	V	F	F

Infine, esaminiamo un ragionamento valido. Per definizione sappiamo che in tutti i casi in cui le premesse sono vere anche la conclusione sarà vera. Si capisce quindi che, negando la conclusione di un ragionamento valido avremo eliminato tutti i casi in cui l'insieme di enunciati che compongono il ragionamento (premesse + conclusioni) risultano vere contemporaneamente, ottenendo così un gruppo di proposizioni inconsistenti. Per capire meglio riprendiamo l'esempio di prima

Premessa 1: $P \wedge Q$
 Premessa 2: $R \rightarrow \neg P$
 Conclusione: $\neg Q \leftrightarrow R$

ora neghiamo la conclusione

Premessa 1: $P \wedge Q$
 Premessa 2: $R \rightarrow \neg P$
 Conclusione: $\neg(\neg Q \leftrightarrow R)$

svolgiamo la tavola di verità

P	Q	R	P	∧	Q	R	→	¬	P	¬	(¬	Q	↔	R)
V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	V
F	F	V	F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	F	F	F

In conclusione, possiamo notare come non esista caso in cui le 3 colonne evidenziate (corrispondono ai connettivi principali degli enunciati) risultino contemporaneamente vere: le proposizioni sono inconsistenti.

11 Regole di inferenza

Quando ragioniamo non consideriamo mai un solo enunciato, ne mettiamo in catena diversi. Per adesso abbiamo imparato ad analizzare il valore di verità delle singole proposizioni. Sappiamo come trattarle nel caso in cui siano noti i valori delle sue variabili ma sappiamo anche come valutarle nel caso in cui siano ignote le condizioni iniziali. Abbiamo quindi classificato gli enunciati in base alle loro caratteristiche e abbiamo visto alcuni dei legami che sussistono fra enunciati di categorie diverse. Come dicevo inizialmente, quando si compie un ragionamento si parte da una serie di enunciati, detti premesse, che rappresentano ciò che noi già sappiamo e si arriva ad una conclusione, cioè un'informazione non nota fino a quel momento. Un po' come la geometria euclidea, anche la logica è un sistema assiomatico. Questo significa che a partire da alcune verità assolute, ovvie, se ne costruiscono altre meno evidenti per mezzo delle dimostrazioni (o ragionamenti). Nel seguito presenterò 8 regole necessarie allo svolgimento di semplici dimostrazioni.

11.1 Convenzioni di scrittura

Prima di presentare le regole occorre descrivere il sistema che adotteremo per rappresentare in simboli un ragionamento. Consideriamo il seguente semplice esempio

Premessa 1: $P \rightarrow Q$
Premessa 2: P
Conclusione: Q

A parole diremmo: "se è vero che P implica Q , e sappiamo che P è vera allora possiamo concludere che anche Q sia vera". È abbastanza evidente questo fatto, non credo ci sia bisogno di dare spiegazioni. Piuttosto concentriamoci sulla rappresentazione di questo ragionamento. Non possiamo mica perdere tempo a scrivere una sotto l'altra le premesse e le conclusioni. È necessario un sistema più schematico, più conciso. Per prima cosa scriveremo le premesse, tutte nella stessa riga, separandole con una virgola. Una volta terminate queste aggiungeremo il simbolo $/$, che rappresenta simbolicamente la parola "quindi". Per finire aggiungeremo le conclusioni, nel caso in cui fossero più d'una verranno separate da una virgola, come le premesse. Il ragionamento di poco fa, per quanto appena detto, diventa

$$P \rightarrow Q, P / Q$$

11.2 Modus ponens

La prima regola di inferenza che vediamo è quella del **modus ponens**. Anche se a dire la verità l'abbiamo già vista, si tratta di quella che nel precedente paragrafo ho spacciato per "semplice esempio". Noto quindi ciò che permette di dedurre questa regola, vediamo come si inserisce all'interno di una dimostrazione. Per prima cosa abbiamo bisogno di qualcosa da dimostrare, ad esempio

$$(P \rightarrow R) \rightarrow Q, P \rightarrow R / Q$$

In altre parole ci stiamo chiedendo se, prese per buone le prime due proposizioni (premesse), possiamo affermare che la conclusione (in questo caso è Q) sia vera.

Anche per lo sviluppo delle dimostrazioni si è deciso di adottare un preciso sistema. Queste ultime si svilupperanno riga dopo riga. Nelle prime righe inseriremo le premesse o assiomi, cioè le proposizioni di partenza su cui poi basiamo la dimostrazione. Nel nostro caso saranno

- (1) $(P \rightarrow R) \rightarrow Q$ Ass
- (2) $P \rightarrow R$ Ass

Il numero che troviamo all'inizio di ogni riga sarà utile in seguito, quando faremo dei riferimenti. A parole, queste 2 righe, vogliono dire: "le proposizioni $(P \rightarrow R) \rightarrow Q$ e $P \rightarrow R$ sono le verità (assiomi) su cui baserò il resto della dimostrazione". A questo punto non ci vuole nulla per capire che possiamo applicare la regola del modus ponens. Di fatto sappiamo che, nella riga 1, l'antecedente della seconda occorrenza dell'implicazione è vero, pertanto lo sarà anche il conseguente. Questa considerazione viene espressa formalmente in questo modo

- (1) $(P \rightarrow R) \rightarrow Q$ Ass
- (2) $P \rightarrow R$ Ass
- (3) Q 1,2 MP

Nella terza riga abbiamo scritto la conclusione a cui siamo arrivati applicando il modus ponens (MP) alle righe 1 e 2. Essendo giunti alla conclusione la dimostrazione può terminare qua. Facciamo un altro esempio, per fissare meglio le idee

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P/R$$

A parole potrebbe essere una cosa del tipo: se Leonardo perde a biliardo allora si arrabbia, se Leonardo si arrabbia allora non dorme la notte, Leonardo ha perso una partita a biliardo QUINDI (/) non dormirà questa notte? Proviamo a dimostrarlo usando l'unico strumento a nostra disposizione

- (1) $P \rightarrow Q$ Ass
- (2) $Q \rightarrow R$ Ass
- (3) P Ass

una volta inseriti gli assiomi, o premesse, osserviamo che applicando il modus ponens alle righe 1 e 3 è possibile dedurre che Q è vera

- (1) $P \rightarrow Q$ Ass
- (2) $Q \rightarrow R$ Ass
- (3) P Ass
- (4) Q 1,3 MP

l'ultimo passaggio consiste nell'applicare nuovamente il modus ponens alle righe 2 e 4, ottenendo così la tesi

- (1) $P \rightarrow Q$ Ass
- (2) $Q \rightarrow R$ Ass
- (3) P Ass
- (4) Q 1,3 MP
- (5) R 2,4 MP

Ahimè, Leonardo non dormirà.

11.3 Modus tollens

Il **modus tollens** è molto simile al precedente. Afferma che se P implica Q e Q non si è verificata allora non si sarà verificata neanche P . Per esempio, se quando perdo una partita a scacchi mi arrabbio, e in questo momento non sono arrabbiato allora per forza non ho perso una partita a scacchi (altrimenti mi sarei arrabbiato!). Espresso formalmente diventa

$$P \rightarrow Q, \neg Q / \neg P$$

D'ora in poi, dopo aver presentato la regola, farò sempre un esempio di utilizzo. Trovo che in questi casi siano particolarmente chiarificatori. Vogliamo dimostrare che

$$P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow R, \neg Q / R$$

la dimostrazione sarà

(1)	$P \rightarrow Q$	Ass
(2)	$\neg P \rightarrow R$	Ass
(3)	$\neg Q$	Ass
(4)	$\neg P$	1,3 MT
(5)	R	2,4 MP

Non la commento, si spiega da sola.

11.4 Regola di congiunzione

Se due cose sono vere separatamente allora lo saranno anche congiuntamente. Questo è ciò che afferma la regola di **congiunzione**. Nel linguaggio formale avremo

$$P, Q / P \wedge Q$$

Se P = "ho passato l'esame" e Q = "ho preso 30 in quell'esame" allora possiamo dedurre che sarà vera anche $P \wedge Q$ = "ho passato l'esame e ho preso 30". Dimostriamo ora che

$$P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \neg Q, R / (\neg Q \wedge R) \wedge (\neg P \wedge S)$$

Svolgendo i soliti passaggi otterremo la conclusione

(1)	$P \rightarrow Q$	Ass
(2)	$R \rightarrow S$	Ass
(3)	$\neg Q$	Ass
(4)	R	Ass
(5)	$\neg P$	1,3 MT
(6)	S	2,4 MP
(7)	$\neg Q \wedge R$	3,4 Cong
(8)	$\neg P \wedge S$	5,6 Cong
(9)	$(\neg Q \wedge R) \wedge (\neg P \wedge S)$	7,8 Cong

11.5 Regola di semplificazione

La regola di **semplificazione** afferma che quando due cose sono vere congiuntamente allora sono vere anche separatamente. È il contrario della precedente. Per verificarla basta osservare la tavola di verità della congiunzione. Lì si vede che la generica proposizione $P \wedge Q$ è vera solo quando sia P che Q sono vere. Nel sistema di rappresentazione dei ragionamenti che abbiamo adottato avremo

$$P \wedge Q / P, Q$$

È il primo caso in cui abbiamo due elementi dopo il simbolo "/", cioè tra le conclusioni. Questo però non ci sorprende. Anche qui, applichiamo la regola con un esempio

$$P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \neg Q \wedge \neg S / \neg P \wedge \neg R$$

(1)	$P \rightarrow Q$	Ass
(2)	$R \rightarrow S$	Ass
(3)	$\neg Q \wedge \neg S$	Ass
(4)	$\neg Q$	3 Semp
(5)	$\neg S$	3 Semp
(6)	$\neg P$	1,4 MT
(7)	$\neg R$	2,5 MT
(8)	$\neg P \wedge \neg R$	6,7 Cong

11.6 Regola di addizione

La regola di **addizione** riguarda la disgiunzione. Afferma che quando una cosa è vera allora sarà vera anche quella cosa o un'altra. Questa volta potrebbe sembrare un pò ambigua la definizione a parole. Capiamoci meglio, la regola dice che se P è vera allora $P \vee Q$ sarà a sua volta vera. Ma questo è evidente, basta infatti che almeno uno tra i due elementi uniti dalla disgiunzione sia vero affinché la proposizione risulti vera nel suo complesso. Nel nostro caso l'elemento vero è P. Esprimiamo anche questa regola nel linguaggio formale

$$P / P \vee Q$$

Il seguente esempio ne chiarirà, spero definitivamente, il significato

$$P \rightarrow Q, P / ((R \wedge) \leftrightarrow (\neg Q \vee S)) \vee ((T \vee Q) \wedge (P \vee S))$$

(1)	$P \rightarrow Q$	Ass
(2)	P	Ass
(3)	Q	1,2 MP
(4)	$P \vee S$	2 Add
(5)	$T \vee Q$	3 Add
(6)	$(P \vee S) \wedge (T \vee Q)$	4,5 Cong
(7)	$((R \wedge P) \leftrightarrow (\neg Q \vee S)) \vee ((T \vee Q) \wedge (P \vee S))$	6 Add

11.7 Regola del sillgismo disgiuntivo

Il principio del **sillogismo disgiuntivo** afferma che se hai due opzioni (almeno una delle due deve essere vera) e ne puoi scartare una (è falsa), allora stai certo che l'altra è vera. Ma è chiaro! Se così non fosse le opzioni di partenza sarebbero entrambe false, e quest violerebbe l'ipotesi iniziale. Formalmente lo esprimiamo così

$$P \vee Q, \neg P / Q$$

Applichiamo la regola nel seguente esempio

$$P \rightarrow \neg Q, P \vee R, Q \vee S, \neg R / \neg P \vee S$$

- | | | |
|-----|------------------------|--------|
| (1) | $P \rightarrow \neg Q$ | Ass |
| (2) | $P \vee R$ | Ass |
| (3) | $Q \vee S$ | Ass |
| (4) | $\neg R$ | Ass |
| (5) | P | 2,4 SD |
| (6) | $\neg Q$ | 1,5 MP |
| (7) | S | 3,6 SD |
| (8) | $\neg P \vee S$ | 7 Add |

11.8 Regola del sillogismo ipotetico

La regola del **sillogismo ipotetico** dichiara che se sappiamo che da P deriva Q e da Q deriva R, allora siamo certi che da P deriverà R. É una sorta di proprietà transitiva della logica. Si esprime in simboli come

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R / P \rightarrow R$$

E ora l'ennesimo esempio chiarificatore

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \neg R / \neg P \wedge \neg Q$$

- | | | |
|-----|------------------------|----------|
| (1) | $P \rightarrow Q$ | Ass |
| (2) | $Q \rightarrow R$ | Ass |
| (3) | $\neg R$ | Ass |
| (4) | $P \rightarrow R$ | 1,2 SI |
| (5) | $\neg P$ | 3,4 MT |
| (6) | $\neg Q$ | 2,3 MT |
| (7) | $\neg P \wedge \neg Q$ | 5,6 Cong |

11.9 Regola del dilemma costruttivo

A parole, la regola del **dilemma costruttivo**, asserisce che se sappiamo che "P o Q" è vera e che da P deriva S mentre da Q deriva R allora siamo certi che "Q o R" sarà vera. Può aiutare la comprensione immaginarsi uno schema di questo tipo

$$\begin{array}{ccc} P & \text{o} & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \text{o} & S \end{array}$$

Verrà dunque formalizzata in questo modo

$$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S / R \vee S$$

E infine, l'esempio chiarificatore

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, S \rightarrow T, P \vee S / R \vee T$$

- | | | |
|-----|-------------------|----------|
| (1) | $P \rightarrow Q$ | Ass |
| (2) | $Q \rightarrow R$ | Ass |
| (3) | $S \rightarrow T$ | Ass |
| (4) | $P \vee S$ | Ass |
| (5) | $P \rightarrow R$ | 1,2 SI |
| (6) | $R \vee T$ | 4,5,3 DC |

Vorrei far notare che in questo esempio e nei precedenti, ho proposto una delle tante vie per arrivare alla conclusione. Mano a mano che vengono introdotti nuovi strumenti sarà possibile arrivare al medesimo risultato applicando in ordini diversi regole differenti.

12 Regole di equivalenza

In precedenza abbiamo già visto cosa si intende per proposizioni equivalenti semanticamente. In breve, due enunciati sono equivalenti quando, per ogni combinazione delle variabili enunciative, hanno lo stesso valore di verità. In questo capitolo vedremo alcune regole che permettono di stabilire molto velocemente se due frasi sono equivalenti. In particolare risulteranno utili nelle dimostrazioni, semplificando alcuni passaggi. Prima di entrare nel vivo della questione faccio presente che utilizzeremo il simbolo $\equiv$ per indicare l'equivalenza. In altre parole, scrivere " $P \equiv P$ ", è come dire "P è semanticamente equivalente a P", un'ovvietà!

12.1 Regola di idempotenza

La regola di **idempotenza** afferma che

$$\begin{aligned} P \wedge P &\equiv P \\ P \vee P &\equiv P \end{aligned}$$

infatti quando P è vera sia $P \wedge P$ che $P \vee P$ sono vere. Similmente, quando P è falsa, saranno false anche $P \wedge P$ e $P \vee P$.

12.2 Regola di commutazione

Il principio di **commutazione** dichiara che nella disgiunzione e nella congiunzione l'ordine delle variabili è influente. Formalmente si esprime come

$$\begin{aligned} P \vee Q &\equiv Q \vee P \\ P \wedge Q &\equiv Q \wedge P \end{aligned}$$

Non credo che ci sia bisogno di spiegare questo fatto, i problemi arriveranno dopo.

12.3 Regola di associazione

Similmente alla proprietà associativa della somma e della moltiplicazione, la regola di **associaizone** in logica afferma che il valore di verità di una frase non cambia in base all'ordine in cui raggruppo i suoi elementi. In simboli avremo

$$(P \vee Q) \vee S \equiv P \vee (Q \vee S)$$
$$(P \wedge Q) \wedge S \equiv P \wedge (Q \wedge S)$$

12.4 Regola di assorbimento

La regola di **assorbimento** dichiara che

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$
$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

Da questo punto in poi, trovando inutile il tentativo di spiegare il senso di queste regole con il linguaggio naturale, dimostrerò la loro validità con le tavole di verità. Nelle prime due colonne, al solito, metterò i valori di verità delle variabili P e Q. Nelle successive studierò le due proposizioni, evidenziando le colonne relative al connettivo principale (cioè quello che permette di stabilire il valore di verità dell'enunciato)

P	Q	$P \vee (P \wedge Q)$				
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F

P	Q	$P \wedge (P \vee Q)$				
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F

12.5 Regola di distribuzione

Come la proprietà distributiva della somma e della moltiplicazione, anche la regola di **distribuzione** permette di "distribuire" un connettivo logico rispetto ad un altro. Dalla definizione si capirà meglio

$$P \vee (Q \wedge S) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee S)$$
$$P \wedge (Q \vee S) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge S)$$

A seguire le dimostrazioni

P	Q	S	P	∨	(Q	∧	S)	(P	∨	Q)	∧	(P	∨	S)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	V	F	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

P	Q	S	P	∧	(Q	∨	S)	(P	∧	Q)	∨	(P	∧	S)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

12.6 Leggi di De Morgan

In logica matematica sono particolarmente famose. Queste leggi di **De Morgan** sono le prime regole di equivalenza che vediamo ad introdurre la negazione. Vediamone gli enunciati

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

Permettono, in un certo senso, di svincolare due variabili unite dalla negazione. Di seguito la dimostrazione

P	Q	S	¬	(P	∨	Q)	¬	P	∧	¬	Q
V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	F

12.7 Regola di implicazione

La regola di **implicazione** è una soltanto, e afferma quanto segue

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

In questo specifico caso può essere utile, oltre alla dimostrazione, vedere un esempio nel linguaggio naturale. Supponiamo che P corrisponda alla frase "piove" e Q alla frase

P	Q	S	$\neg$	(P	$\wedge$	Q)	$\neg$	P	$\vee$	$\neg$	Q
V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	F

"prendo l'ombrello". $P \rightarrow Q$ si traduce quindi con "se piove allora prendo l'ombrello", mentre $\neg P \vee Q$ vuol dire "non piove oppure prendo l'ombrello". Ma non vogliono forse dire la stessa cosa? Senza perdere altro tempo su questo esempio, il cui scopo è solo quello di aiutare a capire meglio la natura della regola, procediamo con la dimostrazione

P	Q	S	P	$\rightarrow$	Q	$\neg$	P	$\vee$	Q
V	V	V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F

12.8 Regola di contrapposizione

La regola di **contrapposizione**, anche nota come principio della contronominale, assicura che

$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$

svolgendo le tavola di verità delle due proposizioni potremo osservare come siano effettivamente equivalenti

P	Q	S	P	$\rightarrow$	Q	$\neg$	Q	$\rightarrow$	$\neg$	P
V	V	V	V	V	V	F	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	F

12.9 Regola dell'esportazione

Il principio di **esportazione** asserisce quanto segue

$$P \rightarrow (Q \rightarrow S) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow S$$

malgrado non sia in grado di capire da dove possa essere uscito il nome della regola, vorrei far osservare un fatto. La prima proposizione è una catena di implicazioni, la seconda non fa altro che accorciare tale catena. Nell'accorciare la catena viene mantenuta la stessa conclusione (S) e vengono condensate nell'antecedente le condizioni necessarie per poter percorrere la catena (in questo caso P e Q). Detto ciò, la dimostrazione

P	Q	S	P	$\rightarrow$	(Q	$\rightarrow$	S)	(P	$\wedge$	Q)	$\rightarrow$	S
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F

12.10 Regola dell'equivalenza

Concludiamo questa breve carrellata di regole di equivalenza semantica con l'omonima regola dell'**equivalenza**. Questa può essere formulata in due modi, il primo ci dovrebbe già essere familiare. Ad ogni modo ecco l'enunciato

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Il fatto che l'equivalenza, o doppia implicazione, potesse essere scomposta nelle due implicazioni ci era già noto. Meno intuitiva è forse la seconda formulaione. Se ripensiamo alla tavola di verità dell'equivalenza, che per semplicità riporto qui sotto

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
vera	vera	vera
vera	falsa	falsa
falsa	vera	falsa
falsa	falsa	vera

notiamo che $P \leftrightarrow Q$ è vera quando P e Q hanno lo stesso valore. E questo è proprio ciò che stiamo affermando scrivendo $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$! Stiamo dicendo "o P e Q sono vere o P e Q sono false". Aldilà di questa spiegazione, di seguito proporrò la dimostrazione formale

P	Q	P	$\leftrightarrow$	Q	(P	$\rightarrow$	Q)	$\wedge$	(Q	$\rightarrow$	P)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	F

P	Q	P	$\leftrightarrow$	Q	(P	$\wedge$	Q)	$\vee$	($\neg$	P	$\wedge$	$\neg$	Q)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V	F