

I LINGUAGGI PREDICATIVI

NEL PRECEDENTE PICCOLO CORSO DI LOGICA ABBIAMO TRATTATO I LINGUAGGI ENUNCIATIVI. ESSI PREVEDONO UNA DIRETTA SOSTITUZIONE DELLE PROPOSIZIONI CON LE LETTERE $(P, Q, R, S \dots)$. QUESTA OPERAZIONE LIMITA TOTALMENTE LA POSSIBILITÀ DI ESPRIMERE QUALCHE DETTAGLIO SULLA PROPOSIZIONE IN QUESTIONE. CONSIDERIAMO, PER ESEMPIO, IL RAGIONAMENTO

$(P1)$ TUTTI GLI UOMINI SONO MORTALI

$(P2)$ SOCRATE È UN UOMO

(C) SOCRATE È MORTALE

IL MASSIMO CHE POSSIAMO OTTENERE CON IL LINGUAGGIO ENUNCIATIVO È UNA FORMALIZZAZIONE DEL TIPO

$P, Q / R$

CHE CHIARAMENTE NON È LO SCHEMA DI UN RAGIONAMENTO CORRETTO. ABBIAMO BISOGNO DI UN LINGUAGGIO CHE SIA IN GRADO DI ESIBIRE LA STRUTTURA INTERNA (ALMENO IN PARTE) DEGLI ENUNCIATI. LI CHIAMEREMO LINGUAGGI PREDICATIVI O ELEMENTARI.

COSTANTI INDIVIDUALI E PREDICATIVE

RIPRENDIAMO L'ESEMPIO SULLA MORTALITÀ DI SOCRATE, DOVENDO SEMI-FORMALIZZARLO POTREMMO SCRIVERE UNA COSA DEL TIPO

$(P1)$ TUTTO CIÒ CHE HA F , HA G

$(P2)$ m HA F

(C) m HA G

DOVE F RAPPRESENTA LA PROPRIETÀ DI ESSERE UOMO, G QUELLA DI ESSERE MORTALE
E m INDICA SOCRATE.

IN REALTÀ, F E G POSSONO RAPPRESENTARE QUALSIASI PROPRIETÀ E VERRANNO QUINDI
CHIAMATE **COSTANTI PREDICATIVE**. SIMILMENTE, m PUÒ INDICARE UN INDIVIDUO QUALSIASI,
PERCIÒ SARI' DETTA **COSTANTE INDIVIDUALE**.

SI CONVIENE, IN LOGICA, CHE PER DIRE "L'INDIVIDUO x HA LA PROPRIETÀ S "
VENGA USATA LA NOTAZIONE

$$S(x), Sx$$

IN ALCUNI CASI VENGONO OMESSE LE PARENTESI.

SPESSE PERÒ NELLE ENUNCIATI SEMPLICI CAPITA CHE SI AFFERMA UNA RELAZIONE TRA
INDIVIDUI, PER ESEMPIO IN "VITTORIO È FIGLIO DI ANGELA". IN QUESTO CASO ASSEGNAMO
ALLA COSTANTE PREDICATIVA F LA RELAZIONE "... È FIGLIO DI ..." MENTRE VITTORIO
E ANGELA SARANNO RAPPRESENTATI DALLE COSTANTI INDIVIDUALI v, a . SI AVRÀ QUINDI

$$F(v, a)$$

SI OSSERVI CHE DICENDO $F(a, v)$ OTTERREMMO UNA FRASE FALSA, L'ORDINE DELLE
COSTANTI INDIVIDUALI CONTA.

È INOLTRE POSSIBILE COMBINARE QUESTI ENUNCIATI SEMPLICI CON I CONNETTIVI LOGICI.
ASSEGNANDO A U LA PROPRIETÀ DI ESSERE UN UOMO E A M QUELLA DI ESSERE
MORTALE SI PUÒ TRADURRE "SE SOCRATE È UN UOMO ALLORA È MORTALE" COSÌ

$$U(s) \rightarrow M(s)$$

UN ALTRO ESEMPIO POTREBBE ESSERE "SOCRATE NON È MORTALE" CHE DIVENTA $\neg M(s)$.

DESCRIZIONI DEFINITE ED ESPRESSIONI FUNTORIALI

SPESSE PUÒ CAPITARE CHE AN AL POSTO DI RIFERIRSI DIRETTAMENTE AD UN INDIVIDUO, LO SI DESCRIVA, PER ESEMPIO "IL FIGLIO DI ANGELA MODOTTI" IDENTIFICA IL SOTTOSCRITTO SENZA CHIAMARLO DIRETTAMENTE. IN LOGICA QUESTE VENGONO CHIAMATE **DESCRIZIONI DEFINITE**, IN QUANTO DESCRIVONO UN SINGOLO INDIVIDUO. ALL'INTERNO DI QUESTE TROVIAMO UNA O PIÙ COSTANTI INDIVIDUALI A CUI VIENE ASSEGNATA UNA PROPRIETÀ. IN UN CERTO SENSO POSSIAMO PENSARE ALLA FRASE DI ESEMPIO COME ESPRIMENTE L'INDIVIDUO (10) CHE SI OTTIENE APPLICANDO LA FUNZIONE "CHE ASSOCIA AD OGNI INDIVIDUO IL FIGLIO AD ANGELA MODOTTI". PER QUESTO MOTIVO FORMALIZZEREMO QUELL'ENUNCIATO COSÌ

$$\text{dim } f(d)$$

DOVE d È LA COSTANTE INDIVIDUALE CHE RAPPRESENTA ANGELA MODOTTI E f È IL **FUNTORE** CHE ESPRIME LA FUNZIONE "IL FIGLIO DI ...". SI POSSONO ANCHE AVERE DESCRIZIONI ANNIDATE IN ALTRE, COME NEL CASO "IL VINCITORE DELLA PARTITA FRA VITTORIO E LEONARDO". FORMALIZZANDOLA AVREMO

$$w(p(v, l))$$

DOVE w È IL FUNTORE CHE ESPRIME LA FUNZIONE "IL VINCITORE DI ...", p ESPRIME "LA PARTITA FRA ... E ..." E v, l SONO LE COSTANTI INDIVIDUALI PER VITTORIO E LEONARDO.

FUNZIONI ENUNCIATIVE

CON LA NOTAZIONE INTRODOTTA FINORA SIAMO IN GRADO DI FORMALIZZARE SOLO GLI ENUNCIATI SINGOLARI (CHE HANNO PER SOGGETTO UN SINGOLO INDIVIDUO). TUTTAVIA ESISTONO ANCORA 2 CLASSI DI PROPOSIZIONI CHE NON NASCIAMO ANCORA

A RAPPRESENTARE: GLI ENUNCIATI PARTICOLARI E UNIVERSALI.

PER FARLO OCCORRE INTRODURRE IL CONCETTO DI **VARIABILE INDIVIDUALE** (SARANNO INDICATE CON $x, y, z, \dots$), CIOÈ SIMBOLI CHE USEREMO PER DESIGNARE IN UN CERTO MONDO DEGLI INDIVIDUI. PERTANTO, MENTRE

$$F(s)$$

CON s COSTANTE INDIVIDUALE, RAPPRESENTA UN ENUNCIATO, LA FORMULA

$$F(x)$$

NON SARÀ UN ENUNCIATO. BENSÌ UNA **FUNZIONE ENUNCIATIVA**, CHE SARÀ ENUNCIATO NEL MOMENTO IN CUI SI SOSTITUISCERÀ LA VARIABILE INDIVIDUALE CON UNA COSTANTE INDIVIDUALE. CHIARAMENTE UNA FUNZIONE ENUNCIATIVA PUÒ AVERE $n \geq 0$ VARIABILI ENUNCIATIVE.

1 QUANTIFICATORI

SOSTITUIRE LE VARIABILI INDIVIDUALI CON COSTANTI INDIVIDUALI NON È L'UNICO MODO PER PASSARE DA FUNZIONI ENUNCIATIVE A ENUNCIATI. È ANCHE POSSIBILE QUANTIFICARE LA VARIABILE. IMPRENDIAMO LA PRIMA PREMessa DEL RAGIONAMENTO SU SOCRATE

(P1) TUTTI GLI UOMINI SONO MORTALI

SEMI-FORMALIZZANDO LA AVEVAMO OTTENUTO

(P1) TUTTO CIÒ CHE HA F , HA G

RIFORMULANDOLA POTREBBE DIVENTARE " TUTTI GLI ELEMENTI CHE HANNO F ALLORA HANNO G " O " SE QUALCOSA HA F ALLORA HA ANCHE G ". SIAMO GIÀ IN GRADO DI FORMALIZZARE LA

SECONDA PARTE DI QUESTO ENUNCIATO DENENDO CON L'IMPLICAZIONE 2 FUNZIONI ENUNCIATIVE

$$\text{PER OGNI } x, F(x) \rightarrow G(x)$$

ORA NON CI RESTA CHE INTRODURRE IL SIMBOLO $\forall$, DETTO QUANTIFICATORE UNIVERSALE, IL CUI SIGNIFICATO È APPUNTO "TUTTI", "PER OGNI" O "DATA UN QUALSIASI". L'ENUNCIATO SI PRESENTERÀ IN UNA NELLA FORMA

$$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$$

È ORA IL MOMENTO DI RAPPRESENTARE FORMALMENTE GLI ENUNCIATI PARTICOLARI, AD ESEMPIO

ALCUNI UOMINI SONO CALVI

CHE PUÒ ESSERE FORMULATA COME "ESISTE QUALCOSA CHE È UOMO ED È CALVO". CHIAMATE U E C RISPIETTIVAMENTE LE COSTANTI PREDICATIVE PER LE PROPRIETÀ DI ESSERE UOMO ED ESSERE CALVO, POSSIAMO FORMALIZZARE LA SECONDA PARTE DELL'ENUNCIATO

$$\text{ESISTE } x \text{ TALE CHE } U(x) \wedge C(x)$$

PER TRADURRE LA PRIMA PARTE INTRODUCIAMO IL SIMBOLO $\exists$, OVVERO IL QUANTIFICATORE ESISTENZIALE, SI AVrà

$$\exists x (U(x) \wedge C(x))$$

ALCUNI POTREBBERO ESSERE TENTATI DI TRADURRE IL PRECEDENTE ESEMPIO USANDO IL CONDIZIONALE AL POSTO DELLA CONGIUNZIONE, COSÌ

$$\exists x (U(x) \rightarrow C(x))$$

MA CIÒ SAREBBE SBAGLIATO. INFATTI SI STA DICENDO CHE ESISTE QUALCOSA CHE SE È UOMO ALLORA È CALVO, TUTTAVIA QUESTO QUALCOSA POTREBBE NON ESISTERE.

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO LA FRASE "OGNI RAGAZZO AMA UNA CERTA RAGAZZA". ESSA SI LASCIA INTERPRETARE IN ALMENO 2 MODI

- TUTTI I RAGAZZI AMANO LA STESSA RAGAZZA
- TUTTI I RAGAZZI AMANO UNA QUALCHE RAGAZZA, NON NECESSARIAMENTE LA STESSA

EBBENE COME VEDREMO PÀ POCO IN LOGICA QUESTA AMBIGUITÀ NON SUSSISTE. INIZIAMO CON LA TRADUZIONE DELLA PRIMA. ~~"TUTTI I RAGAZZI AMANO LA STESSA RAGAZZA"~~

CHIAMIAMO F , M , A LE COSTANTI PREDICATIVE PER ESTRIMARE LA PROPRIETÀ DI ESSERE FEMMINA, DI ESSERE MASCHIO E LA RELAZIONE D'AMORE. IL RISULTATO SARÀ

$$\exists y (F(y) \wedge \forall x (M(x) \rightarrow A(x, y)))$$

A PAROLE È: ESISTE UN y CHE È DONNA E PER OGNI x , ^{SE x} ~~NON~~ È MASCHIO ALLORA x AMA y .

LA SECONDA INTERPRETAZIONE NÓ ESSERE FORMULIZZATA COSÌ

$$\forall x (M(x) \rightarrow \exists y (F(y) \wedge A(x, y)))$$

OVÉ PER OGNI x , SE x È UN MASCHIO ALLORA ESISTE UN y CHE È DONNA E È AMATA DA x .

L'IDENTITÀ

NELLA LINGUA ITALIANA IL VERBO ESSERE HA PIÙ SIGNIFICATI. PUÒ ESSERE USATO PER PREDICARE UNA CARATTERISTICA, COME IN "VITTORIO È FORTE A BILIARDO" O PER STABILIRE UN RAPPORTO DI IDENTITÀ, COME IN "VITTORIO È IL VINCITORE DEL TORNEO DI BILIARDO". ABBIAMO GIÀ VISTO COME FORMALIZZARE GLI ENUNCIATI DEL PRIMO TIPO, DETTA F LA PROPRIETÀ DI ESSERE FORTE A BILIARDO E v IL SIMBOLO ASSOCIATO ALL'INDIVIDUO VITTORIO AVREMO

$$F(v)$$

PER FORMALIZZARE LA SECONDA FRASE INTRODUCIAMO IL SIMBOLO DELL'UGUAGLIANZA: $=$. DETTO w IL PUNTATORE CHE ESPRIME LA FUNZIONE "IL VINCITORE DI ..." E b LA COSTANTE INDIVIDUALE PER INDICARE IL TORNEO DI BILIARDO, AVREMO

$$v = w(b)$$

PER INDICARE INVECE CHE 2 ELEMENTI SONO DIFFERENTI SI USERÀ IL SIMBOLO DELLA DISUGUAGLIANZA $\neq$. QUEST'ULTIMO PUÒ ESSERE DEFINITO COME

$$x \neq y := \neg (x = y)$$

QUESTE 2 AGGIUNTE AL NOSTRO LINGUAGGIO RAPPRESENTANO UN IMPORTANTE AMPLIAMENTO DEGLI ENUNCIATI DESCRIVIBILI. IN PARTICOLARE ORA POTREMO FARE AFFERMAZIONI NUMERICAMENTE DETERMINATE SU OGGETTI. DI SEGUITO NE FAREMO ALCUNI ESEMPLI.

ESISTENZA DI ALMENO 2 ELEMENTI (CON UNA PROPRIETÀ F)

$$\exists x \exists y (F(x) \wedge F(y) \wedge x \neq y)$$

IN SOSTANZA SI È DETTO CHE ESISTONO 2 ELEMENTI (x, y) CON LA PROPRIETÀ F DIVERSI TRA LORO.

ESISTENZA DI ALMENO 3 ELEMENTI (CON UNA PROPRIETÀ F)

$$\exists x \exists y \exists z (F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z)$$

ESISTENZA DI ESATTAMENTE 1 ELEMENTO (CON UNA PROPRIETÀ F)

DIRE CHE ESISTE ESATTAMENTE 1 ELEMENTO È COME Affermare CHE NE ESISTE ALMENO 1 E AL MASSIMO 1. IL PRIMO CONGIUNTO È FACILE, SI FORMALIZZA COME

$$\exists x (F(x))$$

PER IL SECONDO CONGIUNTO SI RICORRE AD UN PURO ESPEDIENTE, CIOÈ SI Afferma CHE PER OGNI x, y PER CUI VALE LA PROPRIETÀ F NUMERICA SI HA CHE $x = y$. IN SIMBOLI

$$\forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \rightarrow x = y)$$

CONGIUNGENDO I 2 ENUNCIATI OTTENIAMO

$$\exists x (F(x)) \wedge \forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \rightarrow x = y)$$

O PIÙ BREVEMENTE

$$\exists x (F(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow x = y))$$

IL LINGUAGGIO PREDICATIVO, AMPIATO CON QUESTI SIMBOLI $(=, \neq)$, È DETTO QUASIPREDICATIVO.

FORMULE BEN FORMATE

SIMILMENTE A QUANTO ABBIAMO FATTO PER IL LINGUAGGIO ENUNCIATIVO DAREMO ANCHE IN QUESTO CASO IL CATALOGO DEI SIMBOLI E LE REGOLE DI FORMAZIONE CHE DEFINISCONO SINTATTICAMENTE LE FORMULE BEN FORMATE DEL LINGUAGGIO PREDICATIVO.

I SIMBOLI

ANCHE PER IL LINGUAGGIO PREDICATIVO DIVIDIAMO I SIMBOLI IN 3 ALFABETI:

- ALFABETO LOGICO: INCLUDE I 5 CONNETTIVI LOGICI ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) E I 2 QUANTIFICATORI ($\exists, \forall$). IN GENERALE CI SI RIFERISCE A QUESTI 7 SIMBOLI COME OPERATORI LOGICI.
- ALFABETO DESCRITTIVO: INCLUDE LE VARIABILI INDIVIDUALI ($x, y, z, \dots$), LE COSTANTI INDIVIDUALI ($s, m, o, v, \dots$), LE COSTANTI PREDICATIVE ($F, S, G, \dots$), E I FUNTORI (QUELLI DELLE DESCRIZIONI DEFINITE).
- ALFABETO AUSILIARIO: INCLUDE LE PARENTESI TONDE E LA VIRGOLA.

I TERMINI

PRIMA DI DEFINIRE LE REGOLE DI BUONA FORMAZIONE INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI **TERMINI INDIVIDUALE**. IN TALE INSIEME TROVIAMO TUTTE LE COSTANTI INDIVIDUALI, LE VARIABILI INDIVIDUALI E LE DESCRIZIONI DEFINITE DI INDIVIDUI CHE SI POSSANO IMMAGINARE. PER DEFINIRE L'INSIEME PROCEDIAMO PER INDUZIONE

(BASE) SONO TERMINI INDIVIDUALI LE VARIABILI E LE COSTANTI INDIVIDUALI.

(PASSO) SE $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ SONO TERMINI INDIVIDUALI E f È UN FUNTORE n -ARIO ALLORA $f(t_1, \dots, t_n)$ È UN TERMINE INDIVIDUALE.

(CONCLUSIONE) TUTTO E SOLO QUANTO SPECIFICATO NELLA BASE E NEL PASSO È UN TERMINE INDIVIDUALE.

LE FORMULE

A QUESTO PUNTO POSSIAMO DEFINIRE, SEMPRE PER INDUZIONE, LE REGOLE DI BUONA FORMAZIONE DI QUESTO LINGUAGGIO. ANZITUTTO DEFINIAMO LA **FORMULA ATOMICA**, CIOÈ

$$P(t_1, \dots, t_n)$$

CON P GENERICA COSTANTE PREDICATIVA E $t_1, \dots, t_n$ GENERICA n -UPLA DI TERMINI INDIVIDUALI. DI SEGUITO LA DEFINIZIONE DI FORMULA BEN FORMATA:

(BASE) OGNI FORMULA ATOMICA È UNA FORMULA BEN FORMATA

(PASSO) SE α È BEN FORMATA, $\neg \alpha$ È BEN FORMATA

SE α È BEN FORMATA, $(\alpha \wedge \beta)$ SONO BEN FORMATE

SE α E β SONO BEN FORMATE, $(\alpha \vee \beta)$ SONO BEN FORMATE

SE α E β SONO BEN FORMATE, $(\alpha \rightarrow \beta)$ SONO BEN FORMATE

SE α E β SONO BEN FORMATE, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ SONO BEN FORMATE

SE α È BEN FORMATA E x UNA VARIABILE INDIVIDUALE, $\forall x \alpha$ È BEN FORMATA

SE α È BEN FORMATA E x UNA VARIABILE INDIVIDUALE, $\exists x \alpha$ È BEN FORMATA

(CONCLUSIONE) TUTTO E SOLO QUANTO QUANTO SPECIFICATO NELLA BASE E NEL PASSO È UNA FORMULA BEN FORMATA.

FACCIO OSSERVARE, IN ULTIMA ANALISI, CHE IL LINGUAGGIO PREDICATIVO, ~~MA~~ CONTENENDO AL SUO INTERNO TUTTI I SIMBOLI DEL LINGUAGGIO ENUNCIATIVO E TUTTE LE SUE REGOLE DI FORMAZIONE, PUÒ ESSERE CONSIDERATO A TUTTI GLI EFFETTI UN'ESTENSIONE DI QUEST'ULTIMO.

FORMULE APERTE E CHIUSE

NEL LINGUAGGIO PREDICATIVO DIVIDIAMO LE VARIABILI (INDIVIDUALI) IN LIBERE E VINCOLATE. QUESTO A SECONDA CHE SIANO O MENO ASSOCIATE AD UN QUANTIFICATORE. LA STESSA VARIABILE PUÓ ESSERE LIBERA E VINCOLATA IN OCCORRENZE DIVERSE, PER ESEMPIO IN

$$F(x) \wedge \forall x (G(x))$$

LA PRIMA OCCORRENZA DI x É LIBERA MENTRE LA SECONDA (NON SI CONSIDERA QUELLA IMMEDIATAMENTE SUCCESSIVA AL SIMBOLO DEL QUANTIFICATORE) É VINCOLATA.

CHIAMEREMO **FORMULA APERTA** UNA FORMULA CHE PRESENTA ALMENO UNA VARIABILE CON UN'OCCORRENZA LIBERA. SCRIVEREMO

$$\mathcal{L}[x]$$

PER INDICARE CHE IN $\mathcal{L}$ OCCORRE LIBERA LA VARIABILE x .

AL CONTRARIO, CHIAMEREMO **FORMULA CHIUSA**, UNA FORMULA CHE O NON PRESENTA VARIABILI O OCCORRONO TUTTE VINCOLATE, PER ESEMPIO IN

$$\forall x \exists y M(x, y), \quad \forall x (C(x) \rightarrow \neg V(x))$$

DI FATTO QUESTE FORMULE SONO DEI CI ENUNCIATI.

SIMILMENTE SI DEFINISCONO I **TERMINI APERTI**, CIÉ TERMINI INDIVIDUALI CHE CONTENGONO DELLE VARIABILI E I **TERMINI CHIUSI**, CIÉ TERMINI INDIVIDUALI CHE NON CONTENGONO VARIABILI.

FACCIO OSSERVARE INOLTRE CHE LE ULTIME DUE CLAUSOLE DEL PASSO DELLA DEFINIZIONE DI FORMULA BEN FORMATA CONSENTONO LA COSIDDETTA **QUANTIFICAZIONE VACUA**, INFATTI NON VIENE IMPOSTO LA NESSUNA PARTE CHE $\mathcal{L}$ DEBBA AVERE

LA VARIABILE x O DEBBA OCCORRERE LIBERA. QUESTO PERÒ NON PORTA NESSUN PROBLEMA, È UNA QUANTIFICAZIONE INNOCUA.

LA SOSTITUZIONE

UN'ALTRA IMPORTANTE OPERAZIONE SULLE FORMULE È QUELLA DI SOSTITUZIONE DI UNA QUALUNQUE VARIABILE x CON UN TERMINE GENERICO t . LA SOSTITUZIONE SI EFFETTUA SOSTITUENDO TUTTE LE OCCORRENZE LIBERE DELLA VARIABILE CON IL TERMINE, COME NEL SEGUENTE ESEMPIO

$$F(x) \leftrightarrow \neg \neg F(x) \text{ DIVENTA } F(m) \leftrightarrow \neg \neg F(m)$$

INDICHEREMO LA SOSTITUZIONE CON LA NOTAZIONE $\alpha[x/m]$.

IN REALTÀ LA SOSTITUZIONE A VOLTE PUÒ CAUSARE DEI PROBLEMI. RIPRENDENDO L'ESEMPIO IN CUI M RAPPRESENTAVA LA FUNZIONE "... È LA MADRE DI ...", POSSIAMO SCRIVERE

$$\exists x M(x, y)$$

ED EFFETTUANDO LA SOSTITUZIONE $\alpha[y/x]$ OTTERREMO

$$\exists x M(x, x)$$

CHE SEMANTICAMENTE PERDE DI SIGNIFICATO (UN INDIVIDUO È MADRE DI SE STESSO). PER QUESTO MOTIVO SI RESTRINGE LA POSSIBILITÀ DI EFFETTUARE SOSTITUZIONI AD ALCUNI CASI SPECIFICI. t POTRÀ ESSERE SOSTITUITO A x SE E SOLO SE OGNI OCCORRENZA LIBERA DI x È TALE CHE OGNI SOTTOPRANFILA IN CUI COMPARE NON INIZIA CON UN QUANTIFICATORE.

DEDUZIONI NATURALI

IN QUESTO CAPITOLO PRESENTERO' UN APPARATO DI REGOLE, DETTO **SISTEMA FORMALE**, CHE CI PERMETTERA' DI STABILIRE LA VALIDITA' DI UN RAGIONAMENTO.

OGNI SISTEMA FORMALE E' IMPIANTATO SU UN LINGUAGGIO, NEL NOSTRO CASO IL LINGUAGGIO IN QUESTIONE SARA' QUELLO PREDICATIVO.

IN REALTA', PRIMA DI PRESENTARE IL SISTEMA FORMALE DEFINITIVO, DESCRIVERO' BREVEMENTE UN ALTRO TIPO DI SISTEMA.

SISTEMA ASSIOMATICO

COME IN TUTTI I SISTEMI DI TIPO ASSIOMATICO, ALLA BASE TROVIAMO GLI **ASSIOMI** (O POSTULATI). QUESTI ULTIMI SONO DEGLI ENUNCIATI ASSUNTI VERI SENZA DIMOSTRAZIONE. E' IMMEDIATO IL PARALLELO CON LA GEOMETRIA EUCLIDEA, CHE PREVEDOVA I FAMOSI 5 POSTULATI DI EUCLIDE COME BASE ASSIOMATICA DELLA MATERIA. SUCCESSIVAMENTE, A PARTIRE DALLI ASSIOMI, VENGONO APPLICATE LE **REGOLE D'INFERENZA** PER OTTENERE DEI TEOREMI. QUESTE REGOLE SI APPLICANO AD UNA SERIE DI PREMESSE E PERMETTONO DI DERIVARE UNA CONCLUSIONE, IN GENERE LA RAPPRESENTEREMO COSI'

$$\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\alpha}$$

DOVE $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ SONO LE PREMESSE E α E' LA CONCLUSIONE.

CREIAMO ORA, A SCOPO CHIARIFICATORIO, UN PICCOLO SISTEMA FORMALE DOTATO DI 1 REGOLA D'INFERENZA E ASSUNTO I 2 SEGUENTI ENUNCIATI COME ASSIOMI

$$(P \vee Q) \rightarrow R$$
$$P \vee Q$$

MENTRE L'UNICA REGOLA DI INFERENZA SARA'

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$$

TALE REGOLA SPESSO È CHIAMATA **MODUS PONENS** O ELIMINAZIONE DEL CONDIZIONALE (INDICATA CON "E →").

A QUESTO PUNTO CI È POSSIBILE CREARE UNA PICCOLA E BANALE DIMOSTRAZIONE. PER PRIMA COSA ELENCHIAMO GLI ASSIOMI DI PARTENZA

$$(1) (P \vee Q) \rightarrow R$$

A 1

$$(2) (P \vee Q)$$

A 2

SONO LA GIUSTIFICAZIONE DELLA PRESENZA DI OGNI FORMULA (QUESTI SONO ASSIOMI)

SI OSSERVA CHE ORA È POSSIBILE APPLICARE LA REGOLA DEL MODUS PONENS, PERTANTO AVREMO

$$(1) (P \vee Q) \rightarrow R$$

A 1

$$(2) (P \vee Q)$$

A 2

$$(3) R$$

1, 2, E →

NELLA TERZA RIGA SI È INDICATO, ALLA FINE, CHE R È STATO RICAVATO A PARTIRE DALLE FORMULE AI PASSAGGI 1 E 2 MEDIANTE LA REGOLA DI ELIMINAZIONE DEL CONDIZIONALE.

IN REALTÀ IN UN SEMPLICE SISTEMA FORMALE BASATO SULLI ASSIOMI VENGONO UTILIZZATI I SEGUENTI 3 ASSIOMI

$$(A1) \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$$(A3) (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

IN PARTICOLARE QUESTI VENGONO IMPIEGATI NEI SISTEMI ALLA FREGE-HILBERT. IL FATTO È

CHE A PARTIRE DA QUESTI POSTULATI DIVENTA PRATICO ANCHE SOLO DEDURRE
 $P \rightarrow P$ (MEGLIO LA REGOLA $E \rightarrow$).

PER AVVICINARSI A QUESTA LONTANANZA DALLA PRATICA DEDUTTIVA ORDINARIA SONO
STATI INTRODOTTI ALTRI SISTEMI FORMALI, COME QUELLO CHE PRESENTERÒ DI
SEGUITO.

IL CALCOLO ENUNCIATIVO

IL CALCOLO ENUNCIATIVO, O DELLA DEDUZIONE NATURALE, PERMETTE DI STABILIRE
LA VALIDITÀ DEI RAGIONAMENTI. QUESTI ULTIMI SARANNO RAPPRESENTATI, D'ORA IN
POI, COME

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$$

DOVE IL SIMBOLO $\vdash$, DETTO **SEGNO DI ASSEZIONE**, DIVIDE LE PREMESSE DALLA
CONCLUSIONE, INDICANDO LA DEDUCIBILITÀ DI UNO DALLE ALTRE.

IN DEDUZIONE NATURALE NON ESISTONO DEI VERI E PROPRI ASSIOMI, MA PIUTTOSTO
DELLE REGOLE DI INFERENZA. PER OGNI CONNETTIVO LOGICO ESISTERÀ UNA REGOLA
DI ELIMINAZIONE E UNA DI INTRODUZIONE DI TALE CONNETTIVO. (TIENNE PER LA
NEGAZIONE, CHE RAPPRESENTA UN CASO A PARTE). ULTERIORI REGOLE SI RENDERRANNO
NECESSARIE QUANDO TRATTEREMO I QUANTIFICATORI, MA PER ORA LIMITIAMOCI ALLE
REGOLE D'INFERENZA LEGATE AI CONNETTIVI.

REGOLA DI ASSUNZIONE

LA REGOLA DI ASSUNZIONE NON RAPPRESENTA UNA VERA E PROPRIA REGOLA D'INFERENZA,
INVECE NON RICHIEDE ALCUN CONNETTIVO. QUESTA REGOLA PERMETTE DI INTRODURRE, AD
UN CERTO PUNTO DELLA DIMOSTRAZIONE, UNA FORMULA. QUEST'ULTIMA VERRÀ ASSUNTA COME
IPOTESI. DI FATTO QUESTA PRATICA È MOLTO SIMILE A CIÒ CHE SI FA NEL
RAGIONAMENTO IPOTETICO.

ALL'INTERNO DI UNA DIMOSTRAZIONE POTREMO TROVARE QUESTE RIGHE

(1)	1	$P \rightarrow Q$	ASS
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(7)	7	$R \leftrightarrow S$	ASS

DOVE IL NUMERO CHE SI TROVA PRIMA DELLA FORMULA INDICA LE RIGHE DALLE QUALI LA FORMULA IN QUESTIONE DIPENDE. ESSENDO UN'ASSUNZIONE, LA FORMULA DIPENDERÀ DA SE STESSA. CHIAMEREMO QUESTA COLONNA DELLE ASSUNZIONI.

ELIMINAZIONE DEL CONDIZIONALE

ABBIAMO GIÀ VISTO QUESTA REGOLA D'INFERENZA. ESSA PERMETTE DI DERIVARE IL CONSEGUENTE DI UN'IMPLICAZIONE PREMETTENDO CHE SIA VERO L'ANTECEDENTE. LO SCHEMA È:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta} \quad (E \rightarrow)$$

IN PARTICOLARE, LA CONCLUSIONE DIPENDERÀ DA TUTTE LE ASSUNZIONI PRATTE DA CUI DIPENDONO LE PREMESSE.

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SCHEMA DI RAGIONAMENTO:

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$$

E PROVIAMO A DIMOSTRARLO FORMALMENTE

(1)	1	$P \rightarrow Q$	ASS
(2)	2	$Q \rightarrow R$	ASS
(3)	3	P	ASS
(4)	1, 3	Q	1, 3, $E \rightarrow$

(5) 1, 2, 3 R 2, 4, $E \rightarrow$

NELLE PRIME 3 RIGHE HO INTRODOTTO LE 3 ASSUNZIONI. NELLA QUARTA RIGA HO APPLICATO LA REGOLA $E \rightarrow$ A PARTIRE DALLE PREMESSE 1 E 3. NELL'ULTIMA RIGA HO APPLICATO LA REGOLA $E \rightarrow$ A PARTIRE DALLE FORMULE 2 E 4, SI NOTI CHE POICHÉ LA QUARTA RIGA DIPENDE DALLE FORMULE ALLE RIGHE 1 E 3, NELLA COLONNA DELLE ASSUNZIONI, HO ELENcato 1, 2, 3 COME FORMULE DA CUI DIPENDE LA QUINTA.

INTRODUZIONE DEL CONDIZIONALE

LA REGOLA DI INTRODUZIONE DEL CONDIZIONALE CONSISTE NELL'ASSUMERE VERO L'ANTECEDENTE α , TRAMITE ALTRE ASSUNZIONI O DEDUZIONI, DEDURRE IL CONSEGUENTE. INRATTI, NEL MOMENTO IN CUI ARRIVIAMO A DIRE CHE DA $\alpha, \dots, \alpha_n, \alpha$ DERIVA β POSSIAMO BENISSIMO "ESTRAARRE" UNA DELLE PREMESSE $\alpha, \dots, \alpha_n, \alpha$ PER AFFERMARE CHE DA $\alpha, \dots, \alpha_n$ DERIVA $\alpha \rightarrow \beta$. IN QUESTO SENSO, NELLO SCHEMA DI QUESTA REGOLA, PORREMO TRA PARENTESI QUADRE LA PREMessa CHE VERRÀ ESTRATTA E INSERITA COME ANTECEDENTE DEL CONDIZIONALE

$$\frac{[\alpha], \alpha, \dots, \alpha_n, \beta}{\alpha \rightarrow \beta} (I \rightarrow)$$

VEDIAMO LA REGOLA APPLICATA AL SEGUENTE SCHEMA DI RAGIONAMENTO, DETTO ARGOMENTO IPOTETICO PURO (IN QUANTO CONTIENE SOLO CONDIZIONALI):

$$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

DI SEGUITO LA DIMOSTRAZIONE FORMALE:

- | | | | |
|-----|-------|-----------------------------|---------------------|
| (1) | 1 | $\alpha \rightarrow \beta$ | ASS |
| (2) | 2 | $\beta \rightarrow \gamma$ | ASS |
| (3) | 3 | α | ASS |
| (4) | 1,3 | β | 1,3 E $\rightarrow$ |
| (5) | 1,2,3 | γ | 2,4 E $\rightarrow$ |
| (6) | 1,2 | $\alpha \rightarrow \gamma$ | 3,5 I $\rightarrow$ |

ORA IN POI ALLINEO LE DIMOSTRAZIONI A SINISTRA. AD OGNI MODO, ALLA RIGA 3 HO APPLICATO LA REGOLA DI ASSUNZIONE. E DOPO AVER APPLICATO 2 VOLTE LA REGOLA DI ELIMINAZIONE DEL CONDIZIONALE MI SONO TROVATO NELLA SITUAZIONE IN CUI γ DIPENDEVA DALLE FORMULE 1, 2, 3 E PERTANTO HO POTUTO APPLICARE LA REGOLA DI INTRODUZIONE DEL CONDIZIONALE, IN SOSTANZA SONO PASSATO DAL DIRE CHE $(1, 2, 3) \rightarrow \gamma$ AL DIRE CHE $(1, 2) \rightarrow (3 \rightarrow \gamma)$.

1. TEOREMI

L'ULTIMA REGOLA CHE ABBIAMO INTRODOTTO PERMETTE DI DECREMENTARE IL NUMERO DI ASSUNZIONI DALLE QUALI DIPENDE UNA FORMULA. EBBENE, SE DOVESSIMO APPLICARE QUESTA REGOLA AD UNA FORMULA CHE DIPENDE DA UNA SOLA ASSUNZIONE COSA SUCCEDEREBBE? NON DIPENDEREBBE PIU' DA ALCUNA ASSUNZIONE, DIVENTEREBBE UNA DI QUELLE CHE IN PRECEDENZA AVEVAMO CHIAMATO LEGGI LOGICHE O **TEOREMI**.

INDICHEREMO I TEOREMI, DAL MOMENTO CHE NON PRESENTANO PREMESSE, IN QUESTO MODO

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$$

QUESTO TEOREMA, IN PARTICOLARE, SI CHIAMA **LEGGE DI IDENTITA'** E PUO' ESSERE DIMOSTRATA MOLTO FACILMENTE (AL CONTRARIO DI QUANTO SI SAREBBE POTUTO PARE CON IL SISTEMA PORTALE BASATO SULLI ASSIOMI) IN DUE PASSAGGI

(1) 1 α ASS

(2) $\alpha \rightarrow \alpha$ 1, 1 $I \rightarrow$

SIMILMENTE, POSSIAMO RAGGIUNGERE 2 ANCHE ALLA DIMOSTRAZIONE NELLA PAGINA PRECEDENTE PER RICAVARE

(7) ~~$\beta \rightarrow \gamma$~~ $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ 2, 6 $I \rightarrow$

(8) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ 1, 7 $I \rightarrow$

CIÒ È UN TEOREMA, CHE CHIAMEREMO **LEGGE DI TRANSITIVITÀ** E INDICHEREMO CON

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

SI OSSERVI CHE $I \rightarrow$ NON È L'UNICA REGOLA D'INFERENZA IN GRADO DI RIDURRE IL NUMERO DI ASSUNZIONI.

ELIMINAZIONE DELLA CONGIUNZIONE

QUESTA REGOLA D'INFERENZA Afferma CHE DATA UNA CONGIUNZIONE COME PREMessa, POSSIAMO CONCLUDERE L'UNO E L'ALTRO CONGIUNTO. LO SCHEMA SARA'

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} \quad (E \wedge)$$

LA CONCLUSIONE CHIARAMENTE DIPENDERÀ DA TUTTE LE ASSUNZIONI DALLE QUALI DIPENDEM LA CONGIUNZIONE. PROVAMO ORA A DERIVARE IL SEGUENTE ARGOMENTO

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$$

(1)	1	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	ASS
(2)	2	$\alpha \wedge \beta$	ASS
(3)	2	α	2 E $\wedge$
(4)	2	β	2 E $\wedge$
(5)	1,2	$\beta \rightarrow \gamma$	1,2 E $\rightarrow$
(6)	1,2	γ	1,5 E $\rightarrow$
(7)	1	$\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$	2,6 I $\rightarrow$

AL SECONDO PASSAGGIO ABBIAMO INTRODOTTO COME ASSUNZIONE ~~MA~~ L'ANTECEDENTE DEL CONDIZIONALE CHE VOLEVAMO DIMOSTRARE.

AGGIUNGENDO UN OTTAVO PASSAGGIO ALLA DIMOSTRAZIONE SI PUÒ OTTENERE LA
LEGGE DI IMPORTAZIONE

$$(8) \quad (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma) \quad 1,7 \text{ I} \rightarrow$$

INTRODUZIONE DELLA CONGIUNZIONE

QUESTA REGOLA Afferma che a partire da 2 premesse è possibile derivare la loro congiunzione. UNA BANALITÀ, IN QUANTO SEGUE DIRETTAMENTE DALLA DEFINIZIONE DEL CONNETTIVO $\wedge$. ANCHE

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta} \quad (I \wedge)$$

DIMOSTRANDO OMA LA VALIDITÀ DEL RAGIONAMENTO

$$\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$$

(1)	1	$\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$	ASS
(2)	2	α	ASS
(3)	3	β	ASS
(4)	2,3	$\alpha \wedge \beta$	2,3 $I\wedge$
(5)	1,2,3	γ	1,4 $E\rightarrow$
(6)	1,2	$\beta \rightarrow \gamma$	3,5 $I\rightarrow$
(7)	1	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	2,6 $I\rightarrow$

AGGIUNGENDO UN OTTAVO PASSAGGIO POSSIAMO OTTENERE LA **LEGGE DI ESPORTAZIONE**

$$(8) \quad (\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \quad 1,7 \text{ } I\rightarrow$$

CONSIDERIAMO ORA IL ~~NOVO~~ LO SCHEMA DI MONUMENTO SEGUENTE

$$\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$$

DIMOSTRAREMO NEL NOSTRO CALCOLO

(1)	1	α	ASS
(2)	2	β	ASS
(3)	1,2	$\alpha \wedge \beta$	1,2 $I\wedge$
(4)	1,2	α	3 $E\wedge$
(5)	1	$\beta \rightarrow \alpha$	2,4 $I\rightarrow$

NON HO POTUTO APPLICARE LA REGOLA $I\rightarrow$ ALLE RIGHE 1 E 2 PERCHÉ α NON DIPENDEVA ANCORA DA β . IL RISULTATO A CUI SIAMO GIUNTI POTREBBE SEMBRARE PARADOSSALE (NON A CASO È SPESSO INDICATO COME "PARADOSSO DELL'IMPLICAZIONE MATERIALE"), IN QUANTO SI STA Affermando CHE ASSUNTA UNA FORMULA α ALLORA ESSA SARÀ

IMPLICATA DA UNA QUALSIASI ALTRA FORMULA β . QUESTA IDEA NASCE DAL FATTO CHE NELLA NOSTRA IMMAGINAZIONE IL CONNETTIVO $\rightarrow$ STABILISCE UN NESSO CAUSALE TRA ANTECEDENTE E CONSEGUENTE. IN LOGICA, PERÒ, QUESTO LEGAME NON SUSTISTE, NEL MOMENTO IN CUI IL CONSEGUENTE È VERO L'ANTECEDENTE PUÒ ASSUMERE QUALSIASI VALORE DI VERITÀ CHE IL RISULTATO SARÀ UN'IMPLICAZIONE VERA. INOLTRE, APPLICANDO ALLE REGOLE 1 E 5 LA REGOLA DI INTRODUZIONE DEL CONDIZIONALE SI OTTIENE LA **LEGE DI ATTENUAZIONE CONDIZIONALE**

$$\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

FACCIO OSSERVARE CHE AVENDO DELLE REGOLE D'INFERENZA PER IL CONDIZIONALE E PER LA CONGIUNZIONE NON SARÀ NECESSARIO FARNE PER IL BICONDIZIONALE, IN QUANTO RICAVABILE A PARTIRE DAI CONNETTIVI $\wedge$ E $\rightarrow$.

ELIMINAZIONE DELLA DISGIUNZIONE

QUESTA REGOLA SARÀ PROBABILMENTE LA MENO INTUITIVA DI TUTTE QUELLE CHE VEDREMO. IN SOSTANZA AFFERMA CHE ASSUMENDO $\alpha \vee \beta$ E VERIFICANDO CHE γ DERIVI SIA DA α SIA DA β ALLORA SI PUÒ DERIVARE γ DALLA DISGIUNZIONE. QUESTA REGOLA SI COMPONE DI 5 PREMESSE, PERTANTO SI APPLICHERÀ A 5 NGHE:

- LA NGHA DOVE COMPARE $\alpha \vee \beta$
- QUELLA DOVE SI ASSUME α
- QUELLA DOVE SI MOSTRA CHE γ DERIVA DA α ($\alpha \rightarrow \gamma$)
- QUELLA IN CUI SI ASSUME β
- QUELLA IN CUI SI MOSTRA CHE γ DERIVA DA β ($\beta \rightarrow \gamma$)

IN SIMBOLI SI PUÒ RAPPRESENTARE LA REGOLA IN QUESTA MANIERA

$$\frac{\begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \alpha \vee \beta, \gamma, \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} [\beta] \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \quad (E\vee)}{\gamma}$$

PROVIAMO ORA A VALIDARE IL SEGUENTE RAGIONAMENTO, APPLICANDO LA REGOLA APPENA VISTA

$$P \rightarrow R, Q \rightarrow R \vdash P \vee Q \rightarrow R$$

(1)	1	$P \rightarrow R$	Ass
(2)	2	$Q \rightarrow R$	Ass
(3)	3	$P \vee Q$	Ass
(4)	4	P	Ass
(5)	1, 4	R	1, 4 $E \rightarrow$
(6)	6	Q	Ass
(7)	2, 6	R	2, 6 $E \rightarrow$
(8)	1, 2, 3	R	3, 4, 5, 6, 7 $E\vee$
(9)	1, 2	$P \vee Q \rightarrow R$	3, 8 $I \rightarrow$

ABBIAMO RICAVATO PIÙ VOLTE R , LA DIFFERENZA STAVA NELLE ASSUNZIONI DA CUI DIPENDEVA. I PASSAGGI (3)-(7) CORRISPONDONO ALLE REGHE DI CUI HO PARLATO NELL'ELENCO PUNTATO DELLA PRECEDENTE PAGINA.

PUÒ AIUTARE A CAPIRE QUESTA REGOLA IL SEGUENTE SCHEMA

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \vee & \beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \gamma & \vee & \gamma \end{array} \rightarrow \gamma$$

INTRODUZIONE DELLA DISGIUNZIONE

È UNA REGOLA OVVIA, SEMPLICISSIMA, A PARTIRE DA UNA QUALSIASI PREMessa α PERMETTE DI CONCLUDERE $\alpha \vee \beta$ (LA CONCLUSIONE È MOLTO PIÙ DEBOLE DELLA PREMessa IN QUESTO CASO). LO SCHEMA DELLA REGOLA È

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad (I\vee)$$

È COSÌ SEMPLICE CHE NON NE DARÒ UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE.

ELIMINAZIONE DELLA NEGAZIONE

LA REGOLA IN QUESTIONE AFFERMA CHE DA UNA CONTRADDIZIONE È POSSIBILE DERIVARE QUALSIASI CONCLUSIONE. SI CONSIDERI LA TAVOLA DI VERITÀ DELL'IMPLICAZIONE, A PARTIRE DA PREMesse FALSE, QUALSIASI SIA LA CONCLUSIONE, IL COMPLESSO RISULTERÀ SEMPRE VERO. PASSANDO VELOCEMENTE LO SCHEMA DI QUESTA REGOLA

$$\frac{\alpha, \neg \alpha}{\beta} \quad (E\neg)$$

FACCIO SUBITO UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELLA REGOLA

$$\neg \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

(1)	1	$\neg \alpha$	ASS
(2)	2	α	ASS
(3)	1, 2	β	1, 2 $E\neg$
(4)	1	$\alpha \rightarrow \beta$	2, 3 $I\rightarrow$

IN SOSTANZA LA PREMessa AFFERMAVA $\neg \alpha$, DUNQUE $\neg$ PARTIRE DA α
 { SAREBBE STATO POSSIBILE DERIVARE QUALSIASI CONSEQUENTE (TANTO L'ANTECEDENTE
 È FALSO PER IPOTESI).

APPLICANDO NUOVAMENTE $I \rightarrow$ ALLA RIGA 4 SI OTTIENE LA LEGGE DI AINS SCOTO

$$\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

INTRODUZIONE DELLA NEGAZIONE

QUESTA REGOLA È ANCHE NOTA CON IL NOME DI RIDUZIONE ALL'ASSURDO. IN POCH
 PAROLE, SI PRENDE PER BUONA UNA FORMULA α , SE POI DA ESSA SI POSSONO
 DERIVARE DUE FORMULE CONTRADDITTORIE (PER ESEMPIO β E $\neg \beta$) ALLORA SI
 PUÒ CONCLUDERE NEGANDO LA TESI DI PARTENZA, CIOÈ $\neg \alpha$. LO SCHEMA DELLA REGOLA
 SARÀ PERTANTO

$$\frac{\begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \neg \beta \end{array}}{\neg \alpha} \quad (I\neg)$$

CONSIDERIAMO ORA IL SEGUENTE SCHEMA DI RAGIONAMENTO

$$P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \vdash \neg P$$

(1)	1	$P \rightarrow Q$	ASS
(2)	2	$P \rightarrow \neg Q$	ASS
(3)	3	P	ASS
(4)	1, 3	Q	1, 3 $E\rightarrow$
(5)	2, 3	$\neg Q$	2, 3 $E\rightarrow$
(6)	1, 2	$\neg P$	3, 4, 5 $I\neg$

CON QUESTA REGOLA È POSSIBILE DIMOSTRARE LA **LEGE DI AUTOCONTRADDIZIONE**

$$\vdash (d \rightarrow \neg d) \rightarrow \neg d$$

IN SOSTANZA DICE CHE SE DA d POSSIAMO DERIVARE $\neg d$ ALLORA SICURAMENTE d È FALSA (NON PUÒ ESSERE VERO $d \wedge \neg d$), PERTANTO IL CONSEGUENTE SARÀ $\neg d$.

- | | | | |
|-----|------|---|----------------------|
| (1) | 1 | $d \rightarrow \neg d$ | ASS |
| (2) | 2 | d | ASS |
| (3) | 1, 2 | $\neg d$ | 1, 2 $E \rightarrow$ |
| (4) | 1 | $\neg d$ | 2, 2, 3 $I \neg$ |
| (5) | | $(d \rightarrow \neg d) \rightarrow \neg d$ | 1, 4 $I \rightarrow$ |

AL PASSAGGIO 4 ABBIAMO CONSIDERATO DUE VOLTE LA FORMULA d , QUESTO SECONDO IL PRINCIPIO PER CUI OGNI FORMULA IMPLICA SE STESSA.

CON QUESTA REGOLA È ANCHE POSSIBILE DIMOSTRARE LA ^{REGOLA}~~LEGE~~ CHE VA SOTTO IL NOME DI **MODUS TOLLENS**

$$\alpha \rightarrow \beta, \neg \beta \vdash \neg \alpha$$

- | | | | |
|-----|---|----------------------------|-----|
| (1) | 1 | $\alpha \rightarrow \beta$ | ASS |
| (2) | 2 | $\neg \beta$ | ASS |
| (3) | | | |

DA CUI È POSSIBILE RICAVARE LA LEGGE DI CONTRADDIZIONE (DEBALE)

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$$

DOPPIA NEGAZIONE

LA REGOLA DELLA DOPPIA NEGAZIONE AFFERMA CHE SI PUÒ DERIVARE UNA QUALSIASI FORMULA α A PARTIRE DALLA NEGAZIONE DELLA SUA NEGAZIONE, $\neg \neg \alpha$

$$\frac{\neg \neg \alpha}{\alpha} \quad (DN)$$

DA ESSA È POSSIBILE DERIVARE LA LEGGE DEL TERZO ESCLUSO

$$\vdash \alpha \vee \neg \alpha$$

(1)	1	$\neg (\alpha \vee \neg \alpha)$	Ass
(2)	2	α	Ass
(3)	2	$\alpha \vee \neg \alpha$	2, $I \vee$
(4)	1, 2	$\alpha \wedge \neg (\alpha \vee \neg \alpha)$	1, 2 $I \wedge$
(5)	1, 2	$\neg (\alpha \vee \neg \alpha)$	4 $E \wedge$
(6)	1	$\neg \alpha$	2, 3, 5 $I \neg$
(7)	1	$\neg \alpha \vee \alpha$	6 $I \vee$
(8)		$\neg \neg (\alpha \vee \neg \alpha)$	1, 1, 7 $I \neg$
(9)		$\alpha \vee \neg \alpha$	8 DN

QUESTO PROCESSO DI INFERENZA, SECONDO CUI SI INIZIA NEGANDO LA TESI E SI ARRIVA A CONTRADDIZIONE (LA NEGAZIONE DELLA TESI SI INTENDE), È DETTO METODO DELL' INFERENZA INDIRETTA.

UN'ALTRA IMPORTANTE CONSEGUENZA DI QUESTA REGOLA È DATA DALLA LEGGE DI AUTOFONDAZIONE, O **CONSEQUENTIA MIRABILIS**

$$\vdash (\neg \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

(1)	1	$\neg \alpha \rightarrow \alpha$	Ass
(2)	2	$\neg \alpha$	Ass
(3)	1, 2	α	1, 2 E $\rightarrow$
(4)	1	$\neg \neg \alpha$	2, 2, 3 I $\neg$
(5)	1	α	4 DN
(6)		$(\neg \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	1, 5 I $\rightarrow$

ANCHE IN QUESTO CASO ABBIAMO APPLICATO IL METODO DELL'INFERENZA INDIRETTA, INFATTI SIAMO PARTITI ASSUMENDO L'ANTECEDENTE E NEGANDO IL CONSEGUENTE DELL'IMPLICAZIONE CHE VOLEVAMO DIMOSTRARE.

INTRODUZIONE DEI TEOREMI

COME IN GEOMETRIA ERA POSSIBILE APPOGGIARSI AI RISULTATI OTTENUTI CON LA DIMOSTRAZIONE DI ALTRI TEOREMI ANCHE IN LOGICA SI PUÒ EFFETTUARE LA STESSA OPERAZIONE. LA REGOLA DI INTRODUZIONE DEI TEOREMI (ABBREVIATA IN IT) PERMETTE DI INTRODURRE, AD UN CERTO PUNTO DELLA DIMOSTRAZIONE, UN QUALSIASI RISULTATO PRECEDENTEMENTE OTTENUTO CON UNA DIMOSTRAZIONE. OVVIAMENTE, ESSENDO I TEOREMI INDIPENDENTI DA QUALSIASI FORMULA, NELLA COLONNA DELLE ASSUNZIONI NON COMPARRÀ NULLA. CONSIDERIAMO IL SEGUENTE ESEMPIO

$$P \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

(1)	1	P	ASS
(2)		$Q \vee \neg Q$	IT $d \vee \neg d, d = Q$
(3)	3	Q	ASS
(4)	1, 3	$P \wedge Q$	1, 3 $I \wedge$
(5)	1, 3	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$	4 $I \vee$
(6)	6	$\neg Q$	ASS
(7)	1, 6	$P \wedge \neg Q$	1, 6 $I \wedge$
(8)	1, 6	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$	7 $I \vee$
(9)	1	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$	2, 3, 5, 6, 8 $E \vee$

FACCIO OSSERVARE CHE LA REGOLA DI INTRODUZIONE DEI TEOREMI NON È UNA REGOLA FONDAMENTALE, O PRIMITIVA, DEL CALCOLO DELLA DEDUZIONE NATURALE, BENSÌ UNA REGOLA DERIVATA, DI FATTO NON NE AUMENTA LA POTENZA INFERENZIALE.

IL CALCOLO DEI PREDICATI

PER ORA ABBIAMO VISTO SOLTANTO LE REGOLE DEL CALCOLO ENUNCIATIVO, CHE DI FATTO NON CI PERMETTONO DI OTTENERE RISULTATI TANTO DIVERSI DA QUELLI OTTENIBILI CON LE TAVOLE DI VERITÀ. QUELLO CHE PAREMO ORA SARÀ INTRODURRE ALTRE REGOLE, IN MODO DA GESTIRE ANCHE I QUANTIFICATORI, E RENDERE IL SISTEMA DELLA DEDUZIONE NATURALE DAL CALCOLO ENUNCIATIVO A QUELLO PREDICATIVO.

ELIMINAZIONE DELL'UNIVERSALE

PER COMPRENDERE QUESTA PRIMA REGOLA SUI QUANTIFICATORI FACCIO OSSERVARE PRELIMINARMENTE UN FATTO. Affermare che $\forall x F(x)$ È EQUIVALENTE A DIRE CHE $F(a) \wedge F(b) \wedge \dots$, DOVE $a, b, \dots$ RAPPRESENTANO TUTTI GLI OGGETTI CHE HANNO F . UNA VOLTA NOTATO QUESTO LEGAME FRA CONGIUNZIONE E QUANTIFICATORE UNIVERSALE SI INTUISCE CHE LA REGOLA DI ~~QUANTIFICATORE~~ ELIMINAZIONE DELL'UNIVERSALE SARÀ SIMILE A QUELLA DI ELIMINAZIONE DELLA CONGIUNZIONE. IN SOSTANZA, SE UNA FORMULA A VALE PER TUTTE LE COSE ALLORA ESSA

VARRÀ ANCHE PER I SINGOLI CASI, IN SIMBOLI AVREMO

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[x/t]} (EV)$$

IN TAL CASO POTREMO FORMALIZZARE E VERIFICARE IL RAGIONAMENTO SULLA MORTALITÀ DI SOCRATE

$$\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(s) \vdash M(s)$$

(1)	1	$\forall x (U(x) \rightarrow M(x))$	Ass
(2)	2	$U(s)$	Ass
(3)	1	$U(s) \rightarrow M(s)$	1 EV
(4)	1, 2	$M(s)$	2, 3 $E \rightarrow$

INTRODUZIONE DELL'UNIVERSALE

COME ABBIAMO OSSERVATO ANNA, QUANTIFICATORE UNIVERSALE E CONGIUNZIONE SONO LEGATI TRA LORO. SE VOLESSIMO AFFERMARE $\forall x F(x)$ E IL NOSTRO SISTEMA FOSSE POPOLATO DA 3 OGGETTI m, n, o POTREMMO AGNSARE DI DIMOSTRARE $F(m) \wedge F(n) \wedge F(o)$. IL PATTO È CHE GLI OGGETTI SPESSO SONO INFINITI (NON SOLTANTO 3), QUINDI IL COMPITO DI CONGIUNGERLI SAREBBE IRREALIZZABILE. SI EFFETTUA QUINDI UN'OPERAZIONE SIMILE A QUELLE ADOTTATE IN GEOMETRIA, ~~si prende~~ DOVE PER DIMOSTRARE CHE TUTTI I TRIANGOLI ~~hanno~~ HANNO SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI SI PARTE DA UN TRIANGOLO GENERICO. QUESTO TRIANGOLO INIZIALE NON DEVE AVERE NESSUNA CARATTERISTICA CHE LO DISTINGUA DALLI ALTRI TRIANGOLI. ALLO STESSO MODO, QUANDO SAREMO IN GRADO DI AFFERMARE CHE LA PROPRIETÀ F VALE PER UN GENERICO x ALLORA POTREMO CONCLUDERE CHE VARRÀ $\forall x$.

$$\frac{\alpha[x]}{\forall x \alpha} (IV)$$

INDICA CHE x
È LIBERA IN α

SI OSSERVI CHE QUESTA REGOLA PUÒ ESSERE APPLICATA SE x NON DIPENDE DA ASSUNZIONI IN CUI x COMPARIVA LIBERA. QUESTO PERCHÉ C'È CHE SI AFFERMA SU x POTREBBE NON ESSERE ARBITRARIO, C'È BISOGNO CHE x SIA VINCOLATA UNIVERSALMENTE PER ESSERE SICURI CHE LA PROPRIETÀ POSSA ESSERE ESTESA A TUTTI GLI x .

DI SEGUITO UN ESEMPIO

$$\forall x (A(x) \rightarrow M(x)), \forall x (U(x) \rightarrow A(x)) \vdash \forall x (U(x) \rightarrow M(x))$$

(1)	1	$\forall x (A(x) \rightarrow M(x))$	ASS
(2)	2	$\forall x (U(x) \rightarrow A(x))$	ASS
(3)	1	$A(x) \rightarrow M(x)$	1 EV
(4)	2	$U(x) \rightarrow A(x)$	2 EV
(5)	5	$U(x)$	ASS
(6)	3,5	$A(x)$	4,5 $E \rightarrow$
(7)	4,2,5	$M(x)$	4,6 $E \rightarrow$
(8)	1,2	$U(x) \rightarrow M(x)$	5,7 $I \rightarrow$
(9)	1,2	$\forall x (U(x) \rightarrow M(x))$	8 IV

ELIMINAZIONE DELL'ESISTENZIALE

SE ESISTE UN RAPPRESENTANTE PER UN QUANTIFICATORE UNIVERSALE E CONGIUNZIONE È ANCHE VERO CHE NE ESISTE UNO PER UN QUANTIFICATORE ESISTENZIALE E DISGIUNZIONE. NEL CASO DELLA REGOLA EV SI CERCAVA DI DERIVARE DA OGNI DISGIUNTO LA CONCLUSIONE χ , IN QUESTO CASO I DISGIUNTI POTREBBERO ESSERE INFINITI, PERTANTO QUESTO METODO NON SI PUÒ APPLICARE ALLA LETTERA. SI PUÒ PERÒ OSSERVARE CHE DALL'ESPRESSIONE $\exists x F(x)$, SENZA DOVER CONSIDERARE INFINITI DISGIUNTI, POSSIAMO VERIFICARE SEMPLICEMENTE CHE LA CONCLUSIONE χ DERIVA DA $F(x)$, DOVE L'UTILIZZO DELLA VARIABILE INDIVIDUALE x RENDE $F(x)$ IL DISGIUNTO-TIPO. $F(x)$ HA INFATTI LA FORMA DI TUTTI I DISGIUNTI DI CUI PARLAVO PRIMA, BISOGNERÀ DI NUOVO ASSICURARSI CHE SU x NON VENGA FATTA ALCUNA ASSUNZIONE

CARATTERIZZANTE. LO SCHEMA DELLA REGOLA SARÀ

$$\frac{\begin{array}{c} [A[x]] \\ \vdots \\ A \\ \exists x A, \end{array} \quad \frac{\gamma}{\gamma} \quad (E\exists)}$$

OLTRE AD IMPORRE CHE x OCCORRA LIBERA VINCOLATA IN A IMPONIAMO CHE SIA VINCOLATA ANCHE NELLA CONCLUSIONE γ . ALTREMENTI POTREMO PROVARE IL RAGIONAMENTO

$$\exists x B(x) \vdash \forall x B(x)$$

(1)	1	$\exists x B(x)$	ASS
(2)	2	$B(x)$	ASS
(3)	1	$B(x)$	1, 2, 2 $E\exists$
(4)	1	$\forall x B(x)$	3 $I\forall$

E CIÒ CHIARAMENTE NON PUÒ ESSERE CORRETTO, INFATTI AL PASSAGGIO 3 APPLICHIAMO LA REGOLA DI ELIMINAZIONE DELL'ESISTENZIALE PER OTTENERE UNA CONCLUSIONE DOVE x OCCORRE LIBERA.

INTRODUZIONE DELL'ESISTENZIALE

LA REGOLA DI INTRODUZIONE DELL'ESISTENZIALE È BANALE. APPENA CHE SE QUALCOSA VALE PER UN OGGETTO t ALLORA ESISTERÀ QUALCOSA PER CUI VALE QUELLA COMPLESSIONE.

$$\frac{A[x/t]}{\exists x A} \quad (I\exists)$$

CON QUESTA REGOLA SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE QUALCOSA VALE PER TUTTI ALLORA VALE

ANCHE PER QUALCUNO

$$\forall x \alpha \vdash \exists x \alpha$$

(1)	1	$\forall x \alpha$	ASS
(2)	1	$\alpha[x/t]$	1 EV
(3)	1	$\exists x \alpha$	2 IE

PROPRIETÀ DEI QUANTIFICATORI

IN QUESTO PARAGRAFO ELENCHERÒ ALCUNE PROPRIETÀ DEI QUANTIFICATORI, INIZIANDO CON GLI SCHEMI CHE RIGUARDANO LO SCAMBIO AI ESSI

$$\forall x \forall y \alpha \vdash \forall y \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists y \alpha \vdash \exists y \exists x \alpha$$

NEL CASO IN CUI I QUANTIFICATORI FOSSERO ETERogenei POTREMMO AFFERMARE SOLTANTO

$$\exists y \forall x \alpha \vdash \forall x \exists y \alpha$$

TRASDOTTO IN LINGUAGGIO NATURALE POTREBBE DIVENTARE "ESISTE UNA PERSONA y CON CUI TUTTI GLI x SONO IN DEBITO, QUINDI PER OGNI PERSONA x NE ESISTE UNA, y , CON LA QUALE È IN DEBITO (IN QUESTO CASO LA PERSONA È SEMPRE LA STESSA)".

NON POSSIAMO PERO AFFERMARE IL CONTRARIO, CIOÈ $\forall x \exists y \alpha \vdash \exists y \forall x \alpha$, INFATTI SE PER OGNI x ESISTE UN y TALE PER CUI VALE α NON È BASTO CHE ESISTA UN y SINGOLO TALE CHE PER OGNI x SI HA α , POTREBBERO ESSERCI PIÙ y .

VALGONO POI I DUE TEOREMI INTUITIVI

$$\vdash \forall x (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \forall x \alpha \wedge \forall x \beta$$

$$\vdash \exists x (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \exists x \alpha \vee \exists x \beta$$

IL CALCOLO QUASIELEMENTARE

IN QUESTO CAPITOLO INTRODURREMO LE ULTIME DUE REGOLE CHE COMPLETERANNO IL NOSTRO SISTEMA DELLA DEDUZIONE NATURALE. STO PARLANDO DELLE REGOLE DI INTRODUZIONE ED ELIMINAZIONE DELL'IDENTITÀ. QUESTE ULTIME CI PERMETTERANNO DI FORMULARE E DIMOSTRARE LA VALIDITÀ DI RAGIONAMENTI COME

(P1) BRUCE WAYNE È BATMAN

(P2) BRUCE WAYNE È RICCO

(C) BATMAN È RICCO

ELIMINAZIONE DELL'IDENTITÀ

QUESTA SEMPLICE REGOLA Afferma CHE DALL'IDENTITÀ $t = s$ SI PUÒ PASSARE DA $\alpha[x/t]$ A $\alpha[x/s]$. IN SIMBOLI AVREMO

$$\frac{t = s, \alpha[x/t]}{\alpha[x/s]} (E=)$$

FACCIO OSSERVARE CHE L'IDENTITÀ $t = s$ STABILISCE UNA CONGRUENZA FRA TUTTE LE PROPRIETÀ DI t E s . IL MASSIMO CHE CI È CONSENTITO FARE NEL LINGUAGGIO PREDICATIVO È FORMULARE QUESTA REGOLA DI SOSTITUTIVITÀ. ESISTONO ALTRI LINGUAGGI, DETTI DEL SECONDO ORDINE, CHE PERMETTONO DI QUANTIFICARE ANCHE LE PROPRIETÀ (OLTRE, OVVIAMENTE, AGLI INDIVIDUI). CON QUESTI LINGUAGGI È POSSIBILE STABILIRE L'EQUIVALENZA FRA TUTTE LE

PROPRIETÀ DEGLI INDIVIDUI IN QUESTIONE. IL MASSIMO CHE POSSIAMO FARE NOI AL MOMENTO È DIMOSTRARE LA LEGGE DI LEIBNIZ

$$\vdash t = s \rightarrow (\alpha[x/t] \rightarrow \alpha[x/s])$$

- (1) 1 $t = s$ ASS
- (2) 2 $\alpha[x/t]$ ASS
- (3) 1,2 $\alpha[x/s]$ 1,2 E=
- (4) 1 $\alpha[x/t] \rightarrow \alpha[x/s]$ 2,3 I $\rightarrow$
- (5) $t = s \rightarrow (\alpha[x/t] \rightarrow \alpha[x/s])$ 1,4 I $\rightarrow$

INTRODUZIONE DELL'IDENTITÀ

QUESTA REGOLA PERMETTE DI INTRODURRE, SENZA ALCUNA PREMessa, L'IDENTITÀ $t = t$, DOVE t RAPPRESENTA UN TERMINE INDIVIDUALE. IN SIMBOLI AVREMO

$$\frac{}{t = t} (I=)$$

CON QUESTA REGOLA È POSSIBILE DIMOSTRARE LA LEGGE DI IDENTITÀ

$$\vdash \forall x (x = x)$$

- (1) $x = x$ I=
- (2) $\forall x (x = x)$ 1 IV

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE SULLA DEDUZIONE NATURALE

COME ABBIAMO VISTO NEL CAPITOLO DEDICATO AL LINGUAGGIO ENUNCIATIVO, DATA UNA QUALSIASI FORMA D'ARGOMENTO ENUNCIATIVA È POSSIBILE APPLICARE UN PROCEDIMENTO MECCANICO (CIOÈ LA COSTRUZIONE DELLE TAVOLE DI VERITÀ) PER STABILIRE LA VALIDITÀ

O L'INVALIDITÀ DEL RAGIONAMENTO, PASSANDO AL CALCOLO ENUNCIATIVO DELLA
DEDUZIONE NATURALE SEMBRA CHE QUESTA MECCANICITÀ VENGA MENO, LASCIANDO SPACIO
ALL'INGENNO NECESSARIO ALL'IDEAZIONE DELLE DIMOSTRAZIONI. IN UN CERTO SENSO
QUESTO FATTO RAPPRESENTA UNA RIDUZIONE DELLA POTENZA DI QUESTO NUOVO SISTEMA
DIMOSTRATIVO. IN REALTÀ, L'IMPORTANZA DEL SISTEMA DELLA DEDUZIONE NATURALE
SI MOSTRA CON IL CALCOLO PREDICATIVO E QUASIELMENTARE. È INFATTI DIMOSTRABILE
CHE IN UN LINGUAGGIO SUFFICIENTEMENTE COMPLESSO, COME QUELLO PREDICATIVO AD
ESEMPIO, NON SIA POSSIBILE IDEARE UN PROCEDIMENTO ALGORITMICO IN GRADO DI
STABILIRE LA VALIDITÀ O MENO DI UNO SCHEMA D'ARGOMENTO. IL MASSIMO CHE
POSSIAMO FARE È APPLICARE CON ASTUZIA LE REGOLE D'INFERENZA ~~DEI~~ PRESENTATE IN
QUESTO CAPITOLO.

LA SEMANTICA LOGICA

FINO AD ORA CI SIAMO CONCENTRATI SULLA SINTASSI LOGICA. ABBIAMO INTRODOTTO QUEI LINGUAGGI FORMALI E ABBIAMO STUDIATO LE RELAZIONI FORMALI FRA SIMBOLI. CI SIAMO COMPLETAMENTE DISINTERESSATI DEL SIGNIFICATO DI QUESTE MANIPOLAZIONI. IN QUESTO CAPITOLO VERRÀ INTRODOTTA LA SEMANTICA LOGICA ELEMENTARE STANDARD, ANCHE SE PRIMA DOVREMO DIRE QUALCOSA SULLA TEORIA DEGLI INSIEMI, BASE SU CUI SI FONDERÀ LA SEMANTICA LOGICA.

TEORIA DEGLI INSIEMI

POSSIAMO PENSARE AD UN INSIEME COME AD UNA QUALSIASI COLLEZIONE DI OGGETTI. O'ORA IN POI INDICHEREMO CON LE LETTERE MINUSCOLE $x, y, z \dots$ GLI OGGETTI, MENTRE USEREMO LE MAIUSCOLE $A, B, C \dots$ PER INDICARE GLI INSIEMI. SCRIVEREMO

$$x \in A$$

PER DIRE CHE L'OGGETTO x APPARTIENE ALL'INSIEME A MENTRE

$$x \notin A$$

PER DIRE IL CONTRARIO, CIOÈ CHE x NON APPARTIENE AD A . SPESSO, ANZICHÉ ELENCARRE TUTTI GLI ELEMENTI DI UN INSIEME, SARÀ PREFERIBILE STABILIRE UNA CONDIZIONE DI APPARTENENZA

$$A = \{x \mid x \text{ È UN NUMERO PARI}\}$$

CHE SI LEGGE "L'INSIEME DEGLI x TALI CHE x È UN NUMERO PARI".

SI PUÒ QUINDI IDEARE UN PRIMO PRINCIPIO, DETTO PRINCIPIO DI ESTENSIONALITÀ, CHE STABILISCE LE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'IDENTITÀ FRA INSIEMI

$$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = B$$

È INOLTRE POSSIBILE DEFINIRE ~~CONVENIRE~~ L'INSIEME VUOTO PONENDO UNA CONDIZIONE CHE NESSUN OGGETTO È IN GRADO DI SODDISFARE

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

SIMILMENTE SI DEFINISCE L'INSIEME VERO PONENDO UNA CONDIZIONE CHE TUTTI GLI OGGETTI SONO IN GRADO DI SODDISFARE

$$V = \{x \mid x = x\}$$

RELAZIONI E OPERAZIONI INSIEMISTICHE

LA PRIMA ~~DE~~ RELAZIONE FRA INSIEMI CHE VEDIAMO È QUELLA DI INCLUSIONE. IN SOSTANZA CI DICE SE UN INSIEME A È SOTTOINSIEME DI UN ALTRO INSIEME B.

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

DA NON CONFONDERE SONO IL CONCETTO DI APPARTENENZA E INCLUSIONE, IL PRIMO RIGUARDA OGGETTI E INSIEMI, MENTRE IL SECONDO RIGUARDA INSIEMI E INSIEMI

$$x \in A \leftrightarrow \{x\} \subseteq A$$

SI PUÒ ANCHE OSSERVARE CHE LA RELAZIONE DI INCLUSIONE È REFLESSIVA ($A \subseteq A$) E

TRANSITIVA ($A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$). UN ALTRO FATTO DA TENERE PRESENTE, SEPPUR BANALE, È $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq V$, DA CUI, PER TRANSITIVITÀ, SI OTTIENE $\emptyset \subseteq V$.

INTRODUCO ORA L'OPERAZIONE DI **UNIONE** TRA INSIEMI. DATI GLI INSIEMI A E B L'INSIEME UNIONE SARÀ L'INSIEME DI TUTTI GLI OGGETTI CHE APPARTENGONO AD A O A B

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

SIMILMENTE SI DEFINISCE L'OPERAZIONE DI **INTERSEZIONE**. DATI GLI INSIEMI A E B L'INSIEME INTERSEZIONE SARÀ FORMATO DA TUTTI GLI OGGETTI CHE APPARTENGONO SIA AD A CHE A B

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

DEFINIAMO INVECE LA **COMPLEMENTAZIONE** COME L'INSIEME DI TUTTI GLI OGGETTI CHE NON APPARTENGONO AD UN DATO INSIEME A

$$A' := \{x \mid x \notin A\}$$

VEDIAMO, IN ULTIMO, IL CONCETTO DI **POTENZA CARTESIANA**, CIOÈ L'INSIEME DI n -UPLE ORDINATE TALI CHE I LORO ELEMENTI APPARTENGANO AD UN DATO INSIEME A

$$A^n := \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_1, \dots, x_n \in A \}$$

IL PARADOSSO DI RUSSELL

LA TEORIA DEGLI INSIEMI, COSÌ COME È STATA PRESENTATA NEL CAPITOLO PRECEDENTE, PRESENTA DEI PROBLEMI. IN PARTICOLARE IL FILOSOFO BERTRAND RUSSELL SI ACCORSE DEL SEGUENTE PARADOSSO (IN REALTÀ ERA GIÀ NOTO AI GRECI, CON ANISTOTELE, TUTTAVIA VENNE FORMALIZZATO NEL LINGUAGGIO DELLA LOGICA PER LA PRIMA VOLTA DA RUSSELL).

ABBIAMO DETTO CHE UN INSIEME PUÒ CONTENERE A SUA VOLTA DEGLI INSIEMI. È QUINDI LEGITTIMO CHIEDERSI SE UN INSIEME POSSA APPARTENERE A SE STESSO O NO. PER ESEMPIO, L'INSIEME DELLE IDEE È A SUA VOLTA UN'IDEA, PERTANTO APPARTENRÀ A SE STESSO. AL CONTRARIO, L'INSIEME DEGLI UOMINI NON È UN UOMO, QUINDI NON APPARTIENE A SE STESSO. CHIAMIAMO **NORMALI** GLI INSIEMI CHE NON APPARTENGONO A SE STESSI. A QUESTO PUNTO POTREMMO PENSARE DI DEFINIRE L'INSIEME R COME L'INSIEME DEGLI INSIEMI NORMALI

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

DOVE CON x SI INTENDONO GLI INSIEMI NORMALI E L'UTILIZZO DELLA MINUSCOLA È GIUSTIFICATO DAL FATTO CHE QUESTI INSIEMI SONO GLI ELEMENTI DELL'INSIEME R .

LA DOMANDA CHE FA SORGERE IL PROBLEMA È: L'INSIEME R APPARTIENE O NO A SE STESSO?

EBBENE, SE R APPARTIENE A SÉ STESSO VORREBBE DIRE CHE SAREBBE UNO DEGLI x TALI CHE $x \notin x$, E SI AVREBBE UNA CONTRADDIZIONE.

SE INVECE R NON APPARTENESSE A SÉ STESSO ALLORA SODDISFEREBBE LA CONDIZIONE DI APPARTENENZA A SE STESSO (CIOÈ NON APPARTENERE A SE STESSO), E QUINDI APPARTENEBBE A SE STESSO.

IN ENTRAMBI I CASI SI PRESENTA UN PARADOSSO. LA SOLUZIONE CHE PROPOSE RUSSELL FU QUELLA DI INTRODURRE UNA NUOVA GERARCHIA ALL'INTERNO DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI.

IN PARTICOLARE GLI OGGETTI SAREBBERO STATI DIVISI IN: INDIVIDUI, INSIEMI, INSIEMI
DI INSIEMI, INSIEMI DI INSIEMI DI INSIEMI ... E OGNI ^{OGGETTO} ~~MEMBRO~~ DI UNA CLASSE SAREBBE
POTUTO ESSERE MEMBRO SOLO ED UNICAMENTE DEGLI OGGETTI DELLA CLASSE IMMEDIATAMENTE
SUCCESIVA.

QUESTI VINCOLI RISOLVONO IL PROBLEMA POSTO DAL PARADOSSO MA LIMITANO IL NUMERO
DI INSIEMI DEFINIBILI. PER ESEMPIO, L'INSIEME UNIVERSO V , NON PUÒ PIÙ ESSERE PRESO
IN CONSIDERAZIONE, NONOSTANTE LA SUA IMPORTANZA DAL PUNTO DI VISTA FILOSOFICO.

TRACTATUS LOGICO-PHILOSOPHICUS

HO INTITOLATO QUESTO CAPITOLO "LA SEMANTICA LOGICA", FINORA PERÒ ABBIAMO PARLATO
SOLO DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI. NEL TRACTATUS LOGICO-PHILOSOPHICUS VIENE DATA UNA
PRIMA DESCRIZIONE DELLA SEMANTICA LOGICA, CIÒ DEL SIGNIFICATO CHE ATTRIBUIAMO ALLE
FORMULE CHE ABBIAMO IMPARATO A COSTRUIRE.

ANZITUTTO VIENE DETTO CHE CONOSCERE IL SIGNIFICATO DI UNA PROPOSIZIONE VUOL DIRE SAPERE
COSA ACCADE QUANDO ESSA È VERA. SI PUÒ DIRE, QUINDI, CHE NON È NECESSARIO CONOSCERE
IL VALORE DI VERITÀ DI UN ENUNCIATO PER COMPRENDERNE IL SIGNIFICATO.

IN SEGUITO VIENE DETTO CHE IL SIGNIFICATO DELLE ESPRESSIONI SUBENUNCIATIVE (PAROLE)
CONSISTE NELL'EFFETTO CHE HANNO SUGLI ENUNCIATI IN CUI COMPaiono.

VOLENDO, PERCIÒ, CAPIRE COSA ACCADE QUANDO UNA PROPOSIZIONE È VERA, OCCORRE PRENDERE
IN CONSIDERAZIONE LE PARTI CHE LA COMPONONO E STUDIARE IL ^{SIGNIFICATO} ~~VALORE DI VERITÀ~~ DI
QUELLE.

MOLTI LINGUISTI SI SONO INTERROGATI SULLA CAPACITÀ DELL'ESSERE UMANO DI COMPRENDERE
ENUNCIATI COMPOSTI MAI VISTI PRIMA SENZA ALCUN BISOGNO DI SPIEGAZIONI. AL CONTRARIO,
NECESSITA DI SPIEGAZIONI PER LE ESPRESSIONI SUBENUNCIATIVE (PAROLE). È COME SE
AVESSIMO UNA SORTA DI ALGORITMO IN GRADO DI COMPUTARE IL SIGNIFICATO DI ESPRESSIONI
COMPOSITE A PARTIRE DAI COMPONENTI DI TALI ESPRESSIONI.

SEMANTICA TARSKIANA

ANZITUTTO TARSKI SI PREOCCUPA DI FORNIRE UNA BUONA DEFINIZIONE DI VERITÀ. PER FARLO Afferma CHE LA NOZIONE DI VERITÀ VA SEMPRE LEGATA AD UN CERTO LINGUAGGIO. INPATTI, PER STABILIRE IL VALORE DI VERITÀ DI UN ENUNCIATO, SPESSO DICIAMO COSE DEL TIPO

« LA NEVE È BIANCA » È VERO

DOVE LE VIRGOLETTE SERVONO A DISTINGUERE L'ENUNCIATO DALLA PROPRIETÀ CHE POSSIODE (IN TAL CASO LA NOZIONE DI VERITÀ È CONSIDERATA UNA PROPRIETÀ). IN PARTICOLARE IL LINGUAGGIO USATO PER FORMULARE L'ENUNCIATO VERRÀ DETTO **LINGUAGGIO-OGETTO**, MENTRE QUELLO UTILIZZATO PER DESCRIVERE L'ENUNCIATO VERRÀ CHIAMATO **METALINGUAGGIO**. IN QUESTO CASO L'ITALIANO SVOLGE ENTRAMBE LE FUNZIONI.

A QUESTO PUNTO POSSIAMO ESPRIMERE UNA LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA VERITÀ DELL'ENUNCIATO USATO COME ESEMPIO

« LA NEVE È BIANCA » È VERO SE E SOLO SE LA NEVE È BIANCA

POTREBBE SEMBRARE BANALE, MA QUESTO È. PROBABILMENTE IL SEGUENTE SCHEMA GENERALE RENDERRÀ LE COSE PIÙ CHIARE.

N È VERO (NEL LINGUAGGIO L) SE E SOLO SE T

DOVE N È ESPRESSO NEL LINGUAGGIO-OGETTO L E T NEL METALINGUAGGIO. D'ORA IN POI L CORRISPONDERÀ CON IL LINGUAGGIO PREDICATIVO GIÀ INTRODOTTO MENTRE IL METALINGUAGGIO CORRISPONDERÀ ALL'ITALIANO.

IL PROSSIMO OBIETTIVO È QUELLO DI LIMITARE IL LINGUAGGIO FORMALE L A SPECIFICI

UNIVERSI DEL DISCORSO. IN MODO TALE DA POTER DIRE CHE UNA DETERMINATA FORMULA DI L È VERA IN QUELLO SPECIFICO UNIVERSO DI DISCORSO.

DATA LA FORMULA $\Delta(s)$, SE ~~SI~~ VIENE INTERPRETATA NELL'UNIVERSO DEL DISCORSO DEI NUMERI NATURALI CON $s = \text{SETTE}$ E $\Delta = \text{PROPRIETÀ DI ESSERE DISPARI}$ ALLORA $\Delta(s)$ SARÀ UN ENUNCIATO VERO. AL CONTRARIO, NELL'UNIVERSO DEL DISCORSO DEI PERSONI UMANI, CON $s = \text{SOCRATE}$ E $\Delta = \text{PROPRIETÀ DI ESSERE DONNA}$, L'ENUNCIATO $\Delta(s)$ RISULTERÀ FALSO.

INTERPRETAZIONI E ASSEGNAZIONI

ABBIAMO APPENA PARLATO DELLA NECESSITÀ DI STABILIRE UN UNIVERSO DEL DISCORSO E DI INTERPRETARE LE FORMULE NEL ~~modo~~ CAMPO CHE SI È STABILITO. CHIAMEREMO A UNO

MODELLO DEL NOSTRO LINGUAGGIO FORMALE L LA COPPIA ORDINATA

$$\mathcal{M} = \langle U, i \rangle$$

DOVE U RAPPRESENTA UN INSIEME DI INDIVIDUI (UNIVERSO DEL DISCORSO) E i È LA **FUNZIONE DI INTERPRETAZIONE** CHE ASSEGNA I SIGNIFICATI ALLE FORMULE DEL LINGUAGGIO L .

IN PARTICOLARE VERRANNO EFFETTUATE LE SEGUENTI TRADUZIONI

- COSTANTI INDIVIDUALI $\rightarrow$ INDIVIDUI APPARTENENTI A U
- COSTANTI FUNZIONALI n -ARIE $\rightarrow$ OPERAZIONI DEFINITE SU U (UNIONE, INTERSEZIONE, ...)
- COSTANTI PREDICATIVE n -ARIE $\rightarrow$ RELAZIONI DEFINITE SU U ^{AVANNO LUOGO A SOTTOINSIEMI O SOTTOCONGIUNTI DI U} (SOVANSIEMI DI U)

IN TAL MODO ABBIAMO ASSEGNATO AD OGNI SIMBOLO DESCRITTIVO COSTANTE DI L UNO ED UN SOLO SIGNIFICATO IN $\mathcal{M}$.

PER QUANTO RIGUARDA LE VARIABILI OCCORRE DIRE CHE ESSE NON SIGNIFICANO NULLA, DI ESSE SI PUÒ SOLO INDIVIDUARE IL **CAMPO DI VARIAZIONE**, CHE SPESSE COINCIDE CON LO STESSO INSIEME U . IL CAMPO DI VARIAZIONE DI UNA VARIABILE x SI REGALA MEDIANTE L'**ASSEGNAZIONE**, IN PARTICOLARE SCRIVEREMO $d(x)$ PER INDICARE IL

CAMPO DI VARIAZIONE DI x .

PERTANTO, COMBINANDO INTERPRETAZIONE E ASSEGNAZIONE, POTREMO DARE UN SIGNIFICATO A TUTTI I TERMINI INDIVIDUALI DEL LINGUAGGIO L . SCRIVEREMO $M^a(t)$ PER INDICARE IL SIGNIFICATO DI UN TERMINE INDIVIDUALE t RELATIVAMENTE ALL'INTERPRETAZIONE DEL MODELLO M E L'ASSEGNAZIONE a .

DIAMO QUINDI LA SEGUENTE DEFINIZIONE OPERATIVA PER INDUZIONE DEI TERMINI INDIVIDUALI DI L

BASE

- SE t È UNA COSTANTE INDIVIDUALE ALLORA $M^a(t) := M(t)$
- SE t È UNA VARIABILE INDIVIDUALE ALLORA $M^a(t) := a(t)$

PASSO

SE $t_1, \dots, t_n$ SONO TERMINI INDIVIDUALI E f È UNA COSTANTE FUNTORIALE (FUNTORE) n -ARIA ALLORA $M^a(f(t_1, \dots, t_n)) := M(f)(M^a(t_1), \dots, M^a(t_n))$.

SI OSSERVA CHE $M(t)$ È STATO POSTO PRIMA DELLE PARENTESI CONTENENTI LE INTERPRETAZIONI O ASSEGNAZIONI DEI TERMINI INDIVIDUALI POICHÉ STA AD INDICARE L'OPERAZIONE INSIERISTICA DA ESEGUIRE SU CIÒ CHE SEVE.

LA DEFINIZIONE RICORSIVA

NELLA PRECEDENTE PAGINA È STATO FORNITO LO SCHEMA GENERALE CHE UN ENUNCIATO VERO IN UN CERTO LINGUAGGIO L DEVE RISPETTARE. IL NOSTRO OBIETTIVO È QUELLO DI DARE UNA DEFINIZIONE DI VERITÀ DALLA QUALE SI OTTENGANO SOLO ENUNCIATI IN GRADO DI SODDISFARE LO SCHEMA GENERALE, CHE CHIAMEREMO **CONVENZIONE V**. SI PRESENTANO PERÒ DEI PROBLEMI

- I BICONDIZIONALI CHE DOVREMO CONSIDERARE SONO INFINITI
- SE IL DOMINIO U (~~del~~ UNIVERSO DEL DISCORSO) È INFINITO ALLORA GLI ENUNCIATI QUANTIFICATI DIVENTEREBBANO UNIONI DI INFINITI CONGIUNTI O DISGIUNTI

- NON HA SENSO AFFERMARE LA VERITÀ O FALSITÀ DI FUNZIONI ENUNCIATIVE CON VARIABILI LIBERE

QUESTI PROBLEMI (PERLOMENO GLI ULTIMI 2) VENGONO RISOLTI CON L'INTRODUZIONE DELLA NOZIONE DI **SODDISFACIMENTO** DI UNA FORMULA RISPETTO A UNA DATA ASSEGNAZIONE. IN SOSTANZA SI DICE CHE $\forall x F(x)$ E $\exists x F(x)$ SONO VERE SE E SOLO SE $F(x)$ È SODDISFATTA, RISPETTIVAMENTE, DA OGNI E DA ALMENO UNA ASSEGNAZIONE DI VALORE AD x . PER ESEMPIO, NEL CASO DEL QUANTIFICATORE ESISTENZIALE, CI SI CHIEDE SE ESISTE ALMENO UN VALORE u NEL CAMPO DI VARIABILE DI x TALE CHE SOSTITUENDO A x L'ENUNCIATO $F(u)$ RISULTI VERO.

INDICHEREMO LA NOZIONE DI SODDISFACIMENTO CON IL SIMBOLO $\models$, COME NEL SEGUENTE ESEMPIO

$$M^a \models \alpha$$

CHE VERRÀ LETTO COME: LA FORMULA α DEL LINGUAGGIO L È SODDISFATTA (VERA) NEL MODELLO $M = \langle U, i \rangle$ E RISPETTO ALL'ASSEGNAZIONE a .

CON $a[x/u]$ INDICHEREMO L'ASSEGNAZIONE a DOVE x VIENE SOSTITUITO CON u (ELEMENTO DEL DOMINIO U).

LA DEFINIZIONE DELLA NOZIONE DI VERITÀ

BASE

$$\bullet M^a \models P(t_1, \dots, t_n) \text{ SE E SOLO SE } \langle M^a(t_1), \dots, M^a(t_n) \rangle \in M(P)$$

PASSO

$$(1) M^a \models \neg \alpha \text{ SE E SOLO SE NON } M^a \models \alpha$$

$$(2) M^a \models \alpha \wedge \beta \text{ SE E SOLO SE } M^a \models \alpha \text{ E } M^a \models \beta$$

$$(3) M^a \models \alpha \vee \beta \text{ SE E SOLO SE } M^a \models \alpha \text{ O } M^a \models \beta$$

$$(4) M^a \models \alpha \rightarrow \beta \text{ SE E SOLO SE } M^a \models \beta \text{ O NON } M^a \models \alpha$$

$$(5) M^a \models \alpha \leftrightarrow \beta \text{ SE E SOLO SE } (M^a \models \alpha \text{ E } M^a \models \beta, \text{ OPPURE NON } M^a \models \alpha \text{ E NON } M^a \models \beta)$$

(6) $M^* \models \forall x \alpha$ se e solo se per ogni $u \in U$ si ha $M^{*[x/u]} \models \alpha$

(7) $M^* \models \exists x \alpha$ se e solo se per qualche $u \in U$ si ha $M^{*[x/u]} \models \alpha$

TUTTO QUESTO SFORZO NEL DEFINIRE LA VERITÀ NON SAREBBE STATO INUTILE SE SI POTESSE ASSUNTA LA POSSIBILITÀ CHE IL PREDICATO DI VERITÀ PER UN LINGUAGGIO (QUELLO CHE ABBIAMO CHIAMATO LINGUAGGIO-OGETTO) POTESSE ESPRIMERSI NELLO STESSO LINGUAGGIO. INRATTI, SE QUESTO FOSSE POSSIBILE SI POTREBBERO FACILMENTE FORMULARE DEGLI ENUNCIATI PARADOSSALI, AD ESEMPIO

QUESTO ENUNCIATO È FALSO

QUESTI PARTICOLARI TIPI DI ENUNCIATI SONO DETTI **AUTOREFERENZIALI**. È NECESSARIO DISTINGUERE IL LINGUAGGIO CON IL QUALE SI FORMULA L'ENUNCIATO E QUELLO CON CUI SI PRENDI LA VERITÀ. NON È POSSIBILE STABILIRE UNA DEFINIZIONE DI VERITÀ CHE CI DICA COS'È LA VERITÀ IN GENERALE, LIOÈ NON POSSIAMO DIRE CHE QUALCOSA SIA VERO IN L (PER OGNI POSSIBILE LINGUAGGIO L). QUESTO PERCHÉ IMPLICHEREBBE ANCHE IL CASO IN CUI L SIA IL METALINGUAGGIO, OLTRE CHE AL LINGUAGGIO-OGETTO.

BISOGNA QUINDI SEMPRE SPECIFICARE I 2 LINGUAGGI, LIMITANDOSI A DEFINIRE LA VERITÀ UN LINGUAGGIO ALLA VOLTA. ALCUNO INFINI CHE SCRIVENDO $\models \alpha$ INTENDEREMO DIRE CHE α È VERA SECONDO OGNI POSSIBILE INTERPRETAZIONE DEL LINGUAGGIO IN QUESTIONE.

CENNI DI METALOGICA

LA METALOGICA INDAGA LE PROPRIETÀ GENERALI DEI SISTEMI FORMALI, NON EFFETTUA CALCOLI AL SUO INTERNO.

I SISTEMI FORMALI POSSONO ESSERE **COERENTI** SE NON SI HA IL CASO CHE $\vdash \alpha$ E $\vdash \neg \alpha$. IN SOSTANZA UN SISTEMA FORMALE È COERENTE SE DA ESSO NON È POSSIBILE DERIVARE CONTRADDIZIONI. SI PENSI A COSA POTREBBE succEDERE DERIVANDO COME TEOREMA UNA CONTRADDIZIONE APPLICANDO POI LA REGOLA $E\neg$, CHE PERMETTE DI INTRODURRE UNA QUALSIASI FORMULA A PARTIRE DA UNA CONTRADDIZIONE: IL SISTEMA IMPAZZIREBBE.

SI DEFINISCONO INVECE **COMPLETI** I SISTEMI FORMALI IN GRADO DI DIMOSTRARE COME TEOREMI TUTTE LE VERITÀ LOGICHE, OSSIA QUELLE FORMULE VERE IN OGNI INTERPRETAZIONE.

NEL SEGUITO CERCHERÒ DI SPIEGARE, SEMPLIFICANDO NOTEVOLMENTE, IL RAGIONAMENTO FATTO DA KURT GÖDEL PER DIMOSTRARE ~~l'incompletezza~~ L'INCOMPLETEZZA DI UN SISTEMA FORMALE SUFFICIENTEMENTE ESTESO DA CONTENERE I NUMERI NATURALI.

GÖDEL PRESE ~~in~~ IN CONSIDERAZIONE UN SISTEMA FORMALE GENERICAMENTE ASSOCIATO AD OGNI COSTANTE, VARIABILE, PUNTATORE ... DI QUESTO LINGUAGGIO UN NUMERO NATURALE, DETTO **NUMERO N GÖDEL**. IN QUESTA MANIERA SE IL SISTEMA HA SUFFICIENTI CAPACITÀ ESPRESSIVE SI POTRANNO FORMULARE DEGLI ENUNCIATI CHE PARLINO DI SE STESSI. DUNQUE I NUMERI NATURALI SARANNO SIA GLI OGGETTI DI CUI GLI ENUNCIATI ARITMETICI PARLERANNO SIA I CODICI UNIVOCAMENTE ASSOCIATI ALLE ESPRESSIONI DEL LINGUAGGIO IN QUESTIONE. CONSIDERAMO ORA IL SEGUENTE ENUNCIATO

$$X \leftrightarrow \neg \text{Dim}(\langle\langle X \rangle\rangle)$$

IL QUALE AFFERMA CHE ESSO STESSO NON È DIMOSTRABILE (SIMILANTE A QUANTO FATTO DA TARSKI CON L'ENUNCIATO CHE AFFERMA DI ESSERE FALSO). EBBENE QUESTO ENUNCIATO È

ESPRESSIBILE NEL ~~MINIMO~~ SISTEMA FORMALE $\mathcal{S}$ DENEGANDO $\mathcal{S}$.

A QUESTO PUNTO POTREMO Affermare CHE

SE $\mathcal{S}$ È COERENTE, ALLORA NON $\vdash \chi$

INRATTI, SE χ FOSSE DIMOSTRABILE IN $\mathcal{S}$ SAREBBE UNA FALSIÀ (IN QUANTO APPENA
A ESSERE DIMOSTRABILE) E RENDEREbbe INCOERENTE IL SISTEMA $\mathcal{S}$. DUNQUE,
PRENDENDO PER VERA L'AFFERMAZIONE, POSSIAMO CONCLUDERE CHE

SE $\mathcal{S}$ È COERENTE, ALLORA NON $\vdash \neg \chi$

INRATTI, SE χ È VERA ALLORA $\neg \chi$ È FALSA E POICHÉ IN UN SISTEMA FORMALE ~~NON~~
~~MA~~ COERENTE NON SI POSSONO DERIVARE ~~CONTRA~~ ENUNCIATI FALSI COME TEOREMI
L'AFFERMAZIONE RATA È VERA.

IN CONCLUSIONE ABBIAMO DIMOSTRATO CHE NEI SISTEMI FORMALI COERENTI,
SUFFICIENTEMENTE ESPRESSIVI, ESISTONO DEGLI ENUNCIATI DIMOSTRABILI, CIOÈ
TALI DA NON POTER ESSERE NÉ DIMOSTRATI NÉ REPUTATI. I SISTEMI FORMALI
COERENTI SONO INCOMPLETI.