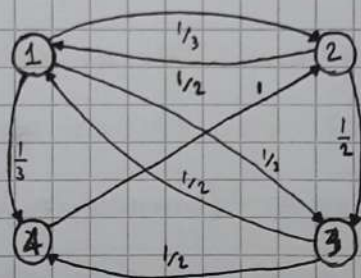


INTRODUZIONE

IL CORSO È INIZIATO CON UNA SERIE DI ESEMPI DI SISTEMI DINAMICI. L'AUMENTO DELLA TEMPERATURA DI UN'AULA, LA POTENZA EROGATA DAL MOTORE PER STABILIZZARE L'AUTO AD UNA CERTA VELOCITÀ, L'INTENSITÀ DI UN LETTO D'ACQUA UTILIZZATO PER RIEMPIRE IN UN DATO TEMPO UNA VASCA SONO TUTTI SISTEMI DINAMICI. DI SEGUITO NE PRESENTERÒ UN POCO PIÙ NEL DETTAGLIO UNO.

PAGERANK

SUPPONIAMO DI AVERE 4 PAGINE WEB, DA OGNIUNA DI ESSE È POSSIBILE PASSARE AD ALMENO UN'ALTRA TRAMITE UN LINK. CI CHIEDIAMO QUALE SIA LA PROBABILITÀ DI FINIRE IN UNA DELLE 4 PAGINE FACENDO ANDARE AVANTI UN BOT CHE CLICCA A CASO SUI LINK. LA SITUAZIONE PUÒ ESSERE RAPPRESENTATA COSÌ



DOVE I NUMERI RAPPRESENTANO LA PROBABILITÀ DI SCEGLIERE QUEL LINK A PARTIRE DALLA PAGINA IN CUI CI SI TROVA. DI SEGUITO ESPRIMO LA PROBABILITÀ DI CAPITARE IN OGNI PAGINA AL $(k+1)$ -ESIMO CLICK

$$X_1(k+1) = X_2(k) \cdot \frac{1}{2} + X_3(k) \cdot \frac{1}{2}$$

$$X_2(k+1) = X_1(k) \cdot \frac{1}{3} + X_4(k)$$

$$X_3(k+1) = X_1(k) \cdot \frac{1}{3} + X_4(k) \cdot \frac{1}{2}$$

$$X_4(k+1) = X_1(k) \cdot \frac{1}{3} + X_3(k) \cdot \frac{1}{2}$$

A QUESTO PUNTO SI PUÒ COSTRUIRE UNA MATRICE CHE DATA LA POSIZIONE AL PASSO k RESTITUISCA LE PROBABILITÀ DI TROVARSI NELLE 4 PAGINE AL PASSO $k+1$. SI FA COME SEGUe

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} X(k)$$

ANZIUTTO CHIAMAMO P QUESTA MATRICE. VOLENDO ORA CAPIRE QUALE SIA LA PROBABILITÀ DI TROVARSI IN UNA DELLE 4 PAGINE ALL' n -ESIMO CLICK OCCORRÀ PARTIRE DA 0, CIOÈ

$$\begin{aligned} X(1) &= P \cdot X(0) \\ X(2) &= P \cdot X(1) = P^2 \cdot X(0) \\ &\vdots \\ X(n) &= P^n X(0) \end{aligned}$$

È POSSIBILE DIMOSTRARE CHE PER PARTICOLARI MATRICI, AD ESEMPIO P , ESISTE SEMPRE UN AUTOVALORE PARO A 1 E GLI ALTRI NUMERI IN MODULO. RICORDO LA RELAZIONE FRA AUTOVALORE E AUTOVETTORE

$$A \cdot (\text{AUTOVETTORE}) = \lambda \cdot (\text{AUTOVETTORE})$$

CON λ AUTOVALORE. DI FATTO CI È POSSIBILE SCRIVERE

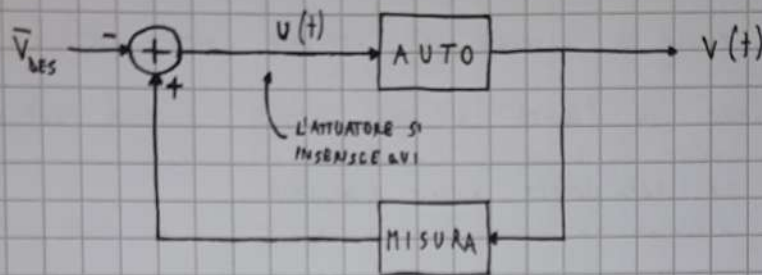
$$P = V \lambda V^{-1} \Leftrightarrow P^n = V \lambda^n V^{-1}$$

DOVE V È LA MATRICE DEGLI AUTOVETTORI E λ QUELLA DEGLI AUTOVALORI. PER $n \rightarrow +\infty$ CALCOLARE λ^n POTREBBE ESSERE UN PROBLEMA. IN REALTÀ RICORDANDO CIÒ CHE È STATO DETTO NUTRI POSSIAMO CONCLUDERE CHE PER $n \rightarrow +\infty$ IN λ^n LE COLONNE RELATIVE AGLI AUTOVALORI $\neq 1$ ANDRANNO A 0 MENTRE QUELLA RELATIVA ALL'AUTOVALORE 1 RIMARRÀ A 1. QUESTO SIGNIFICA CHE LA MATRICE P^n PER $n \rightarrow +\infty$ TENDE AD UNA COSTANTE.

CRUISE CONTROLLER

Vittorio Alzetta

SUPPONIAMO DI VOLER COSTRUIRE UN SISTEMA IN GRADO DI PORTARE UN'AUTO AD UNA DATA VELOCITÀ, CONTROLLANDO L'ACCELERATORE. CHIARAMENTE PRIMA DI ESEGUIRE QUALSIASI OPERAZIONE DOVREMO CONTROLLARE LA VELOCITÀ ATTUALE, POI LA CONFRONTEREMO CON QUELLA DESIDERATA E INFINE DECIDEREMO COSA PREMERE (FRENO O ACCELERATORE) PER RAGGIUNGERE L'OBIETTIVO. IL TUTTO PUÒ ESSERE SCHEMATIZZATO CON UNO SCHEMA DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO (O IN RETROAZIONE)



IN REALTÀ QUESTO TIPO DI MODELLO SI IMPIEGA QUANDO CI SI STA AVVICINANDO MOLTO ALLA VELOCITÀ TARGET, PRIMA VIENE UTILIZZATO UNO SCHEMA DI CONTROLLO AD ANELLO APERTO, TRAMITE IL QUALE SI EFFETTUANO OPERAZIONI PIUTTOSTO IMPORTANTI IN GRADO DI AVVICINARSI VELOCEMENTE AL TARGET. IL NOSTRO OBIETTIVO È QUELLO DI RIMPIAZZARE IL GUIDATORE CON UN CONTROLLORE, ESSO POTRÀ ESSERE MODELLATO PER ESPRIMERE DIVERSE CARATTERISTICHE.

MONOPOLY

CONSIDERIAMO UN TABELLONE DEL MONOPOLY SEMPLIFICATO, CON 5 CASELLE PER LATO E GIOCABILE CON DADI DA 3 FACCE.

9	10	11	12	13
8				14
7				15
6				16
5	4	3	2	1 VIA

DI SEGUITO ELENCHERÒ LE PROBABILITÀ DI OTTENERE 2, 3, 4, 5 O 6 CON 1 ANNO

$$2 : \frac{1}{9} \quad 3 : \frac{2}{9} \quad 4 : \frac{3}{9} \quad 5 : \frac{2}{9} \quad 6 : \frac{1}{9}$$

PERTANTO CI È POSSIBILE STABILIRE LA PROBABILITÀ DI CAPITARE IN UNA DELLE CASELLE, AD ESEMPIO LA PRIMA, AL $(k+1)$ -ESIMO TIRO

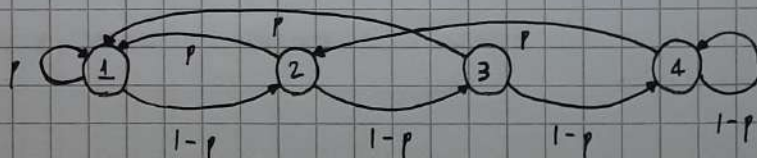
$$X_1(k+1) = X_{15}(k) \cdot \frac{1}{9} + X_{14}(k) \cdot \frac{2}{9} + X_{12}(k) \cdot \frac{2}{9} + X_{11}(k) \cdot \frac{1}{9}$$

FACENDO COSÌ CON TUTTE LE CASELLE SI OTTIENE UNA MATRICE STOCASTICA P .

INFINE, PER VALUTARE LA "BONTÀ" DI UNA CASELLA BASTERÀ MOLTIPLICARE PER IL RENDIMENTO, IN MODO DA AVERE LA RESA ATTESA DALLE PROPRIETÀ.

COMPAGNIA ASSICURATIVA

LA COMPAGNIA ASSICURATIVA X DIVIDE I CLIENTI IN 4 CLASSI DI RENDITO. SE AVANZANDO L'ANNO SI COMPIONO DEI SINISTRI SI VIENE RETROCESSI DI 2 CLASSI, ALTRIMENTI SI AVANZA DI UNA. DATA p LA PROBABILITÀ DI COMPIERE UN SINISTRO (INDIPENDENTEMENTE DALLA CLASSE) AVREMO



DUNQUE LA PROBABILITÀ $X_i(k)$ DI TROVARSI NELLA CLASSE i ALL'ANNO k SARÀ

$$X_1(k+1) = X_1(k) p + X_2(k) p + X_3(k) p$$

$$X_2(k+1) = X_1(k) (1-p) + X_4(k) p$$

$$X_3(k+1) = X_2(k) (1-p)$$

$$X_4(k+1) = X_3(k) (1-p) + X_4(k) (1-p)$$

RUNENDO QUESTE INFORMAZIONI IN UNA MATRICE SI OTTIENE

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} p & p & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \end{bmatrix}$$

VEDREMO POI COME POTREMO INTERPRETARLA STUDIANDONE GLI AUTOVALORI E AUTOVETTORI.

MUTUO IN BANCA

ANDIAMO IN BANCA PER CREDERE UN MUTUO DI 100.000 € AL TASSO FISSO DEL 4,8% ANNUO, BUNQUE DELLO 0,4% MENSILE. CHIAMIAMO α IL TASSO MENSILE, $\bar{U}$ LA RATA FISSA A FINE MESE E $X(k)$ IL MUTUO RESIDUO AL k -ESIMO MESE. È FACILE ESPRIMERE IL MUTUO RESIDUO AL $(k+1)$ -ESIMO MESE

$$\begin{aligned} X(k+1) &= X(k) + \alpha X(k) - \bar{U} \\ &= (1+\alpha) X(k) - \bar{U} \end{aligned}$$

DOVE $\alpha X(k)$ RAPPRESENTANO GLI INTERESSI SULLA QUANTITÀ DI SOLDI TENUTA IL MESE PRECEDENTE.

PER MOTIVI CHE PIÙ TARDI CAPIREMO È POSSIBILE RISCRIVERE QUESTA FORMULA COSÌ

$$X(n) = (1+\alpha)^n X(0) - (1 + (1+\alpha) + \dots + (1+\alpha)^{n-1}) \bar{U}$$

DOVE SI PUÒ RISCRIVERE IN MANIERA PIÙ COMPATTA LA SERIE GEOMETRICA

$$X(n) = (1+\alpha)^n X(0) - \bar{U} \cdot \frac{1 - (1+\alpha)^n}{1 - (1+\alpha)} = (1+\alpha)^n X(0) + \bar{U} \cdot \frac{1 - (1+\alpha)^n}{\alpha}$$

UNA VOLTA POSTO $x(0) = M$ NON RESTA CHE STABILIRE IN QUANTI MESI SI PUÒ
ESTINGUERE IL DEBITO B , AD ESEMPIO 120, E PORRE $x(120) = 0$. IN TAL MANIERA SI
TROVERÀ LA RATA MENSILE DA DOVER PAGARE.

SISTEMA A CLASSI D'ETÀ

VOLLIAMO STIMARE L'ANDAMENTO DELLA POPOLAZIONE NEI PROSSIMI ANNI, QUINDI SUDDIVIDIAMO
QUELLA ATTUALE IN QUINQUENNI E CI CHIEDIAMO QUALE SARÀ AL $(k+1)$ -ESIMO QUINQUENNIO.

IPOTIZZIAMO CHE $m_1, \dots, m_n$ SIANO I TASSI DI MORTALITÀ DELLE CLASSI ~~1, \dots, n~~ $1, \dots, n$
E $f_4, \dots, f_{10}$ I TASSI DI FERTILITÀ DELLE CLASSI $4, \dots, 10$ (CIOÈ DA 15 A 50 ANNI).

$$x_1(k+1) = f_4 x_4(k) + f_5 x_5(k) + \dots + f_{10} x_{10}(k)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) \cdot (1 - m_1)$$

$$x_3(k+1) = x_2(k) \cdot (1 - m_2)$$

PROSEGUENDO COSÌ PER TUTTE LE CLASSI SI OTTIENE UN MATRICE GIGANTESCO, STUDIANDONE

GLI AUTOVALORI SI POTRÀ CAPIRE SE LA POPOLAZIONE È IN CRESCITA O NO. IN PARTICOLARE

SE L'AUTOVALORE REALE POSITIVO SARÀ > 1 LA POPOLAZIONE CRESCERÀ ALTREMENTI CALERÀ.

QUESTO PERCHÉ $x(k) = A^k x(0)$.

MATRICI

IN QUESTO BREVE CAPITOLO ASCORDERO' ALCUNI CONCETTI APPRESI IN ALGEBRA LINEARE IN QUANTO VERANNO UTILIZZATI NEI MODELLI CHE VEDREMO E, IN PARTE, ABBIAMO VISTO NEL CAPITOLO INTRODUTTIVO.

UNA MATRICE SI PRESENTA, GENERALMENTE, NELLA FORMA

$$A \in \mathbb{C}^{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

NOI AVREMO A CHE FARE QUASI ESCLUSIVAMENTE CON MATRICI QUADRATE, TUTTAVIA E' BENE RICORDARE ALTRI 2 TIPI DI MATRICI PARTICOLARI, CIOE' LA MATRICE RIGA E COLUMNA

$$r \in \mathbb{R}^{1 \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \end{bmatrix} \quad c \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

DETTO CIO', UN'OPERAZIONE CHE SPESSO CI CAPITERA' DI EFFETTUARE TRA MATRICI SARA' CALCOLARE LA TRASPOSTA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

FACCIO PRESENTE CHE IN MATLAB, QUANDO LA MATRICE A CONTIENE DEI NUMERI COMPLESSI, LA TRASPOSTA CONTERRA' IN AUTOMATICO I CONIUGATI DEI VALORI INIZIALI.

UN ALTRO OPERATORE FONDAMENTALE E' IL DETERMINANTE, VOLENDO CALCOLARE QUELLO DELLA SEGUENTE MATRICE

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= -4 + 68 = 64$$

IN PARTICOLARE, RICORDO CHE QUANDO IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE È $\neq 0$ ALLORA LE SUE COLONNE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, CIOÈ TALI CHE

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOLO PER $\alpha = \beta = \gamma = 0$. SE UNA O PIÙ COLONNE DIPENDONO DALLE ALTRE ALLORA SI DICONO LINEARMENTE DIPENDENTI E IL DETERMINANTE DELLA MATRICE ASSOCIATA SARÀ $= 0$.

IL RANK DI UNA MATRICE CORRISPONDE AL NUMERO DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI (CIOÈ COLONNE).

TRE MATRICI SI POSSONO FARE ANCHE LE MOLTIPLICAZIONI, IL PROBLEMA È CHE TALE OPERAZIONE NON È COMMUTATIVA. IN LONERE SI AVRÀ $AB \neq BA$. CI SI PUÒ CHIEDERE SE ESISTANO DELLE MATRICI PER CUI VALE LA PRECEDENTE UGUAGLIANZA, EBBENE QUELLE MATRICI SONO DETTE INVERSE E SI INDICANO CON A^{-1} . SONO TALI PER CUI $AA^{-1} = A^{-1}A$. VALGONO ANCHE LE SEGUENTI REGOLE

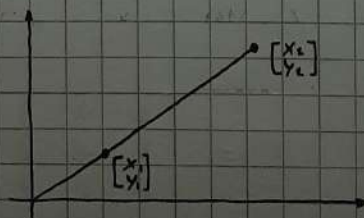
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

SPESSE LE MATRICI SONO UTILIZZATE PER TRASFORMARE DEI VETTORI IN ALTRI VETTORI.

MA QUALI VETTORI VENGONO MAPPATI IN LORO STESSI, PIÙ LUNGI O PIÙ CORTI?



IN SOSTANZA VUOLIAMO SAPERE QUALI VETTORI V , UNA VOLTA Moltiplicati PER LA MATRICE A , SI TRASFORMANO IN λV , CIOÉ UNA VERSIONE PIÙ LUNGA O PIÙ CORTA DEL VETTORE ORIGINALE. IN FORMULE

$$A v = \lambda v$$

$$\lambda I v - A v = 0$$

$$v (\lambda I - A) = 0$$

MA QUANDO È CHE UN VETTORE V Moltiplicato PER UNA MATRICE (IN QUESTO CASO $\lambda I - A$) CI DÀ 0? ANZITUTTO OSSERVIAMO CHE

$$B v = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 2v_1 - v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} v_2 = 0$$

PERTANTO $B v = 0$ QUANDO (CON $v \neq 0$) ESISTE UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DI B TALE CHE IL RISULTATO SIA 0. IN ALTRE PAROLE SI STA DICENDO CHE LE COLONNE DI B SONO LINEARMENTE DIPENDENTI, E CIOÉ CHE $\det(B) = 0$. IN CONCLUSIONE ABBIAMO CHIATO CHE IMPOSTANDO $\det(\lambda I - A) = 0$ OTTERREMO LE CONDIZIONI PER CUI $v \cdot (\lambda I - A) = 0$. È UTILE RICORDARE CHE

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0$$

IL SECONDO TERMINE È DETTO POLINOMIO CARATTERISTICO E PERMETTE DI TROVARE GLI n AUTOVALORI PER CUI $A v = \lambda v$. V SARÀ CHIAMATO AUTOVETTORE ASSOCIATO ALL'AUTOVALORE λ . IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI GRADO n AVRÀ n SOLUZIONI COMPLESSE (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA). NEL CASO DI SOLUZIONI IMMAGINARIE ESSE SARANNO IN COPPIA

CON IL PROPRIO CONIUGATO.

FA EGGIO INOLTRE OSSERVARE CHE IL DETERMINANTE DI MATRICI TRIANGOLARI, CIOÈ DELLA FORMA

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

È PAR AL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI LUNGO LA DIAGONALE, CIOÈ $\det(D) = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

INVECE DI SCRIVERE UN'EQUAZIONE DIVERSA PER OGNI AUTOVALORE / AUTOVETTORE POSSIAMO COMPATTARE TUTTO NELLA SEGUENTE MANIERA

$$A \cdot [v_1 \dots v_n] = [v_1 \dots v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AV = V\Lambda$$

DOVE V È LA MATRICE DEGLI AUTOVETTORI DI A E Λ QUELLA DEGLI AUTOVALORI. ESSENDO GLI AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI, V È INVERTIBILE E POSSIAMO SCRIVERE

$$AV = V\Lambda \Leftrightarrow AVV^{-1} = V\Lambda V^{-1} \Leftrightarrow A = V\Lambda V^{-1}$$

PERTANTO, VOLENDO CALCOLARE $A^n = A \cdot A \cdot A \dots A = V\Lambda V^{-1} \cdot V\Lambda V^{-1} \dots V\Lambda V^{-1} = V\Lambda^n V^{-1}$ BASTERÀ ELEVARE ALLA n LA MATRICE DIAGONALE DI AUTOVALORI (È SEMPLICISSIMO)

E POI MOLTIPLICARE PER LA MATRICE DI AUTOVETTORI E LA SUA INVERSA. È PER QUESTO MOTIVO CHE SAPERE DI AVERE UN AUTOVALORE > 1 È INDICATORE DEL FATTO CHE Λ^n ESPLODERÀ A INFINITO CON IL CRESCERE DI n . UN COMPUTER SARÀ IN GRADO DI CALCOLARE MOLTO RAPIDAMENTE LE DUE MATRICI COSTANTI (n AUTOVETTORI) E DI ELEVARE ALLA n Λ .

CONIGLI

UN AMICO CI REGALA UNA COPPIA DI CONIGLI GIOVANI (0-1 MESE), IPOTIZZANDO CHE NON MUOIAMO E CHE POSSANO RIPRODURSI DA VECCHI (1+ MESI) QUANTI CONIGLI AVREMO AL k -ESIMO MESE?

CI SARANNO, TRA I GIOVANI, QUELLI NATI NEL MESE PRECEDENTE E, TRA I VECCHI, QUELLI DEL MESE PRECEDENTE PIÙ QUELLI CRESCIUTI. INDICATI CON X_1 I GIOVANI E X_2 I VECCHI AVREMO

$$X_1(k+1) = X_2(k)$$

$$X_2(k+1) = X_1(k) + X_2(k)$$

DA CUI SI TROVA LA MATRICE A

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X(k)$$

SI OSSERVA CHE $X(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix}$. DA QUI SI PUÒ SCRIVERE NELLA FORMA

$$X(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n X(0) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SENZA VOLER SAPERE IL NUMERO ESATTO DI CONIGLI ALL' n -ESIMO MESE MA VOLENDO SOLO SAPERE SE LA POPOLAZIONE ESPLODERÀ O NO CI BASTERÀ STUDIARE GLI AUTOVALORI.

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

PERTANTO GLI AUTOVALORI SARANNO $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ED ESSENDO > 1 IN MODULO

CONCLUDIAMO, COME POTEVAMO ASPETTARCI, CHE LA POPOLAZIONE DI CONIGLI AUMENTERÀ.

ESPONENZIALE DI MATRICI

IN GENERE IN UN SISTEMA DINAMICO A TEMPO DISCRETO CI SI TROVA A DOVER CALCOLARE LA POTENZA DI UNA MATRICE, MENTRE PER I SISTEMI DINAMICI A TEMPO CONTINUO SARÁ UTILE SAPER CALCOLARE L'ESPONENZIALE DI MATRICI.

$$\text{TEMPO DISCRETO: } X_1(k+1) = \alpha X_1(k) \Rightarrow X_1(h) = \alpha^h X_1(0)$$

$$\text{TEMPO CONTINUO: } \dot{X}_1(t) = \alpha X_1(t) \Rightarrow X_1(t) = e^{\alpha t} X_1(0)$$

VENIAMO QUINDI COME CALCOLARE QUESTO ESPONENZIALE DI MATRICE. IN GENERE VALE LA SEGUENTE DEFINIZIONE

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n \cdot t^n}{n!} \quad [1]$$

ORA OCCORRE FARE UNA DISTINZIONE IN 3 CASI, PRECISAMENTE QUELLO IN CUI A È UNA MATRICE: DIAGONALIZZABILE CON AUTOVALORI REALI, DIAGONALIZZABILE CON AUTOVALORI COMPLESSI E NON DIAGONALIZZABILE.

DIAGONALIZZABILE CON AUTOVALORI REALI

SOTTO QUESTE IPOTESI (AUTOVALORI REALI) IL CALCOLO È PIUTTOSTO SEMPLICE. RICORDO CHE A^n PUÒ ESSERE SCRITTA COME

$$A^n = V \Lambda^n V^{-1}$$

PERTANTO SOSTITUENDO QUESTO RISULTATO NELLA [1] OTTIENIAMO

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V \Lambda^n V^{-1} \cdot t^n}{n!} = V \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n \cdot t^n}{n!} \right) V^{-1} = V e^{\Lambda t} V^{-1}$$

CALCOLARE e^{A^t} È BANALE, BASTA ELEVARE OGNI ELEMENTO DELLA MATRICE DIAGONALE Λ IN QUESTO MODO

$$e^{A^t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

QUESTA MATRICE VERRÀ POI MOLTIPLICATA PER V E V^{-1} , PRODUCENDONE UNA DOVE COMBINANDO DELLE COMBINAZIONI LINEARI DI $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$. NELLA DIAGONALE DI $V e^{A^t} V^{-1}$ INVECE CI SARANNO ESATTAMENTE GLI STESSI ELEMENTI CHE HA e^{A^t} . DI FATTO QUESTE COMBINAZIONI CI SONO UTILI PER VALUTARE IL COMPORTAMENTO DI e^{A^t} PER t CHE CRESCE, IN PRESENZA DI AUTOVALORI RELATIVI AVREMO CHE $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \rightarrow 0$, PORTANDO A 0 ANCHE e^{A^t} .

DIAGONALIZZABILE CON AUTOVALORI COMPLESSI

SE LA MATRICE A PRESENTA ALCUNI AUTOVALORI COMPLESSI OCCORRERÀ FARE QUALCHE PASSAGGIO IN PIÙ. ANZITUTTO RICORDO CHE SE DOVESSE ESSERCI UN AUTOVETTORE COMPLESSO ALLORA CIÒ COMPORTEREBBE LA PRESENZA DEL SUO CONIUGATO. DETTO QUESTO, LA LINGUAGIA MATRICE Λ POTREBBE ASSOMIGLIARE A:

$$e^{A^t} = \begin{bmatrix} e^{(\alpha + i\beta)t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{(\alpha - i\beta)t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & e^{\lambda_{n-1} t} \end{bmatrix}$$

DAL MOMENTO CHE RISULTA COMPLICATO CALCOLARE L'ESPONENZIALE DI UNA MATRICE A VALORI COMPLESSI, SI SCAVITA UN RISULTATO DELL'ALGEBRA LINEARE. QUEST'ULTIMA DIMOSTRA L'ESISTENZA DI UNA PARTICOLARE MATRICE V_r , DELLA FORMA

$$V_r = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(v_1) & \operatorname{Im}(v_1) & \dots & v_{n-1} \end{bmatrix}$$

DOVE $\text{Re}(v_i)$ E $\text{Im}(v_i)$ SONO I VETTORI COLONNA DELLE PARTI REALI E IMMAGINARIE DELL'AUTOVETTORE v_i . V_r È TALE CHE

$$\Delta_r = V_r^{-1} A V_r = \left[\begin{array}{cc|ccc} \alpha & \beta & & & \\ -\beta & \alpha & & & \\ \hline & & \lambda_2 & \dots & \\ & & & & \lambda_{k-1} \end{array} \right]$$

CHIAMATO IL RISULTATO DI QUESTA OPERAZIONE Δ_r . RAGGIO NOTARE CHE IN PRESENZA DI PIÙ AUTOVALORI COMPLESSI SI AVRAMMO PIÙ BLOCCHI 2×2 LUNGO LA DIAGONALE CONTINGENTI LA PARTE REALE (α) E IMMAGINARIA ($\pm \beta$) DEGLI AUTOVALORI COMPLESSI. AD OGNI MODO, È POSSIBILE INVERTIRE LA RELAZIONE

$$V_r^{-1} A V_r = \Delta_r \Leftrightarrow A V_r = V_r \Delta_r \Leftrightarrow A = V_r \Delta_r V_r^{-1}$$

E DUNQUE, VOLENDO CALCOLARE L'ESPONENZIALE DI A AVREMO

$$A e^{At} = V_r e^{\Delta_r t} V_r^{-1}$$

DOVE IL PROBLEMA DI CALCOLARE $e^{\Delta_r t}$ SI RIDUCE A QUELLO DI CALCOLARE L'ESPONENZIALE DEI BLOCCHI 2×2 CON α E $\pm \beta$. PER QUESTO ESISTE LA FORMULA

$$e^{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} t} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

PERANTO SULLA DIAGONALE AVREMO I COSINI E BASTA!!

PERTANTO NELLA MATRICE FINALE e^{At} , OLTRE A COMBINARE COMBINAZIONI LINEARI DEI VALORI $e^{\lambda_i t}$, COMPARANNO ANCHE COMBINAZIONI LINEARI DI $e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t)$,... I NUMERI COMPLESSI GENERANO QUINDI UNA COMPONENTE OSCILLATORIA ALL'INTERNO DELLE MATRICI CHE DESCRIVONO I NOSTRI SISTEMI DINAMICI.

NON DIAGONALIZZABILE

SE LA MATRICE A NON È DIAGONALIZZABILE L'ALGEBRA LINEARE ASSICURA L'ESISTENZA
 DI UNA MATRICE $\tilde{V}$ TALE CHE

$$\tilde{V}^{-1} A \tilde{V} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \\ & & & J_{nn} \end{bmatrix} = J$$

DOVE J_{ii} SONO DEI BLOCCHI DI JORDAN E LA MATRICE RISULTANTE È DIAGONALE A BLOCCHI.
 DOBBIAMO IMMAGINARCI I BLOCCHI DI JORDAN COME DELLE MATRICI QUADRATE 1×1 , 2×2 ,
 3×3 (RASSIME) ...

IN SOSTANZA IL PROBLEMA CALCOLARE L'ESPONENZIALE DI A SI RIDUCE A QUELLO DI CALCOLARE
 L'ESPONENZIALE DELLA MATRICE CON I BLOCCHI DI JORDAN, IL CHE SIGNIFICA CALCOLARE
 L'ESPONENZIALE DEI SINGOLI BLOCCHI DI JORDAN. FINCHÉ SI TRATTA DI BLOCCHI 1×1 È
 BANALE, PER IL CALCOLO DEI BLOCCHI 2×2 SI APPLICA LA FORMULA

BLOCCO DI JORDAN
 DI DIMENSIONE 2: $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$$e^{J_{ii}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{CORRISPONDE UN } te^{\lambda_i t}$$

PERTANTO COSÌ SI POTRÀ CALCOLARE $e^{At} = \tilde{V} e^{Jt} \tilde{V}^{-1}$.

APPROSSIMAZIONI FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

SUPPONIAMO DI AVERE UNA FUNZIONE VETTORIALE A PIÙ VARIABILI REALI

$$f(x, u) = (f_1(x_1, x_2, u), f_2(x_1, x_2, u))$$

VOLENDO CALCOLARE IL VALORE DI $f(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u)$ AVENDO NOTO IL VALORE DI

$f(\bar{x}, \bar{u})$ DOVREMO IMPIEGARE LO JACOBIANO DELLA FUNZIONE f E LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR. ANZITUTTO RICORDO CHE CALCOLARE LO JACOBIANO DI f RISPETTO ALLE VARIABILI x E u CORRISPONDE A CALCOLARNE LE DERIVATE PARZIALI

$$J_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$J_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

DALLO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR SI HA INVECE LA SEGUENTE RELAZIONE

$$f(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \delta u$$

IL MOTIVO DEL $\approx$ STA NEL FATTO CHE LA SERIE PREVEDEREBBE INFINITI TERMINI, NON SOLO DUE, MA PER I NOSTRI FINI È SUFFICIENTE TRONCARLA IN QUEL PUNTO. È SEMPRE POSSIBILE ADEUNGERE I TERMINI SUCCESSIVI.

SISTEMI A TEMPO VARIANTE E INVARIANTE

IN GENERALE UN SISTEMA DINAMICO CONSISTE DI UNA SERIE DI STATI CHE EVOLVONO NEL TEMPO PRODUCENDO QUALCOSA IN USCITA. AD ESEMPIO, SE VOLESSIMO DESCRIVERE L'ANDAMENTO DELLA TEMPERATURA ALL'INTERNO DI UNA STANZA, GLI STATI CONSISTERANNO NEL CALORE SCAMBIATO TRA L'ESTERNO E L'INTERNO DELLA STANZA, NELLA POTENZA DEI TERMOSTATI O NELLA QUANTITÀ DI PERSONE CHE SI TROVANO AL SUO INTERNO. L'USCITA SARÀ RAPPRESENTATA DALLA TEMPERATURA DELLA STANZA, OVVIAMENTE.

PER QUANTO APPENA DETTO IL NOSTRO SISTEMA POTRÀ ESSERE DESCRITTO DALLE SEGUENTI EQUAZIONI

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x, u, k) \\ y(k) = g(x, u, k) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \\ y(t) = g(x, u, t) \end{cases}$$

A SX PER IL TEMPO DISCRETO E DX PER IL TEMPO CONTINUO. LE PRIME EQUAZIONI ($x(k+1)$ E $\dot{x}(t)$) SONO CHIAMATE **MAPPE DI AGGIORNAMENTO DELLO STATO**, MENTRE LE SECONDE ($y(k)$ E $y(t)$) SONO LE **MAPPE DI AGGIORNAMENTO DELL'USCITA**. CHIARAMENTE TUTTE QUESTE EQUAZIONI SONO VETTORIALI, PERTANTO POSSONO AVERE PIÙ FUNZIONI COMPONENTI; NELL'ESEMPIO DEI CONIGLI IL SISTEMA ERA

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - u(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

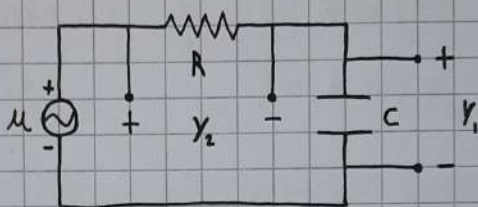
DOVE IL TERMINE $-u(k)$ INDICA CHE PRELEVO ALCUNI CONIGLI DALLA COLONIA DI CONIGLI PER MANGIARLI. COME SI PUÒ OSSERVARE QUI LA MAPPA DI AGGIORNAMENTO DELLO STATO SI COMPONE DI DUE EQUAZIONI, DIREMO QUINDI CHE L'ORDINE DEL SISTEMA È 2. IN GENERALE L'ORDINE DI UN SISTEMA È DATO DAL NUMERO DI STATI CHE HA.

MAIENO INOLTRE CHE UN SISTEMA È A ~~TEMPO~~ **TEMPO VARIANTE** SE ANCHE SOLO UNA DELLE DUE MAPPE DI AGGIORNAMENTO DIPENDE ESPlicitAMENTE DAL TEMPO t O k , IN CASO CONTINUO DIREMO CHE IL SISTEMA È A **TEMPO INVARIANTE** (CI CONCENTREREMO SU QUESTI).

SISTEMI PROPRI E STRETTAMENTE PROPRI

UN SISTEMA DINAMICO È DETTO **PROPRIO** SE LA VARIABILE $u(k)$ (L'INGRESSO) COMPARE NELLA MAPPA DI ALLINEAMENTO DELL'USCITA. SE INVECE NON VI COMPARE IL SISTEMA DINAMICO È DETTO **STRETTAMENTE PROPRIO**, IN TAL CASO L'USCITA DIPENDE SOLO DAI STATI DEL SISTEMA.

NEL CASO DI SISTEMI PROPRI SI CAPISCE CHE UNA VARIAZIONE IMPROVISA NELL'INGRESSO $u(k)$ PROVOCA UNA VARIAZIONE IMPROVISA ANCHE NELL'USCITA $y(k)$, COSA CHE NON ACCADE PER I SISTEMI PROPRI STRETTAMENTE. CONSIDERIAMO IL SEGUENTE CIRCUITO



PER LE LEGGI DI KIRCHHOFF ABBIAMO

$$\begin{cases} i = i_R = i_C \\ u - V_R - V_C = 0 \end{cases}$$

OSSERVATO CHE $i_R \cdot R = V_R$ E $C = \frac{q}{V_C} \Rightarrow C \cdot \dot{V}_C = \dot{q} \Rightarrow C \cdot \dot{V}_C = i_C$ POSSIAMO SCRIVERE

$$u - R i_R - V_C = 0$$

MA POICHÉ $i_R = i_C = i$ AVREMO

$$u - R C \dot{V}_C - V_C = 0$$

IN CONCLUSIONE, ~~PONENDO~~ $V_C = x_1$ E POTREMO COSTRUIRE IL SEGUENTE

SISTEMA LINEARE PROPRIO NON STRETTAMENTE

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -\frac{1}{RC} X_1 + \frac{1}{RC} \mu \\ Y_1 = X_1 \\ Y_2 = \mu - X_1 \end{cases}$$

IN QUANTO IN Y_2 COMPARE L'INGRESSO μ .

NEL CASO DI MAPPE DI AGGIORNAMENTO LINEARI, QUINDI DEL TIPO

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu) = Ax + B\mu \\ y = g(x, \mu) = Cx + D\mu \end{cases}$$

SI PUÒ CONDENSARE IL CONTENUTO DEL SISTEMA IN UNA MATRICE UNICA. DI SEGUITO QUELLA DEL CIRCUITO APPENA STUDIATO

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

ORA QUELLA SUL SISTEMA DINAMICO DEI CONIGLI

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

SISTEMI FINITO E INFINITO DIMENSIONALI

CIÒ CHE DISTINGUE QUESTI DUE TIPI DI SISTEMI È IL NUMERO DI FUNZIONI CHE COMpongono LA MAPPA DI ALLINEAMENTO DELLO STATO. SE GLI STATI SONO FINITI ALLORA IL SISTEMA SARÀ FINITO DIMENSIONALE, ALTRIMENTI SARÀ INFINITO DIMENSIONALE. FINORA ABBIAMO VISTO SOLO ESEMPLI DEL PRIMO TIPO, INRATTI IN QUESTO CORSO CI CONCENTREMO SU QUELLI. UN ESEMPIO DI SISTEMA DEL SECONDO TIPO PUÒ ESSERE IL SEGUENTE



È UN NASTRO TRASPORTATORE, DOVE LA CURVA CHE HO DISEGNATO RAPPRESENTA L'ALTEZZA DEL CARICO CHE È STATO POSTO SUL NASTRO. SUPPONENDO CHE IL NASTRO CORRA UN METERO L IN $\bar{T}$ SECONDI, L'USCITA DEL SISTEMA SARÀ

$$y(t) = u(t - \bar{T})$$

IL PROBLEMA È CHE PER DESCRIVERE LO STATO DEL SISTEMA IN OGNI ISTANTE SARÀ NECESSARIA UNA QUANTITÀ INFINITA DI FUNZIONI, LE QUALI DOVRANNO OGNI VOLTA RAPPRESENTARE LA FORMA DEL CARICO POSTO SUL NASTRO. IN QUESTI CASI O SI DECIDE DI DISCRETIZZARE LA QUANTITÀ CONTINUA (IN QUESTO CASO L'ALTEZZA DI MATERIALE AL NASTRO) O SI SFRUTTANO TECNICHE MATEMATICHE PIÙ AVANZATE DI QUELLE CHE VEDREMO MAI PER I SISTEMI FINITO DIMENSIONALI.

PUNTI DI EQUILIBRIO

CONSIDERIAMO UN SISTEMA A TEMPO INVARIANTE E CONTINUO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) \\ y(t) = g(x, u) \end{cases}$$

SE ESISTE UNA CONDIZIONE INIZIALE $\bar{x} = x(0)$ E L'INGRESSO È COSTANTE $u(t) = \bar{u}$
 $\forall t \geq 0$ ALLORA SI AVrà UN PUNTO DI EQUILIBRIO IMPONENDO CHE LO STATO NON
 CAMBI $x(t) = \bar{x} \quad \forall t$

$$y(t) = \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

I PUNTI DI EQUILIBRIO CONSISTONO A DELLE COPPIE STATO-INGRESSO, IN QUESTO CASO
 GENERICO SONO $(\bar{x}, \bar{u})$.

PRENDIAMO L'ESEMPIO DEI CONIGLI E CALCOLO IL PUNTO DI EQUILIBRIO DI QUEL SISTEMA.

ANZITUTTO RENDIAMO NUCLEO LA MAPPA DI AGGIORNAMENTO DELLO STATO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - \mu \end{cases}$$

IMPONENDO $x_1(k+1) = x_1(k) = \bar{x}_1$ E $x_2(k+1) = x_2(k) = \bar{x}_2$ OTTIENIAMO

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

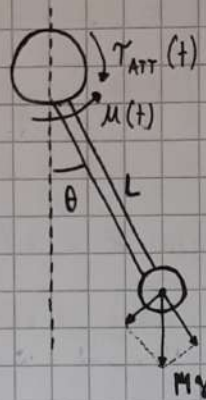
DALLA PRIMA RELAZIONE E DALLA SECONDA

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}_2 = \bar{x}_1 = \bar{\mu}$$

CEQUIVALENTE A

OGNI MESE DOVREMO PANGARE V TUTTI I CONIGLI GIOVANI PER MANTENERE STABILE IL SISTEMA.

FACCIAMO ORA UN ESEMPIO DI CALCOLO DEL PUNTO DI EQUILIBRIO UN PÒ PIÙ ELABORATO.
CONSIDERIAMO UN PICCOLO MOTORE ELETTRICO IN GRADO DI FAR OSCILLARE UN PENDOLO
SEMPLICE, COME IN FIGURA



DALLA MECCANICA POTREMO FARE DELLE CONSIDERAZIONI FISICHE, TUTTAVIA PER ANNA COSA
DOBBIAMO STABILIRE QUALI SONO GLI STATI E LE USCITE. NEL CASO DI SISTEMI MECCANICI
SPESSE SI PRENDONO LA POSIZIONE E LA VELOCITÀ COME STATI E L'ENERGIA COME USCITA.
IN QUESTO CASO PRENDEREMO L'EQUIVALENTE ANGOLARE DI POSIZIONE E VELOCITÀ, CIÒ È θ
E ω . POSTI QUINDI $x_1 = \theta$ E $x_2 = \omega$, DOBBIAMO CALCOLARE LA MAPPA DI
AGGIORNAMENTO DELLO STATO, QUINDI $\dot{x}_1 = \omega$ E $\dot{x}_2 = \alpha$. DALLA MECCANICA ABBIAMO CHE

$$I \alpha = \sum \tau$$

$$ML^2 \alpha = \mu(t) - \tau_{ATT} - \tau_{PESO}$$

$$ML^2 \alpha = \mu(t) - b\omega - M_g L \sin \theta$$

$$\alpha = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{b}{ML^2} \omega + \frac{1}{ML^2} \mu(t)$$

PER QUANTO RIGUARDA L'ENERGIA DEL SISTEMA AVREMO

$$y = K + U$$

$$y = \frac{1}{2} M v^2 + M_g L (1 - \cos \theta)$$

$$y = \frac{1}{2} M (\omega r)^2 + M_g L (1 - \cos \theta)$$

$$y = \frac{1}{2} M \omega^2 L^2 + M_g L (1 - \cos \theta)$$

DA QUESTE DUE RELAZIONI È POSSIBILE, EFFETTUANDO LE OPPORTUNE SOSTITUZIONI, OTTENERE IL SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \omega = X_2 \\ \ddot{X}_2 = -\frac{g}{L} \sin X_1 - \frac{b}{ML^2} \dot{X}_1 + \frac{1}{ML^2} \mu \\ Y = \frac{1}{2} M X_2^2 L^2 + M g L (1 - \cos X_1) \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO, PER INDIVIDUARE LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO, NON DOVREMO FAR ALTRO CHE PORRE LA VELOCITÀ ANGOLARE A 0. CHIARAMENTE, SE $\omega \neq 0$, NON SI AVREBBE EQUILIBRIO. OLTRE A QUESTO ANCHE $\bar{\mu}$ E $\bar{X}_1$ SARANNO VALORI FISSI (OVVIAMENTE SE $\omega = 0$ θ NON POTRÀ VARARE). DA QUESTE CONSIDERAZIONI SI RICAVA, A PARTIRE DA $\ddot{X}_2$

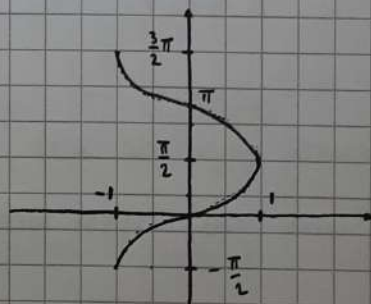
$$0 = -\frac{g}{L} \sin \bar{X}_1 - 0 + \frac{1}{ML^2} \bar{\mu}$$

$$\sin(\bar{X}_1) = \frac{\bar{\mu}}{M g L}$$

COME SI PUÒ OSSERVARE NON SI HANNO PUNTI DI EQUILIBRIO PER TUTTI I VALORI DI $\bar{\mu}$, POICHÉ IL SECONDO TERMINE DEVE OBBLIGATORIAMENTE RIMANERE MINORE O UGUALE A 1. LE SOLUZIONI, ISOLANDO $\bar{X}_1$, SARANNO

$$\bar{X}_1 = \arcsin \frac{\bar{\mu}}{M g L}$$

$$\bar{X}_1 = \pi - \arcsin \frac{\bar{\mu}}{M g L}$$



IN DEFINITIVA IL GRAFICO MOSTRA, IN FUNZIONE DELLA QUANTITÀ $\bar{\mu} / M g L$ IL VALORE CHE ASSUME θ ALL'EQUILIBRIO. PER ESEMPIO, PER $\bar{\mu} = 0$ LE DUE POSIZIONI DI EQUILIBRIO CORRISPONDONO A $\theta = 0$ E $\theta = \pi$, CIOÈ QUANDO IL PENDOLO SI TROVA LUNGO LA PERPENDICOLARE SOPRA E SOTTO IL MOTORE ELETTRICO.

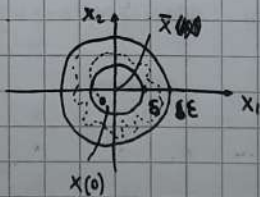
I due punti che abbiamo appena trovato sono punti di equilibrio, tuttavia presentano alcune importanti differenze. È facile notare che quando il pendolo si trova in equilibrio capovolto sottosopra basta la minima perturbazione per farlo allontanare e più tornare a quel punto. D'altra parte, quando $\theta = 0$, nonostante le perturbazioni, il pendolo tornerà sempre al punto di equilibrio per $\theta \neq 0$. Quest'idea suggerisce che esistano diversi tipi di punti di equilibrio, che vedremo ora.

PUNTI DI EQUILIBRIO STABILI

Sono tali che per ogni perturbazione δ esisterà la distanza (intesa come distanza in valore e non stazionalmente) ϵ tale che il sistema non si allontanerà mai più di ϵ da $\bar{x}$ per ogni istante di tempo t . In formule

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \|x(0) - \bar{x}\| \leq \delta : \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon \quad \forall t$$

Per aiutare a capire la definizione il seguente grafico, dove ogni punto del piano rappresenta una specifica coppia (θ, ω) , nel grafico indicate come x_1, x_2 .



La linea tratteggiata indica che $x(0)$, deviato da $\bar{x}$ di una quantità inferiore a δ , varia nel tempo (ovvero $x(t)$) senza uscire mai dalla zona delimitata da ϵ .

PUNTI DI EQUILIBRIO ASINTOTICAMENTE STABILI

Sono punti di equilibrio stabili, per cui vale tutto quello che è stato appena detto, a cui si aggiunge la condizione di convergenza di $x(t)$ a $\bar{x}$ per t crescente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

PUNTI DI EQUILIBRIO INSTABILI

SONO I PUNTI PER I QUALI NON VALGONO LE CONDIZIONI APPENA DESCRITTE. QUANDO IL PENDOLO È IN EQUILIBRIO CAPOVOLTO SOTTOSSO NON È VERO CHE PER OGNI "INSIEME DI CONFINAMENTO" (CIOÈ LIMITE OLTRE IL QUALE IL PENDOLO NON PUÒ SPOSTARSI) ESISTE UNA PERTURBAZIONE, PURA MOLTO PICCOLA, TALE DA FAR RIMANERE IL PENDOLO ALL'INTERNO DELL'INSIEME DI CONFINAMENTO.

ESEMPIO:

UN ESEMPIO DI INDIVIDUAZIONE DEI PUNTI DI EQUILIBRIO PUÒ RIVANARE IL MODELLO DI EVOLUZIONE DI UN VIRUS. SI INDICANO CON X_1 I SANI, CON X_2 GLI INFETTI E CON X_3 I GUANTI + MORTI. LA MAPPA DI AGGIORNAMENTO DELLO STATO CONSISTE IN

$$X_1(k+1) = X_1(k) - \alpha X_1(k) \cdot X_2(k)$$

$$X_2(k+1) = X_2(k) + \alpha X_1(k) \cdot X_2(k) - \beta X_2(k)$$

SENZA ENTRARE NEL MERITO DI QUESTE DUE EQUAZIONI, POSSIAMO STABILIRNE IL PUNTO DI EQUILIBRIO PONENDO $X_1(k+1) = X_1(k) = \bar{X}_1$ E $X_2(k+1) = X_2(k) = \bar{X}_2$

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_2 + \alpha \bar{X}_1 \bar{X}_2 - \beta \bar{X}_2 \Leftrightarrow \bar{X}_2 (\alpha \bar{X}_1 - \beta) = 0 \Leftrightarrow \bar{X}_2 = 0$$

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_1 - \alpha \bar{X}_1 \cdot 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow \bar{X}_1 \text{ È LIBERO}$$

QUINDI IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IL NUMERO DI INFETTI È NULLO E IL NUMERO DI SANI È INDIFFERENTE, L'UNO E L'ALTRO.

STABILITÀ DEL MOVIMENTO

CONSIDERATO IL GENERICO SISTEMA DINAMICO A TEMPO CONTINUO

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

E SUPPONIAMO DI AVERE CONDIZIONI INIZIALI $x_{nom}(0)$ E $u_{nom}(0)$. SICCOME LU HAREMO UN INGRESSO $u(t)$ NON COSTANTE CI ASPETTIAMO CHE $x(t)$ E $y(t)$ VANGNO NEL TEMPO.

EBBENE, POICHÉ LO STATO DEL SISTEMA NON MANGE COSTANTE, SI INTUISCE CHE ANCHE IL PUNTO DI EQUILIBRIO POTRÀ EVOLVERE NEL TEMPO. CI CHIEDIAMO QUINDI COSA SUCCEDA AD ESSO VARIANDO (O ALTERNANDO) LO STATO INIZIALE, IN PARTICOLARE OMA IL PUNTO DI EQUILIBRIO NON SARÀ UNO SPECIFICO BENSÌ UNA SERIE DI PUNTI (INFINITA, POTENENZIALMENTE) $(x_{nom}(t), u_{nom}(t)) \forall t$.

DIREMO QUINDI CHE UN MOVIMENTO $x_{nom}(t)$, ASSOCIATO ALLA CONDIZIONE INIZIALE $x_{nom}(0)$ E ALL'INGRESSO $u_{nom}(t)$, È **STABILE** SE

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \|x(0) - x_{nom}(0)\| \leq \delta \wedge u(t) = u_{nom}(t) : \|x(t) - x_{nom}(t)\| \leq \epsilon \forall t \geq 0$$

IN SOSTANZA SI STA DICENDO CHE PER UNA PERTURBAZIONE DALLO STATO INIZIALE $x_{nom}(0)$ NON CI SI ALLONTANERÀ MAI PIÙ DI ϵ DA $x_{nom}(t)$. DIREMO INOLTRE CHE IL MOVIMENTO È **STABILE ASINTOTICAMENTE** SE

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_{nom}(t)\| = 0$$

LA STABILITÀ IN UN SISTEMA PERMETTE DI STUDIARE UN SISTEM FARELANDOSI DEI CASI IN CUI LO STATO INIZIALE È STATO LIEGERHENTE PERTURBATO

APPROSSIMAZIONE SISTEMA NON LINEARE A LINEARE

PONIAMO CHE IL GENERICO SISTEMA A TEMPO CONTINUATO SCRITTO NELLA PRECEDENTE PAGINA SIA NON LINEARE. RICORDO INOLTRE CHE IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SI AVrà

$$f(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0 = \dot{x}$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{\mu})$$

TUTTAVIA, IN CONDIZIONI NON LINEARI AVREMO $\mu(t) = \bar{\mu} + \delta\mu(t)$ E $x(0) = \bar{x} + \delta x(0)$, DA CUI SI OTTIENIAMO $x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$ E $y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$. ASSUMENDO QUINDI IL SISTEMA AVREMO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{\mu} + \delta\mu(t)) \\ y(t) = g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{\mu} + \delta\mu(t)) \end{cases}$$

DA CUI, RICORDANDO CIÒ CHE È STATO DETTO NEL CAPITOLO SULL'APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI A PIÙ VARIABILI, È FACILE RICAVARE

$$\dot{x}(t) = \delta\dot{x}(t) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{\mu} + \delta\mu(t)) = f(\bar{x}, \bar{\mu}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ \mu=\bar{\mu}}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ \mu=\bar{\mu}}} \delta\mu(t)$$

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{\mu} + \delta\mu(t)) = g(\bar{x}, \bar{\mu}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ \mu=\bar{\mu}}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial \mu} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ \mu=\bar{\mu}}} \delta\mu(t)$$

OSSERVATO CHE $f(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$ E $g(\bar{x}, \bar{\mu}) = \bar{y}$ SI OTTIENE IL SISTEMA LINEARE

$$\delta\dot{x}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ \mu=\bar{\mu}}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ \mu=\bar{\mu}}} \delta\mu(t) = A \delta x(t) + B \delta\mu(t)$$

$$\delta y(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ \mu=\bar{\mu}}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial \mu} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ \mu=\bar{\mu}}} \delta\mu(t) = C \delta x(t) + D \delta\mu(t)$$

SIAMO INSCITTI A RAPPRESENTARE IN FORMA LINEARE UN SISTEMA CHE INIZIALMENTE NON LO ERA.

ESEMPIO:

PER APPLICARE IL METODO APPENA VISTO RIPRENDEMO IL MODELLO DEL PENDOLO, IL CUI
NOSTRO IL SISTEMA (NON LINEARE)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin(x_1) - \frac{b}{mL^2} x_2 + \frac{1}{mL^2} \mu \\ y = x_1 \end{cases}$$

ANZITUTTO CALCOLIAMO LO JACOBIANO DI f RISPETTO A x E μ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos(x_1) & -\frac{b}{mL^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}$$

DOPODICHÉ OCCORRE CALCOLARE LO JACOBIANO DI g RISPETTO A x , QUELLO RISPETTO A μ È 0.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = [1 \ 0]$$

INFINE SI VALUTANO GLI JACOBIANI IN $x = \bar{x}$ E $\mu = \bar{\mu}$, CIÒ È $\bar{x}_1 = \bar{\theta} = 0$, $\bar{x}_2 = \bar{\omega} = 0$,
 $\bar{\mu} = \bar{\tau} = 0$, OTTENENDO IL SISTEMA IN FORMA LINEARE

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{b}{mL^2} \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix} \delta \mu \\ \delta y(t) = [1 \ 0] \delta x + 0 \delta \mu \end{cases}$$

PER QUANTO RIGUARDA LA CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI DI EQUILIBRIO SI VEDRÀ COME INTERPRETARE LE
4 MATRICI A, B, C, D. AD OLCUI FINE, IN NATURA SI SARÀ QUASI ESCLUSIVAMENTE DISTINZIONE
IN PUNTI DI EQUILIBRIO INSTABILI E ASINTOTICAMENTE STABILI.

SISTEMI LINEARI

UN SISTEMA È LINEARE SE PUÒ ESSERE DA SUBITO SCRITTO NELLA FORMA

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\mu \\ y = Cx + D\mu \end{cases}$$

IN TAL CASO, DATI $x(0)$ E $\mu(t)$, LA SOLUZIONE HA UNA FORMULA CHIUSA, OVIERO

$$\begin{cases} x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \mu(\tau) d\tau \\ y(t) = C e^{At} x(0) + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \mu(\tau) d\tau + D \mu(t) \end{cases}$$

MENTRE NEL CASO DISCRETO SI AVrà

$$\begin{cases} x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B \mu(i) \\ y(k) = C A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-1-i} B \mu(i) + D \mu(k) \end{cases}$$

DOVE LE CAUSE DEL MOVIMENTO SI IDENTIFICANO NELLA CONDIZIONE INIZIALE $x(0)$ E NELL'INGRESSO $\mu(t)$ E SONO PERFETTAMENTE SEPARABILI. QUESTA COSA PORTA A CHIAMARE **EVOLUZIONE LIBERA** LA PARTE Ax (IN QUANTO DIPENDE SOLO DALLA CONDIZIONE INIZIALE) E **EVOLUZIONE FORZATA** $B\mu$, IN QUANTO DIPENDE ANCHE DALL'INGRESSO CHE VIENE DATO AL SISTEMA.

UN ALTRO FATTO DI NOTEVOLE IMPORTANZA PER I SISTEMI LINEARI È IL PRINCIPIO DI **SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI**, IN SOSTANZA DATI

$$x'(0), \mu'(t) \rightarrow x'(t)$$

$$x''(0), \mu''(t) \rightarrow x''(t)$$

DOVE $x'(t)$ E $x''(t)$ RAPPRESENTANO I MOVIMENTI GENERATI DA QUELLE CONDIZIONI INIZIALI E QUELLI INGRESSI, EBBENE PER IL PRINCIPIO DI CUI PARLAVO SI AVrà

$$x'''(0) = \alpha x'(0) + \beta x''(0)$$

$$u'''(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t)$$

$$\Rightarrow x'''(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t)$$

QUESTO SERVIRà IN GENERALE QUANDO AVREMO A CHE FARE CON DEI MOVIMENTI COMPLESSI E VORREMO SCOPRIRE IN ALTRI PIÙ SEMPLICI, O ELEMENTARI.

È UN PÒ LO STESSO PRINCIPIO DELLA TRASFORMATA DI FOURIER PER SERIE DI FOURIER. QUALSIASI, INRATTI ESSI VENGONO SCOMPOSTI IN SOMME DI FUNZIONI ARMONICHE MOLTO PIÙ SEMPLICI DA TRATTARE.

ESEMPIO DI LINEARIZZAZIONE

L'ALGORITMO DI NEWTON-RAPHSON PERMETTE DI TROVARE LE RADICI DI UNA FUNZIONE PER SUCCESSIVE APPROSSIMAZIONI, IN FORMULE SI HA

$$x(k+1) = x(k) - \alpha \frac{z(x(k))}{z'(x(k))}$$

DOVE L'ALGORITMO È MESSO IN MOTO A PARTIRE DA UN $x(0)$ E z RAPPRESENTA LA FUNZIONE DI CUI SI VUOLGONO CALCOLARE LE RADICI. α È UN COEFFICIENTE UTILE AD EVITARE SALTI ECCESSIVI TRA UN $x(k)$ E IL SUCCESSIVO $x(k+1)$. CHIAMATO $\bar{x}$ IL PUNTO DI EQUILIBRIO, SI AVrà $z(\bar{x}) = 0$ (È UNA RADICE!). SUPPONIAMO ORA DI PARTIRE DA

$$x(0) = \bar{x} + \delta x(0)$$

CALCOLIAMO ALLORA LO JACOBIANO DI $f(x, u)$ E VALUTIAMOLO IN $x = \bar{x}$ (u NON È PRESENTE)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(1 - \alpha \frac{(z'(x))^2 - z(x) z''(x)}{(z'(x))^2} \right) \Big|_{x=\bar{x}} = 1 - \alpha$$

PERTANTO LA FUNZIONE CHE DESCRIVERÀ LO SCOSTAMENTO DAL PUNTO DI EQUILIBRIO (DISTANZA DALLA RADICE) SARÀ

$$\delta x(k+1) = (1-\alpha) \delta x(k)$$

IN GENERALE, AL PASSO n -ESIMO AVREMO

$$\delta x(n) = (1-\alpha)^n \delta x(0)$$

PERCUI SE IL TERMINE $(1-\alpha)$ SARÀ MINORE DI 1 IN MODULO L'ERRORE TENDERÀ A ZERO ALL'AUMENTARE DI n A $+\infty$, ALTRIMENTI NON SI CONVERGERÀ MAI ALLA RADICE.

EVOLUZIONE LIBERA

CONSIDERIAMO DUE SISTEMI LINEARI A TEMPO CONTINUO E DISCRETO IN CUI COMPARE SOLTANTO L'EVOLUZIONE LIBERA

$$\begin{cases} x_{EL}(t) = e^{At} x(0) \\ y_{EL}(t) = C e^{At} x(0) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{EL}(k) = A^k x(0) \\ y_{EL}(k) = C A^k x(0) \end{cases}$$

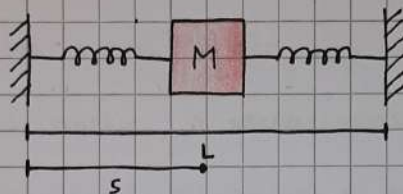
FACCIO OSSERVARE CHE DENTRO e^{At} NON POTRANNO CHE ESSERE FUNZIONI DEL TIPO $e^{\lambda_i t}$, CHE SARANNO CHIAMATI MODI DELLA MATRICE. SIMILMENTE IN A^k TROVEREMO SOLTANTO FUNZIONI DEL TIPO λ_i^k .

SUPPONIAMO, AD ESEMPIO, CHE SI ABBIAM $y_{EL}(t) = 3 e^{-t} \sin(2t) - e^{-2t}$, DI CHE ORDINE SARÀ IL SISTEMA? EBBENE SARÀ DI ORDINE ALMENO 3, INRATTI AVREMO DUE AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ E UNO REALE $\lambda_3 = -2$. EVENTUALI ALTRI AUTOVALORI POTREBBERO ESSERE ELIMINATI, QUINDI L'ORDINE SARÀ ≥ 3 .

AD OGNI MODO, PER OTTENERE UN'EVOLEZIONE LIBERA SARÁ SUFFICIENTE NON DARE ALCUN INGRESSO E VANARE SOLTANTO LA CONDIZIONE INIZIALE. PERTANTO IL MODO IN CUI IL SISTEMA RISPONDEMI DIPENDERÁ SOLTANTO DAI PARAMETRI DI A.

MASSA DEGLI ASTRONAUTI

PER MISURARE LA MASSA DEGLI ASTRONAUTI VIENE IMPIEGATO IL SEGUENTE SISTEMA



DOVE VIENE FATTA OSCILLARE LA MASSA M E MISURATO IL TEMPO CHE IMPIEGA PER COMPIERE UN'OSCILLAZIONE COMPLETA. DOPODICHÉ SI MESSA LA MASSA M CONFRONTANDO IL TEMPO MISURATO CON IL MODELLO TEORICO CHE ORA VEDREMO. ANZITUTTO INDICHERÓ CON

$$X_1 = s - \frac{L}{2} \quad \text{POSIZIONE RISPETTO AL CENTRO}$$

$$X_2 = \dot{s} \quad \text{VELOCITÀ DI M}$$

ORA ESPRIMIAMO LE FORZE ELASTICHE DELLE DUE MOLLE $F_{el} = -ks$ E $F'_{el} = k(L-s)$ E LA FORZA DI ATTITO $F_{att} = -b\dot{s}$. VOLENDO ORA SCRIVERE IL SISTEMA DINAMICO DI SEGNALÁ $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ E $\ddot{x}_2 = \text{ACCELERAZIONE}$, MA DALLA MECCANICA SI HA

$$M\ddot{s} = -b\dot{s} - ks + k(L-s) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{b}{M}\dot{s} - \frac{k}{M}s + \frac{k}{M}(L-s)$$

PERTANTO IL SISTEMA SARÁ

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = -\frac{b}{M}\dot{x}_2 - \frac{2k}{M}x_1 + \frac{kL}{M} \\ y = x_1 \end{cases}$$

MA COME EVOLVE QUESTO SISTEMA? BISOGNA STUDIARE GLI AUTOVALORI DI A , CIÒ

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} X$$

$$y = [1 \ 0] X$$

IL CUI POLINOMIO CARATTERISTICO È $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{2k}{m}$ E LE CUI SOLUZIONI SONO

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - \frac{2k}{m}} - \frac{b}{m}}{2}$$

POICHÉ $\left(\frac{b}{m}\right)^2 \approx 0$ I DUE AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI SARANNO

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

MA QUESTO VUOL DIRE CHE NELL'USCITA $y(t)$ AVREMO UN VALORE DEL TIPO

$$y(t) = \gamma e^{-\frac{b}{2m}t} \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \Phi\right)$$

PERCUI IL TEMPO DI OSCILLAZIONE O PERIODO T SARÀ UTILE A TROVARE m IN QUESTO MODO

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow m = \frac{kT^2}{2\pi^2}$$

CONVERGENZA E DIVERGENZA DEI MODI A TEMPO CONTINUO E DISCRETO

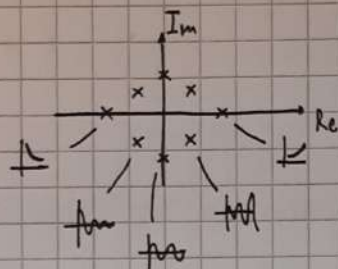
A TEMPO CONTINUO LA CONVERGENZA O DIVERGENZA DEI MODI DIPENDE DALLA PARTE REALE DEGLI AUTOVALORI, INFATTI SE IL GENERICO MODO SI PRESENTA NELLA FORMA

$$\sin(\omega t) e^{\alpha t}$$

AVREMO CHE CONVERGEMO PER $\alpha < 0$ E DIVERGEMO PER $\alpha > 0$, PER $\alpha = 0$ NON

CONVERGENZA NÉ DIVERGENZA (TUTTAVIA NEL CASO PATOLOGICO IN CUI $\lambda = 0 = \omega$, IN CUI DIVERGE)

IL SEGUENTE SCHEMA NE NASCONDE LE CONSIDERAZIONI APPENA FATTE



A TEMPO DISCRETO I MODI SARANNO DELLA FORMA λ_i^k NEL CASO DI AUTONALON
REALI E $|\lambda_i|^k \cos(k \omega_{\lambda_i})$ NEL CASO DI COMPLESSI, PERTANTO LA DIFFERENZA
FRA CONVERGENZA E DIVERGENZA VERRÀ FATTA DAL MODULO DI λ_i , IN PARTICOLARE

$|\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ CONVERGENZA

$|\lambda_i| > 1 \Rightarrow$ DIVERGENZA

STABILITÀ PUNTI DI EQUILIBRIO SISTEMI LINEARI

SUPPONIAMO DI AVERE A CHE FARE CON UN SISTEMA DINAMICO A TEMPO CONTINUO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\mu \\ y = Cx + D\mu \end{cases}$$

LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO, PER DEFINIZIONE, DEVE SODDISFARE L'EQUAZIONE $A\bar{x} + B\bar{\mu} = 0$,
IN QUANTO ALL'EQUILIBRIO LA VARIAZIONE DELLO STATO $\dot{x}$ DEVE ESSERE NULLA.

DECIDIAMO DI INTEGRALIZZARE IL NOSTRO SISTEMA CON LA CONDIZIONE INIZIALE $x(0) = \bar{x} + \delta x(0)$,
INUNQUE PER QUANTO VISTO NEL CAPITOLO SUI SISTEMI LINEARI L'EVOLUZIONE NEL TEMPO DI
 $x(t)$ SARÀ DESCRITTA DA

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} (\bar{x} + \delta x(0)) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{\mu} d\tau \\ &= e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{\mu} d\tau + e^{At} \delta x(0) \end{aligned} \quad [1]$$

OSSERVATO CHE NEL CASO DI $x'(t) = \bar{x}$ (ALL'EQUILIBRIO LO STATO NON CAMBIA),
CIOE'

$$x'(t) = \bar{x} = e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau$$

POSSIAMO SCRIVERE LA [1] COME

$$x(t) = \bar{x} + e^{At} \delta x(0)$$

DA CUI SI CAPISCE CHE PER RIDURRE LO SCARTO TRA LA POSIZIONE (STATO) CORRENTE E QUELLA DI EQUILIBRIO OCCORRE RIDURRE LA SEGUENTE QUANTITA'

$$\|x(t) - \bar{x}\| = \|e^{At} \delta x(0)\|$$

E COME ABBIAMO VISTO e^{At} , ESSENDO FORMATA DA MODI ~~MODI~~ DI CUI ABBIAMO PARLATO NEL PARAGRAFO PRECEDENTE, CONVERGERA' SE TUTTI GLI AUTOVALORI HANNO A PARTE REALE NEGATIVA, MENTRE SE ANCHE UNO DOVESSE AVERE PARTE REALE POSITIVA LA MATRICE DIVERGEREBBE E CON LEI LO SCARTO DALLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO.

A TEMPO DISCRETO IL DISCORSO E' LO STESSO, INRATTI SI HA

$$x'(k) = \bar{x} = A^k \bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B \bar{u}$$

E PARTENDO DA $x(0) = \bar{x} + \delta x(0)$ SI OTTIENE

$$x(k) = A^k \bar{x} + A^k \delta x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B \bar{u} = \bar{x} + A^k \delta x(0)$$

PERCUI STABILITA' LA QUANTITA' DA RIDURRE PER AVERE CONVERGENZA AL PUNTO DI EQUILIBRIO SARA'

$$\|x(k) - \bar{x}\| = \|A^k \delta x(0)\|$$

IN TAL CASO LO SCARTO DA $\bar{x}$ SI APPROSSIMA A 0 SE TUTTI GLI AUTOVALORI DI A SARANNO MINORI DI 1 IN MODULO.

STABILITÀ MOVIMENTO SISTEMI LINEARI

IMMAGINIAMO CHE LA CONDIZIONE INIZIALE $x_{nom}(0)$ E L'INGRESSO $u_{nom}(t)$ GENERINO NEL TEMPO IL MOVIMENTO $x_{nom}(t)$. PER STABILIRE SE QUESTO MOVIMENTO È STABILE O NO SI PERTURBA LA CONDIZIONE INIZIALE E SI OSSERVA COSA ACCADE

$$\begin{aligned} x_{nom}(t) &= e^{At} x_{nom}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_{nom}(\tau) d\tau \\ x(t) &= e^{At} (x_{nom}(0) + \delta x(0)) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_{nom}(\tau) d\tau \\ &= x_{nom}(t) + e^{At} \delta x(0) \end{aligned}$$

MA QUINDI PER $t \rightarrow +\infty$, SE e^{At} CONVERGE, POSSO FREGARMENE DELLE CONDIZIONI INIZIALI, INFATTI IL TERMINE $e^{At} \delta x(0) \rightarrow 0$ E DUNQUE $x(t) = x_{nom}(t)$. LA CONVERGENZA E DIVERGENZA DELLA MATRICE e^{At} , COME ABBIAMO VISTO, DIPENDE DAI SUOI AUTOVALORI.

QUANTITÀ DI PUNTI DI EQUILIBRIO

DATO UN SISTEMA DINAMICO LINEARE SAPPIAMO CHE LA COPPIA DI EQUILIBRIO STATO-INGRESSO DEVE SODDISFARE $A\bar{x} + B\bar{u} = 0$. MA QUANTI PUNTI DI EQUILIBRIO PUÒ AVERE UN SISTEMA?

1 PUNTO DI EQUILIBRIO

SE IL DETERMINANTE DI A È $\neq 0$ ALLORA A È INVERTIBILE E L'EQUAZIONE $\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$ HA UNA UNICA SOLUZIONE.

ZERO SOLUZIONI / INFINITE SOLUZIONI

NEL CASO IN CUI $\det(A) = 0$ LA MATRICE A NON È INVERTIBILE E PERTANTO DOBBIAMO

FENOMENI AL PASSAGGIO $A\bar{x} = -B\bar{u}$. QUI BISOGNA OSSERVARE CHE $A\bar{x}$ PUÒ PRODURRE SOLAMENTE VETTORI CHE SONO COMBINAZIONI LINEARI ^{DELLE COLONNE} DI A , INOLTRE, ESSENDO $\text{Im}(A)$ L'INSIEME DELLE COMBINAZIONI LINEARI DELLE COLONNE DI A , POSSIAMO RIASSUMERE L'ESISTENZA DI INFINITE O ZERO PUNTI DI EQUILIBRIO CON

- ZERO SOLUZIONI : $-B\bar{u} \notin \text{Im}(A)$
- INFINITE SOLUZIONI : $-B\bar{u} \in \text{Im}(A)$

QUESTO PERCHÉ SE $-B\bar{u} \notin \text{Im}(A)$ ALLORA $A\bar{x} \neq -B\bar{u}$, MENTRE SE $-B\bar{u} \in \text{Im}(A)$ ESISTERÀ UNA SOLUZIONE PARTICOLARE x_0 E CIÒ CHE BISOGNERÀ FARE PER OTTENERE LE INFINITE ALTRE SOLUZIONI SARÀ PRENDERE $v \in \text{Ker}(A)$ (CIÒ È TALE CHE $Av = 0$) E SI AVRÀ

$$A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = -B\bar{u} + 0$$

CHIARAMENTE Kv CON $K \in \mathbb{R}$ CONTINUERÀ AD APPARTENERE AL NUCLEO DI A .

STABILITÀ PUNTI DI EQUILIBRIO SISTEMI NON LINEARI

COME ABBIAMO VISTO IN PRECEDENZA I SISTEMI NON LINEARI VENGONO APPROSSIMATI A SISTEMI LINEARI APPLICANDO LO JACOBIANO VALUTATO IN DETERMINATI PUNTI. IN PARTICOLARE SARÀ PROPRIO LO JACOBIANO A SVOLGERE IL RUOLO DELLA MATRICE A NEI SISTEMI LINEARI, PERTANTO SE

$$\text{Re}(\lambda(J_{\bar{x}, \bar{u}}(t))) < 0$$

IL PUNTO DI EQUILIBRIO $\bar{x}$ SARÀ ASINTOTICAMENTE STABILE, ALTRIMENTI SE

$$\exists \lambda_i \in \lambda(J_{\bar{x}, \bar{u}}(t)) : \text{Re}(\lambda_i) > 0$$

IL PUNTO DI EQUILIBRIO $\bar{x}$ SARÀ INSTABILE. NON POSSIAMO DIRE NULLA NEI CASI INTERMEDII.

EVOLUZIONE FORZATA

Vittorio Alzetta

PER ORA NON CI SIAMO OCCUPATI DEL SECONDO TERMINE DELLA FUNZIONE DI ANDAMENTO
DELLO STATO, CIOÈ L'INTEGRALE. IN PRECEDENZA L'AVEVAMO CHIAMATO "EVOLUZIONE FORZATA",
INDICANDO CHE IL SISTEMA È FORZATO A EVOLVERSI NELLA MANIERA DETTATA DALL'INGRESSO $\mu(t)$
CHE GLI Diamo. AD OGNI MODO LE FORMULE SONO

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \mu(\tau) d\tau \\y(t) &= C e^{At} x(0) + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \mu(\tau) d\tau + D \mu(t)\end{aligned}$$

ORA CONSIDERIAMO UN SISTEMA SISO, CIOÈ SINGLE INPUT SINGLE OUTPUT E ANALIZZIAMO LA
DIMENSIONE DEI TERMINI SOTTO INTEGRALE

$$y(t) = C e^{At} x(0) + \int_0^t \underbrace{C}_{1 \times n} \underbrace{e^{A(t-\tau)}}_{n \times n} \underbrace{B}_{n \times 1} \mu(\tau) d\tau + D \mu(t)$$

1×1

DECIDIAMO QUINDI DI DEFINIRE LA FUNZIONE $g_1(t) = C e^{At} B$, IN MODO DA OTTENERE

$$y(t) = C e^{At} x(0) + \int_0^t g_1(t) \mu(\tau) d\tau + D \mu(t)$$

IL NOSTRO INTERESSE STA NEL CONOSCERE $g_1(t)$, TUTTAVIA PER FARLO OCCORRE INTRODURRE
ALCUNI STRUMENTI MATEMATICI.

SERIE DI FOURIER

IL SIGNORE FOURIER SI ACCORSE CHE L'INSIEME DELLE FUNZIONI PERIODICHE È UNO SPAZIO
VETTORIALE, LA CUI BASE PUÒ ESSERE RAPPRESENTATA DAI VETTORI

$$V_0 = 1$$

$$V_1 = \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$V_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

IN QUESTO SPAZIO VETTORIALE PUO' ANCHE ESSERE DEFINITO UN PRODOTTO SCALARE UN PO' PARTICOLARE

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) g(t) dt$$

QUESTO PERO' CI PERMETTE DI VERIFICARE SE I VETTORI DELLA BASE SONO ORTOGONALI FRA LORO, AD ESEMPIO

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T}t\right) dt \\ &= \left(-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \cdot \frac{T}{4\pi} \right) \Big|_0^T = -\cos(4\pi) \frac{T}{4\pi} + \cos(0) \frac{T}{4\pi} = 0 \end{aligned}$$

PER GLI ALTRI VETTORI VALE LO STESSO, DUNQUE SONO ORTOGONALI FRA LORO. E' QUINDI POSSIBILE ESPRIMERE UNA QUALSIASI FUNZIONE PERIODICA COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE ORTOGONALE. SI OTTENE COSI' LA SEGUENTE FORMULA

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T}t + \varphi_n\right)$$

DOVE $\frac{1}{2} a_0$ RAPPRESENTA LA PROIEZIONE DI $f(t)$ SUL VETTORE $v_0 = 1$ E φ_n PERMETTE DI NON CONSIDERARE IL COSENO, IN QUANTO E' SEMPLICEMENTE UN SENO SPOSTATO. QUESTA SOSTITUZIONE CI DICE CHE AVERE $f(t)$ O AVERE a_n E φ_n E' LA STESSA COSA. INOLTRE, ESSENDO UN CORSO DI INGEGNERIA, POTREMO ACCONTENTARCI DI CONSIDERARE $a_0, a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$, RIDUCENDO $f(t)$ ALLA DETERMINAZIONE DI 5 SOLI COEFFICIENTI.

FACCIO OSSERVARE CHE PIU' LA FUNZIONE CHE STIAMO CERCANDO DI APPROSSIMARE $f(t)$ E' "LISCIA", CIOE' CONTINUA O DERIVABILE PIU' VOLTE, PIU' I COEFFICIENTI a_n TENDRANNO A 0 PIU' VELOCEMENTE.

L'OPERAZIONE CHE ABBIAMO APPENA EFFETTUATO, CIOE' IL PASSAGGIO DA $f(t)$ AI COEFFICIENTI a_n, φ_n , E' DETTA TRASFORMAZIONE.

UN ALTRO MODO DI EFFETTUARE UNA TRASFORMAZIONE È PASSARE DA $f(t)$, FUNZIONE NON PERIODICA MA LIMITATA, AL DOMINIO DELLE FREQUENZE CON LA ~~TRA~~ TRASFORMATA DI FOURIER.

$$\begin{aligned} F(f(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cdot (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) dt \end{aligned}$$

DOVE $F(f(t))$ PUÒ ESSERE VISTO COME $\langle f(t), e^{-i\omega t} \rangle$. IN SOSTANZA SIAMO CALCOANDO LA PROIEZIONE DI $f(t)$ SUL DOMINIO DELLE FREQUENZE.

POTREBBE TORNARE UTILE IN FUTURO SAPERE COME CALCOLARE LA DERIVATA RISPETTO AL TEMPO DI e^{At} , SI AVRÀ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{d}{dt} (t^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A \end{aligned}$$

CON QUESTO RISULTATO, ASSUMENDO CHE $\det(A) \neq 0$, POSSIAMO FACILMENTE CALCOLARE L'INTEGRALE

$$\int_0^T e^{At} dt = \int_0^T A^{-1} \frac{d}{dt} e^{At} dt = A^{-1} [e^{At}]_0^T = A^{-1} (e^{AT} - I)$$

PRIMA DI RIPRENDERE IN MANO LA TRASFORMATA DI FOURIER VOGLIO SPIEGARE FORTALMENTE COME MAI LA SERIE DI FOURIER PUÒ ESSERE SCRITTA USANDO SOLO IL SENO O SOLO IL COSENO. PER PRIMA COSA SI HA

$$C_n \sin(n\bar{\omega}t + \bar{\varphi}_n) = C_n \sin(n\bar{\omega}t) \cos(\bar{\varphi}_n) + C_n \cos(n\bar{\omega}t) \sin(\bar{\varphi}_n)$$

PERANTO POSSONO ESSERE SCRITTE LE SEGUENTI UGUAGLIANZE

$$\begin{cases} C_n \cos(\bar{\varphi}_n) = a_n \\ C_n \sin(\bar{\varphi}_n) = b_n \end{cases}$$

DA CUI, ELEVANDO ENTRAMBI I MEMBRI AL QUADRATO E SOMMANDOLI SI RICAVANO

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \bar{\varphi}_n = \tan^{-1} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$$

OLTRE A QUESTO VEDIAMO COME CALCOLARE LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE QUANDO SIAMO RIUSCITI AD ESPRIMERLA IN FUNZIONE DI a_n E b_n

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\bar{\omega}t) + b_n \sin(n\bar{\omega}t)$$

$$\dot{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n n \bar{\omega} \sin(n\bar{\omega}t) + b_n n \bar{\omega} \cos(n\bar{\omega}t)$$

IN PRATICA IL PROBLEMA DI CALCOLARE LA DERIVATA SI RIDUCE AL BANALISSIMO CALCOLO DEI COEFFICIENTI $-a_n n \bar{\omega}$ E $b_n n \bar{\omega}$. IL PASSAGGIO DALLA RAPPRESENTAZIONE DI $f(t)$ NEL DOMINIO DEL TEMPO AL DOMINIO DI a_n, b_n PERMETTE DI SVOLGERE PIÙ SEMPLICEMENTE ALCUNE OPERAZIONI.

TRASFORMATA DI FOURIER

L'HO GIÀ INTRODOLTA NEL PARAGRAFO PRECEDENTE, MA ORA LA RIPRENDIAMO PIÙ NEL DETTAGLIO.

ANZITTUTTO CHIARIAMO CHE LA TRASFORMATA DI FOURIER SI APPLICA A SEGNALI NON PERIODICI CHE CONVERGONO A ZERO. VEDIAMO QUINDI COME VIENE DEFINITA

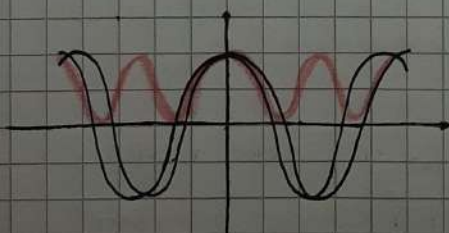
$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

RICORDO CHE LA NOTAZIONE $e^{-i\omega t}$ È UN MODO PIÙ ELEGANTE DI SCRIVERE $\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$

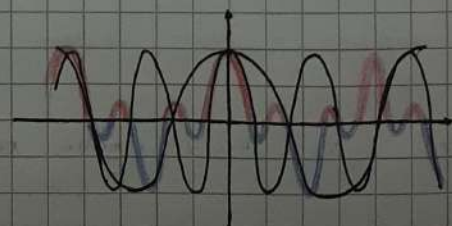
DI FATTO IL RISULTATO CHE VUOLIAMO OTTENERE È UNA RAPPRESENTAZIONE DELL'AMPIEZZA DI OGNI FREQUENZA CHE CARATTERIZZA ~~OGNI~~ IL NOSTRO SEGNALE. MA COME FACCIAMO A ~~OTTERE~~, A QUANTIFICARE, ~~OGNI~~ ~~PER~~ L'AMPIEZZA DI UNA FREQUENZA? SI MOLTIPLICA LA FUNZIONE PER IL FATTORE $\cos(\omega_1 t) - i \sin(\omega_1 t)$, DOVE ω_1 È LA FREQUENZA CHE VUOLIAMO ANALIZZARE. EBBENE SI HA CHE PIÙ LA FUNZIONE $f(t)$ È DESCRITTA BENE DA QUEL FATTORE PIÙ L'INTEGRALE DI QUESTO PRODOTTO SARÀ ALTO. CONSIDERIAMO UN CASO PARTICOLARE

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) \Rightarrow \cos(\omega_1 t) \cdot [\cos(\omega_1 t) - i \sin(\omega_1 t)] \\ \cos^2(\omega_1 t) - i \cos(\omega_1 t) \sin(\omega_1 t)$$

IL PRIMO TERMINE È SEMPRE POSITIVO CON UN VALORE MEDIO > 0 , MENTRE IL SECONDO TERMINE OSCILLA TRA VALORI NEGATIVI E POSITIVI, CON UN VALORE MEDIO NULO. PERTANTO, INTEGRANDO TRA 0 E t_0 , OTTIENIAMO t_0 , AD INDICARE UNA PERFETTA PRESENZA DI ω_1 IN $f(t)$. NELLA REALTÀ LA TRASFORMATA DI FOURIER SI APPLICA A SEGNALE NON PERIODICI, PER CUI SI AVUTIAMO FREQUENZE PIÙ O MENO PRESENTI (LA PRESENZA CONSISTE NELL'AMPIEZZA). NOTIZIAMO PER UN ATTIMO DI NON AVERE IL TERMINE $-i \sin(\omega_1 t)$ PER SEMPLICITÀ, RICORDANDO E CHE LA NOSTRA FUNZIONE SIA $f(t) = \cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t)$. DOBBIAMO CAPIRE CHE QUANTO PIÙ ω_1 È VICINO AD ω_2 E ω_3 , QUANTO PIÙ POSITIVI SARANNO I PRODOTTI $\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t)$ E $\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_3 t)$, QUESTO PERCHÉ DUE COSENI (O SENI) CON FASI SIMILI TENDONO AD AVERE VALORI DELLO STESSO SEGNO IN TUTTI I PUNTI, PERTANTO MOLTIPLICANDOLI ANDRÀ DIVENTERANNO POSITIVI. QUESTO PRODOTTO DIVENTERÀ POSITIVO PER ω_1 VICINO A ω_2 E ω_3 , MENTRE DIVENTERÀ PARMENTE POSITIVO E NEGATIVO QUANDO ω_1 SARÀ DISTANTE DA ω_2 E ω_3 . TENTO ORA DI RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE QUANTO APPENA DETTO



$$\omega_1 \approx \omega_2$$

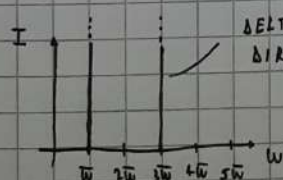


$$\omega_1 \neq \omega_2$$

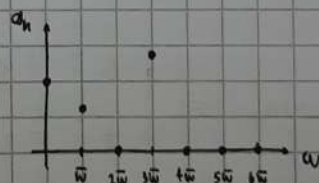
COME SI PUÒ VEDERE NEL PRIMO CASO IL PRODOTTO L'ENEM VMA FUNZIONE PROVALENTEMENTE (IN UNO ~~NON~~ COMPLETAMENTE) POSITIVA. QUALE OPERATORE MATEMATICO CI DÀ UNA MISURA DELLA POSITIVITÀ E NEGATIVITÀ DI UNA FUNZIONE? L'INTEGRALE, INFATTI È PROPRIO GRADITO AD ESSO CHE CALCOLEREMO L'INTENSITÀ DI UNA DATA FREQUENZA ALL'INTERNO DI UN SEGNALE. L'IPOTESI CHE LA FUNZIONE $f(t)$ CONVERGA A ZERO SERVE AD EVITARE CHE L'INTEGRALE TENDA A $+\infty$ NEL CASO IN CUI LA ω CONSIDERATA FOSSE PRESENTE ALL'INTERNO DEL SEGNALE (È CHIARO CHE L'INTEGRALE DELLA FUNZIONE ROSSA, CON ω_1, ω_2 , TRA 0 E $+\infty$ TENDERE A $+\infty$). DETTO CIÒ NON CI RESTA CHE CALCOLARE $F(\omega)$ PER OGNI VALORE DI ω E RAPPRESENTARE IL TUTTO SU UN GRAFICO



ESSENDO IL COSENO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y ANCHE IL LO SPETTRO DELLE FREQUENZE SARÀ SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y. DAL GRAFICO SI PUÒ NOTARE CHE PER $\omega=x$ SI HA L'INTENSITÀ PIÙ ALTA, QUESTO VUOL DIRE CHE $F(\omega=x)$, NONOSTANTE LA FUNZIONE $f(t)$ CONVERGA A ZERO (PER IPOTESI), E QUINDI NON POSSA ESSERE DESCRITTA PIENAMENTE DA UN COSENO / SENO, HA RACCONTATO LA MIGLIOR COMPATIBILITÀ CON $f(t)$. IL FATTO CHE $f(t)$ NON SIA PERIODICA IMPLICA CHE LO SPETTRO DELLE FREQUENZE SIA CONTINUO, DIVERSO È INFATTI IL CASO IN CUI LA FUNZIONE DI CUI FACCIAMO LA TRASFORMATA DI FOURIER È PERIODICA. IN LO SPETTRO DELLE FREQUENZE DIVENTEREBBE



⇒



IN REALTÀ È SOLITO PER LE FUNZIONI PERIODICHE CHE a_n TENDONO A DECRESCERE PER ARMONICHE SEMPRE MAGGIORI, AD OGNI MODO LA DIFFERENZA SOSTANZIALE STA NELLO SPETTRO DELLE FREQUENZE, CHE IN QUESTO CASO SARÀ DISCRETO. I PICCHI DISCRETI SI TROVERANNO SOLO ALLE FREQUENZE ASSOCIATE ALLE ARMONICHE EFFETTIVAMENTE PRESENTI NEL SEGNALE ($a_n \neq 0$).

TRASFORMATA DI LAPLACE

DOPO LA TRASFORMATA DI FOURIER È NECESSARIO INTRODURRE LA TRASFORMATA DI LAPLACE, CHE COME STO PER MOSTRARE, LE ASSOMIGLIA MOLTO

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

DOVE $s = \alpha + j\omega$, QUINDI PER $\alpha = 0$ SI HA LA TRASFORMATA DI FOURIER. AVENDO A CHE FARE CON UN INTEGRALE IMPROPRIO SI DIMOSTRA L'ESISTENZA DEL VALORE α^* , DETTA ASCISSA DI CONVERGENZA, TALE CHE PER OGNI $\alpha > \alpha^*$ L'INTEGRALE DI LAPLACE CONVERGE.

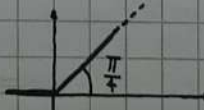
QUESTA TRASFORMATA PERMETTE DI PASSARE DAL DOMINIO DEL TEMPO A QUELLO DELLA FREQUENZA COMPLESSA, PORTANDO CON SÉ DIVERSI VANTAGGI. ANZITUTTO SI OSSERVA CHE QUESTA TRASFORMATA È LINEARE, QUINDI

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]$$

PER POTER PROSEGUIRE CI OCCORRE INTRODURRE QUALCHE NUOVO SEGNALE, CIOÈ FUNZIONE

$$\delta(t) = \text{IMPULSO} = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

$$\delta_{-1}(t) = \text{GRADINO} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$


$$\delta_{-2}(t) = \text{RAMPA} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$


ESSE HANNO UNA PARTICOLARITÀ, INFATTI A PARTIRE DA δ , INTEGRANDO DA 0 A t , SI OTTENGONO δ_{-1} E δ_{-2} . SI POSSONO INOLTRE CALCOLARE LE TRASFORMATE DI LAPLACE DI QUESTE FUNZIONI, OTTENENDO I SEGUENTI RISULTATI

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0^-} 1 \cdot e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} 0 \cdot e^{-st} dt = 1 + 0 = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \cdot [e^{-st}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s} (0 - 1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\delta_{-2}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{-2}(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \quad (\text{PER PARTI})$$

ANCHE IL CALCOLO DELLE DERIVATE È PIÙ SEMPLICE UNA VOLTA TRASFORMATO $f(t)$ CON LAPLACE. INPATTO NEL CASO GENERALE SI AVRÀ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = [f(t) e^{-st}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) (-s e^{-st}) dt \\ &= [0 - f(0)] - \int_0^{+\infty} f(t) (-s e^{-st}) dt = [0 - f(0)] + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= s \mathcal{L}[f(t)] - f(0) = s F(s) - f(0) \end{aligned}$$

IN FATTO L'OPERAZIONE DI DERIVAZIONE SI TRADUCE IN UNA ~~DERIVATA~~ MOLTIPLICAZIONE ALGEBRICA E NELLA SOTTRAZIONE DEL TERMINE $f(0)$.

PUÒ L'INTEGRAZIONE, DOPO AVER FATTO QUESTE OSSERVAZIONI, RISULTA RINCOLATA, CONTANDO DI VOLTA CALCOLO L'INTEGRALE DI $f(t)$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = g(t) \Rightarrow f(t) = \dot{g}(t) \Rightarrow F(s) = s G(s) - g(0)$$

$$\Rightarrow F(s) = s G(s) - 0 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s} F(s)$$

Lo è, infatti $\int_0^0 f(\tau) d\tau = 0$

PER CUI L'INTEGRAZIONE SI RIDUCE AD UNA DIVISIONE PER s (POSTO $g(0) = 0$), DOPO DI CHE

CHIARAMENTE RISOLVERÀ APPLICARE L'ANTI TRASFORMATA ALLA FUNZIONE $G(s)$ PER OTTENERE IL

RISULTATO NEL DOMINIO DEL TEMPO, MA L'OPERAZIONE DI INTEGRAZIONE È STATA NOTEVOLMENTE

RIDOTTA IN DIFFICOLTÀ.

CALCOLIAMO ORA LA TRASFORMATA DI LAPLACE DI UNA FUNZIONE ESPONENZIALE

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{\alpha t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-\alpha)t} dt \quad (\text{PONTO } s_1 = s-\alpha) \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-s_1 t} dt = F(s_1) = F(s-\alpha)\end{aligned}$$

ORA CONSIDERIAMO LA GENERICA FUNZIONE RTARDA $f(t-\tau)$ CON $\tau \geq 0$, CIO' LA VERSIONE RTARDATA DI $f(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-\tau)] &= \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t-\tau) \cdot e^{-st} \cdot e^{s\tau} \cdot e^{-s\tau} dt \\ &= e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt = e^{-s\tau} \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \\ &= e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} f(t') e^{-s(t')} dt = e^{-s\tau} F(s)\end{aligned}$$

DOVE IL TERZO PASSAGGIO È GIUSTIFICATO DAL FATTO CHE $f(t-\tau)$ PER $t < \tau$ VALE 0. È L'UNICA TRASFORMATA CHE ABBIAMO VISTO ~~FINORA~~ FINORA AD ESSERE IRRAZIONALE. MA VEDIAMO COME QUESTA TRASFORMATA CI SEMPLIFICA CONCRETAMENTE LA VITA NEL CALCOLO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$$\dot{X}_1(t) = -X_1(t) + 2u(t) \quad \text{--- TRASFORMO ENTRAMBI I MEMBRI ---} \rightarrow sX_1(s) - X_1(0) = -X_1(s) + 2U(s)$$

SIAMO PASSATI DAL MONDO DEGLI INTEGRALI E DERIVATE t A QUELLO DELLE MOLTIPLICAZIONI ALGEBRICHE s , RISOLVIAMO QUINDI PER $X_1(s)$

$$X_1(s)(s+1) = X_1(0) + 2U(s)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} \left(\underbrace{X_1(0)}_{\text{EV. LIBERA}} + \underbrace{2U(s)}_{\text{EV. FORZATA}} \right)$$

SUPPONIAMO DI DARE AL SISTEMA UN INGRESSO COSTANTE $u(t) = \delta_{-1}(t)$ (PULSIONE
GRABINO) E VEDIAMO COSA SI OTTIENE

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s+1} X_1(0) + 2 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s+1} X_1(0) + 2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) \end{aligned}$$

ORA PROVIAMO A TORNARE NEL DOMINIO DEL TEMPO, SARI' SEMPLICISSIMO, TANTO SAPPIAMO CHE

$$\delta_{-1}(t) \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$e^{\alpha t} \delta_{-1}(t) \rightarrow \frac{1}{s-\alpha}$$

QUINDI SI AVRA':

$$X_1(t) = e^{-t} X_1(0) + 2 (\delta_{-1}(t) - e^{-t})$$

E' STATO FACILISSIMO TROVARE LA SOLUZIONE. RICAVIAMO ORA LA TRASFORMATTA DI LAPLACE DEL
COSENO; PER PRIMA COSA SARA' NECESSARIO RICORDARE L'IDENTITA' DI EULERO

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \cdot \delta_{-1}(t) \quad \leftarrow \text{ASSICURA CHE VALGA BENE PER } t < 0$$

DA CUI POI SI POSSONO FACILMENTE TRASFORMARE I DUE TERMINI A NUMERATORE, OTTENENDO

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+i\omega + s-i\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

COLLO L'OCCASIONE PER DEFINIRE I **POLI** DI UNA TRASFORMATTA, CIOE' GLI ZERI DEL DENOMINATORE
(CON BENE SI INTENDERANNO QUELLI DEL NUMERATORE). IN QUESTO CASO I 2 POLI SONO
 $s = \pm i\omega$, DIREMO INOLTRE CHE L'ORDINE DELLA TRASFORMATTA E' 2 (IN BASE AL NUMERO DI POLI).

PER IL SENO SI SVOLGE UN CALCOLO SIMILE, QUESTA VOLTA A PARTIRE DALLA SECONDA
IDENTITA' DI EULERO

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

SI OTTIENE, DOPO CALCOLI DEL TUTTO ANALOGHI A QUELLI APPENA FATTI:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

SEMPRE DI ORDINE 2. VOLENDO CALCOLARE LA TRASFORMATA DI $e^{\lambda t} \cdot \cos(\omega t)$ POTREMO SFRUTTARE I RISULTATI APPENA OTTENUTI

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cdot \cos(\omega t)] = \frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$$

DOVE QUESTA VOLTA I 2 POLI SONO $s = \lambda \pm i\omega$.

PRIMA DI INTRODURRE IL TEOREMA CHE CI PERMETTERÀ DI STABILIRE SE UNA FUNZIONE CONVERGE O DIVERGE DATA LA SUA TRASFORMATA, INIZIAMO A CALCOLARE LA DERIVATA DI UNA TRASFORMATA

$$\begin{aligned} \frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} -t e^{-st} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}[-t f(t)] \end{aligned}$$

CALCOLIAMO PER ESEMPIO LA TRASFORMATA DI $t \cos(2t)$

$$\mathcal{L}[t \cos(2t)] = -\mathcal{L}[-t \cos(2t)] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 4} \right) = -\frac{4 - s^2}{(s^2 + 4)^2} = \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2}$$

TEOREMA DEL VALOR FINALE

QUESTO TEOREMA, DI CUI NON VERREMO LA DIMOSTRAZIONE, Afferma CHE

$$\text{se } \exists \text{ FINITO } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \bar{f} \quad \text{ALLORA} \quad \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \bar{f}$$

QUESTO FATTO NON DOVREBBE STUPIRE PIÙ DI TANTO, INRATTI $F(s)$ E $f(t)$ SONO LA STESSA COSA IN DUE DOPPII DIFFERENTI.

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

UN'ALTRA GRANDE PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE SI HA PER IL CALCOLO DELL'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE, CIOÈ

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) f(\tau) d\tau = F(s) G(s)$$

QUESTO RISULTATO È PARTICOLARMENTE UTILE PER IL CALCOLO DELL'INTEGRALE RELATIVO ALL'EVOLUZIONE FORZATA NEI SISTEMI DINAMICI LINEARI A TEMPO CONTINUO, MI RIFERISCO A

$$y(t) = C e^{At} x(0) + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

DOVE L'INTEGRALE PUÒ ESSERE RISCRITTO PONEENDO $f(t-\tau) = C e^{A(t-\tau)} B$ E $g(\tau) = u(\tau)$, RIDUCENDOSI AD UN INTEGRALE DI CONVOLUZIONE.

ANTI TRASFORMATA DI LAPLACE

POSTO CHE AVREMO A CHE FARE SOLAMENTE CON TRASFORMATE RAZIONALI CON EVENTUALE RITARDO, DEL TIPO

$$F(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_0}{s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_0} \cdot e^{-\tau s}$$

DOVE IL TERMINE $e^{-\tau s}$ INTRODUCE IL RITARDO, CAPIAMO COME CALCOLARE L'ANTI TRASFORMATA.

TRATTIAMO PRIMA LA FRAZIONE E SOLO ALLA FINE L'ESPONENZIALE. PER PRIMA COSA RENDIAMO

LA FUNZIONE STRETTAMENTE PRIMA, SE IL GRADO DEL NUMERATORE È UGUALE A QUELLO DEL DENOMINATORE SI ESTRAE b_n , RIDUCENDOSI A

$$b_n + \frac{b_n' s^{n-1} + \dots + b_0'}{s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_0}$$

UNA FUNZIONE SI DICE PROPRIA STRETTAMENTE QUANDO IL GRADO DEL NUMERATORE È MINORE DEL GRADO DEL DENOMINATORE, PER CUI TROVANDOCI NELLA SITUAZIONE IN CUI I 2 GRADI SONO UGUALI, NON CI SERVIRÀ PER ALTRO CHE ESTRARRE b_n , RIDUCENDO DI 1 IL GRADO DEL NUMERATORE. L'ANTITRASFORMATA DI b_n SARÀ CHIARAMENTE $b_n \cdot \delta(t)$, MENTRE PER LA FUNZIONE PROPRIA BISOLVERÀ PERE QUALCHE CALCOLO IN PIÙ. PER PRIMA COSA DA SI FATTORIZZA TROVANDO TUTTI I POLI p_i ;

$$\frac{b_n s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b_n s^{n-1} + \dots + b_0}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad [1]$$

DEPOICHÉ SI USA LA FORMULA DI HEAVISIDE (O ESPANSIONE IN FRATTI SEMPLICI) PER RIDURSI A

$$\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s - p_i)}$$

LA CUI ANTITRASFORMATA, PER OGNI TERMINE, SARÀ $A_i \delta_{-1}(t) \cdot e^{p_i t}$, O, SOTTINTENENDO IL GRADO, $A_i e^{p_i t}$. IN CONCLUSIONE, CHIAMATO $F'(s)$ IL INFO FATTORE DI $P(s)$, AVREMO

$$F(s) = F'(s) \cdot e^{-\gamma s}$$

LA CUI ANTITRASFORMATA SARÀ $f'(t - \gamma)$, CIOÈ

$$f(t) = b_n \delta(t - \gamma) + \sum_{i=1}^n A_i \delta_{-1}(t - \gamma) e^{p_i(t - \gamma)}$$

IL PROBLEMA SI RIDUCE PERTANTO AL CALCOLO DEI COEFFICIENTI A_i E p_i . PER QUANTO RIGUARDA I POLI p_i , NON C'È MOLTO DA DIRE, BISOLVA RISOLVERE L'EQUAZIONE CHE SI OTTIENE PONENDO UGUALE A ZERO IL DENOMINATORE DELLA [1]. A QUESTO PUNTO SI POSSONO PRESENTARE 3 CASI DISTINTI, PER CUI BISOGNERÀ ADOTTARE TECNICHE DIVERSE NEL CALCOLO DEI COEFFICIENTI A_i .

POLI REALI

IL CASO IN CUI I POLI p_i FOSSERO TUTTI REALI È IL PIÙ SEMPLICE DA TRATTARE, INFATTI I COEFFICIENTI A_i ~~POSSONO~~ POSSONO ESSERE CALCOLATI COSÌ

$$A_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s)$$

DOVE CON $F(s)$ INTENDO LA FUNZIONE [1].

POLI COMPLESSI

NEL CASO IN CUI CI FOSSERO POLI COMPLESSI CONIUGATI RICORREREMO AD UN SEMPLICE METODO INTUITIVO E POCO EFFICIENTE. DETTI

$$p_1 = \alpha_1 + j\omega_1 \quad p_2 = \alpha_1 - j\omega_1$$

I DUE POLI COMPLESSI CONIUGATI (SUPPONENDO CHE SIANO ANCHE GLI UNICI), SCRIVEREMO

$$F(s) = \frac{b_n s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots$$

DOPODICHÉ BISOGNERÀ RISOLVERE UN SEMPLICE SISTEMA, CHE SI OTTIENE ~~DA~~ ACCORDANDO

I TERMINI DELLO STESSO GRADO DOPO AVER FATTO IL MINIMO COMUNE MULTIPLO.

POLI MULTIPLI

I POLI MULTIPLI, PER QUANTO CI RIGUARDA, SARANNO RARISSIMI, È COMUNQUE UTILE

SAPERE COME AFFRONTARLI ALMENO NEL CASO IN CUI POSSANO UPPRI. ANZITUTTO LA

SCOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI VARIA LEGGERAMENTE

$$F_1(s) = \frac{n(s)}{(s - p_1)^2 (s - p_2) \dots (s - p_m)} = \frac{A_{11}}{(s - p_1)^2} + \frac{A_1}{s - p_1} + \sum_{i=2}^{m-1} \frac{A_i}{s - p_i}$$

dove A_{11} è calcolabile come

$$A_{11} = \lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1)^2 \cdot F_1(s)$$

E il coefficiente A_1 si calcola come

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow p_1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s - p_1)^2 F_1(s) \right] \right\}$$

NEL CASO IN CUI IL POLO POSSE STATO TRIPLO AVREMO DOVUTO CALCOLARE ANCHE LA DERIVATA SECONDA. PER QUANTO RIGUARDA GLI ALTRI POCHI SI AGISCE COME DESCRITTO NEI PARAGRAFI PRECEDENTI.

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA

IN QUESTO CAPITOLO VEDREMO COME SI APPLICANO I CONCETTI VISTI FINORA SULLA TRASFORMATA DI LAPLACE AI SISTEMI DINAMICI CONTINUI LINEARI O LINEARIZZATI, DEL TIPO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

DAL MOMENTO CHE LA SOLUZIONE, COME ABBIAMO VISTO, SARÀ UN INTEGRALE DI CONVOLUZIONE, CI CONVIENE PASSARE AL DOMINIO DI s

AGGIUNGERE LA MATRICE IDENTICA NON CAUSA PROBLEMI

$$\begin{cases} sI X(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

PER CUI, RARRANGIANDO I TERMINI AN DELLA PRIMA EQUAZIONE SI OTTIENE

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

SI POTRANNO QUINDI ISOLARE I TERMINI E OSSERVARE LE SORVOLLIANZE CON L'EQUIVALENTE SOLUZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + \underbrace{(sI - A)^{-1} B U(s)}_{\substack{\text{È LA TRASFORMATA DI UN INTEGRALE DI CONVOLUZIONE, SI VEDA NEI PARAGRAFI PRECEDENTI}}}$$

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

SOSTITUENDO $X(s)$ IN $y(s)$ SI OTTIENE

$$y(s) = C \left[(sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B U(s) \right] + d U(s)$$

$$= C (sI - A)^{-1} x(0) + \left[C (sI - A)^{-1} B + d \right] U(s)$$

POSTO DI AVERE A CHE FARE CON UN SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE E CON CONDIZIONE INIZIALE $x(0) = 0$, L'ESPRESSIONE SI SEMPLIFICA IN

$$y(s) = \left[C (sI - A)^{-1} B + d \right] U(s)$$

DOVE IL FATTORE CHE MOLTIPLICA $U(s)$ È CHIAMATO **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA**.

SE QUINDI SI CONOSCE QUESTA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO CONOSCIAMO TUTTO SULL'ANDAMENTO DEL SISTEMA.

DALL'ALGEBRA LINEARE SAPPIAMO CHE LA MATRICE INVERSA PUÒ ESSERE CALCOLATA COME RAPPORTO FRA MATRICE AGGIUNTA E DETERMINANTE, PERTANTO AVREMO

$$G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + d$$

HO SCRITTO d AL POSTO DI D PERCHÉ SUPPONGO DI AVERE UN SISTEMA SISO, QUINDI d È UNO SCALARE. A QUESTO PUNTO FACCIO PRESENTARE CHE NEL CALCOLO DI adj , CIOÈ LA MATRICE DEI COFATTORI, OGNI SUO ELEMENTO È IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE $(n-1) \times (n-1)$,

PERTANTO IL GRADO DI s SARÀ AL PIÙ $(n-1)$. IL DETERMINANTE, INVECE, È SCRIVIBILE ANCHE TRAMITE IL POLINOMIO CARATTERISTICO, DUNQUE SI AVrà

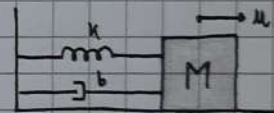
$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} + d$$

PER CUI GUARDANDO $G(s)$ SI POTrà ANCHE DIRE SE IL SISTEMA È STRETTAMENTE PROPRIO ($d=0$) E QUINDI NON ~~CI SARÀ~~ DIRETTA TRASMISSIONE TRA INPUT E OUTPUT, E PROPRIO ($d \neq 0$) E QUINDI A SEGUITO DI UN REPENTINO CAMBIO NELL'INPUT SI OSSERVERà UN EFFETTO ANALOGO NELL'OUTPUT.

ESEMPIO:

PRENDIAMO L'ESEMPIO DELLA BILANCIA PER ASTRONAUTI E SEMPLIFICHIAMOLO, CONSIDERIAMO SOLO UNA MOLLA E SOLO UN PISTONE (x_1 = POSIZIONE, x_2 = VELOCITÀ, k = COSTANTE ELASTICA, b = ATTITO PISTONE)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - bx_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$



SCRIVIAMO QUINDI IL SISTEMA IN FORMA MATRICIALE

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0 u \end{cases}$$

E ORA LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ k & s+b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + bs + k} \begin{bmatrix} s+b & 1 \\ -k & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + bs + k} \begin{bmatrix} s+b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + bs + k}$$

NON OSCILLA, NEL CASO IN CUI $\Delta < 0$ GLI AUTOVALORI (O MODI) COMPLESSI HA IMPLICAZIONE L'OSCILLAZIONE.

È UTILE OSSERVARE CHE DATA L'ULVAGLIANDA

$$Y(s) = G(s) U(s)$$

SE DAIAMO UN IMPULSO COME UNICO INGRESSO, CIOÈ $u(t) = \delta(t)$, AVREMO $U(s) = 1$ E QUINDI

$$Y(s) = G(s)$$

DA CUI SI CAPISCE CHE PER DECODIFICARE LA FORMA DI $G(s)$ È SUFFICIENTE DARE UN IMPULSO INIZIALE AL SISTEMA E POI VEDERE COME EVOLGE NEL TEMPO SENZA ALCUN ALTRO INGRESSO.

PER PASSARE DA $G(s)$ A A, B, C, D È POSSIBILE TROVARE INFINITE QUATERNE VALIDE, UNA DI QUESTE È

$$G(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1}] \quad D = [d]$$

CAMBIO VARIABILI DI STATO

IN ALCUNI CASI POTREBBE RISULTARE UTILE L'UTILIZZO DI NUOVE VARIABILI DI STATO, TIPO:

$$\begin{aligned} X_1 &= s_1 & \tilde{X}_1 &= X_1 - X_2 \\ X_2 &= s_2 & \tilde{X}_2 &= X_2 \\ X_3 &= \dot{s}_1 & \tilde{X}_3 &= X_3 - X_4 \\ X_4 &= \dot{s}_2 & \tilde{X}_4 &= X_4 \end{aligned}$$

$$\tilde{X} = T X \rightarrow \tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

È LA MATRICE DELLA TRASFORMAZIONE E DEVE, OVVIAMENTE, ESSERE INVERTIBILE

CALCOLIAMO ORA LA DERIVATA DELLE VARIABILI DI STATO TRASFORMATE

$$\dot{\tilde{x}} = T \dot{x} = T(Ax + B_m)$$

DA CUI SI NECCA IL NUOVO SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \overbrace{TAT^{-1}}^{\text{NUOVA A}} \tilde{x} + \overbrace{TB}_m \\ y = \underbrace{CT^{-1}}_{\text{NUOVA C}} \tilde{x} + \underbrace{D}_m \end{cases}$$

NONOSTANTE ABBIAMO OTTENUTO UN SISTEMA DIVERSO POSSIAMO OSSERVARE COME LA

P.d.T. NON SIA CAMBIATA

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= CT^{-1} (sI - TAT^{-1})^{-1} TB + D = CT^{-1} (sTIT^{-1} - TAT^{-1})^{-1} TB + D \\ &= CT^{-1} (T(sI - IA)T^{-1})^{-1} TB + D = CT^{-1} (T)^{-1} (sI - IA)^{-1} (T^{-1})^T TB + D \\ &= C(sI - IA)^{-1} B + D = G(s) \end{aligned}$$

VARIE RAPPRESENTAZIONI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

OLTRE ALLA RAPPRESENTAZIONE CHE ABBIAMO GIÀ VISTO È POSSIBILE ESPRIMERE LA P.d.T.

IN ALTRI MODI. AD ESEMPIO NELLA FORMA POLI-ZERI

$$G(s) = \frac{K \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

DOVE AL NUMERATORE TROVIAMO UNA COSTANTE (K) DETTA M TRASFERIMENTO, LA PRODOTTA DEI ZERI REALI E LA PRODOTTA DEI ZERI COMPLESSI. AL DENOMINATORE SI TROVANO INVECE s^g , CIÒ È IL POLO SULL'ORIGINE (DOVE g È DETTO TIPO DEL SISTEMA E INDICA LA MOLTEPLICITÀ DI QUESTO PARTICOLARE POLO), LA PRODOTTA DEI POZI REALI E QUELLA DEI POZI COMPLESSI. A PROPOSITO DI s^g SI DIRÀ CHE IL SISTEMA CONTIENE DEGLI

INTEGRATORI ($1/s$) O DEI DERIVATORI (s , PER $y < 0$), FACENDO RIFERIMENTO AL FATTO CHE NEL DOMINIO DI LAPLACE INTEGRARE O DERIVARE CONSISTE NEL MOLTIPLICARE O DIVIDERE PER s .

CHIAMEREMO INOLTRE ω_n E α_n **PULSAZIONI NATURALI** DELLE, RISPETTIVAMENTE, COPPIE DI POLI E ZERI ~~CONIUGATI~~ COMPLESSI CONIUGATI. ξ E ζ SI DIRANNO INVECE **SMORZAMENTI** DELLE COPPIE DI POLI E ZERI COMPLESSI CONIUGATI.

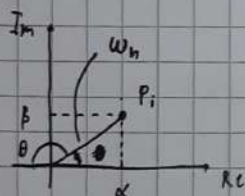
CHIAMATI $p_{1/2} = \alpha \pm j\beta$ DUE POLI COMPLESSI CONIUGATI LA PULSAZIONE NATURALE CORRISPONDE A

$$p_1 \cdot p_2 = (s - (\alpha + j\beta))(s - (\alpha - j\beta)) = (s - \alpha)^2 + \beta^2$$

$$= s^2 - 2\alpha s + \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{\text{PULSAZIONE NATURALE}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

SIMILMENTE LO SMORZAMENTO PUÒ ESSERE CALCOLATO COME

$$2\alpha s = 2\xi \omega_n \Rightarrow \alpha s = \xi \omega_n \Rightarrow \alpha s = \xi \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$



$$\Rightarrow \xi = s \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \cos \theta = \frac{\text{Re}(p_i)}{|p_i|}$$

DUNQUE, AFFINCHÉ UN SISTEMA SIA ASINTOTICAMENTE STABILE DEVE VERIFICARSI CHE I POLI SIANO A PARTE REALE NEGATIVA E PERTANTO, ESSENDO θ COMPRESO FRA $-\frac{\pi}{2}$ E $\frac{\pi}{2}$ LO SMORZAMENTO DOVRÀ ESSERE POSITIVO.

UN'ALTRA UTILE RAPPRESENTAZIONE DELLA f.d.t. È DETTA FORMA DI **BODE** E SI PRESENTA COSÌ

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + 2 \frac{\zeta_i s}{\omega_{n_i}} + \frac{s^2}{\omega_{n_i}^2}\right)}{s^N \prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + 2 \frac{\xi_i s}{\omega_{n_i}} + \frac{s^2}{\omega_{n_i}^2}\right)}$$

SI OSSERVI CHE QUESTA FORMA PUÒ ESSERE OTTENUTA DALLA PRECEDENTE PONENDO

$$(s + z_i) = z_i \left(1 + \frac{s}{z_i} \right) = z_i (1 + \tau_i s)$$

} COSTANTI DI TEMPO

$$(s + p_i) = p_i \left(1 + \frac{s}{p_i} \right) = p_i (1 + T_i s)$$

NELLE PRIME DUE PRODUZIONI E RACENDO UN'OPERAZIONE SIMILE SULLE SECONDE PRODUZIONI. IN SOSTANZA LE DUE PRODUZIONI RELATIVE ALI ZERI E POLI COMPLESSI DIFFERISCONO PER IL RACCOLTAMENTO DEI RATTORI $u_{n_i}^2$ E $\alpha_{n_i}^2$, I QUALI, INSIEME ALI z_i E p_i RACCOLTI FINISCONO DENTRO IL COEFFICIENTE M .

DIREMO CHE GLI ZERI E I POLI SARANNO STABILI ANCHE

$$\text{"ZERO STABILE"} \Rightarrow \operatorname{Re}(z_i) < 0$$

$$\text{"POLO STABILE"} \Rightarrow \operatorname{Re}(p_i) < 0$$

INOLTRE, DOPO AVER OSSERVATO CHE GLI ZERI E I POLI IN REALTÀ SONO $-z_i$ E $-p_i$, POSSIAMO CONCLUDERE CHE

$$z_i, p_i < 0 \Rightarrow \tau_i, T_i > 0$$

$$z_i, p_i > 0 \Rightarrow \tau_i, T_i < 0$$

CI POSSIAMO CHIEDERE ORA COME SI CALCOLI IL COEFFICIENTE M , IN REALTÀ È MOLTO SEMPLICE. BASTA OSSERVARE CHE RACENDO TENDERE s A 0 E MOLTIPLICANDO ENTRAMBI I MEMBRI DELLA $G(s)$ IN FORMA DI BODE PER s^4 SI OTTIENE M PER UNA SERIE DI PRODUZIONI A 1, CIÒ M . IN FORMULE AVREMO

$$M = \lim_{s \rightarrow 0} s^4 G(s)$$

RISPOSTA AL GRADINO DI SISTEMI ELEMENTARI

COME ABBIAMO VISTO LA F.d.T. PUÒ ESSERE SCOMPOSTA IN PIÙ TERMINI DEL TIPO

$$b_n, \quad \frac{A_i}{s + p_i}, \quad \frac{B_i s + C_i}{s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_{n_i}^2}$$

A SECONDA CHE CI SIANO POLI O ZERI. IN QUESTO PARAGRAFO VEDREMO IN DETTAGLIO LA RISPOSTA AI SISTEMI DESCRITTI DA PARTICOLARI F.d.T. AL GRADINO UNITARIO.

NEL SEGUITO ESPONEMO LA F.d.T. NELLA FORMA DI BODE, DAL MOMENTO CHE SOLO IN ESSA COMPaiono LE COSTANTI DI TEMPO.

NESSUN POLO E ZERO

NEL SEMPLICISSIMO CASO IN CUI LA F.d.T. NON PRESENTA NÉ POLI NÉ ZERI, AVREMO

$$G(s) = \mu \Leftrightarrow Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \mu \cdot \frac{1}{s} \Leftrightarrow y(t) = \mu \delta_-(t)$$

IL CUI GRADINO $\delta_-(t)$, O RISPOSTA NEL TEMPO (PER $t \geq 0$), È



1 POLO

CONSIDERIAMO LENSAMENTE LA F.d.T. IN MODO TALE CHE CONTENGA UN POLO, CIÒ È

$$G_1(s) = \frac{\mu}{1 + sT}$$

LA RISPOSTA $Y_1(s)$ SI OTTIENE MOLTIPLICANDO $G_1(s)$ PER LA TRASFORMATA DEL GRADINO

$$Y_1(s) = G_1(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\mu}{1 + sT} \cdot \frac{1}{s}$$

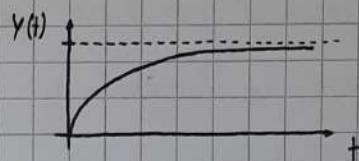
VOLENDO RIPARTIRSI NEL DOMINIO DEL TEMPO OCCORRE ADUNQUE $Y_1(s)$ IN FORME SEMPLICI, COME SEVE

LA HO RICAVATE CERCANDO I ZERI DEL POLINOMIO $s(1+sT) = 0$

$$Y_1(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \frac{1}{T}} \longleftrightarrow \left[\begin{aligned} A_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\mu}{1+sT} \cdot \frac{1}{s} = \mu \\ A_2 &= \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} (s + \frac{1}{T}) \frac{\mu}{1+sT} \cdot \frac{1}{s} = \frac{T\mu}{s} - \mu \end{aligned} \right] \longleftrightarrow Y_1(s) = \frac{\mu}{s} - \frac{\mu}{s + \frac{1}{T}}$$

DA CUI SI RICA VA FACILMENTE LA RISPOSTA $y_1(t)$

$$y_1(t) = \mu (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \delta_-(t)$$



SI PUÒ CALCOLARE CHE $y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = \mu$. CI SI PUÒ CHIEDERE PERÒ QUANTO TEMPO DEVE TRASCORRERE AFFINCHÉ IL SISTEMA SI ASSESTI INTORNO AL $y_{\infty} \pm x\%$. AD ESEMPIO, IN AMBITO INGEGNERISTICO, PUÒ ESSERE UTILE CONOSCERE IL TEMPO DI ASSESTAMENTO ALL' 1%. QUEST'ULTIMO È FACILMENTE CALCOLABILE CONE

$$\forall t \geq \bar{T} \quad T_{a1} = \inf \left\{ \bar{T} : \left| \frac{y(t) - y_{\infty}}{y_{\infty}} \right| < \frac{1}{100} \right\}$$

CONOSCENDO IL VALORE DI $y_1(t)$ A $t \rightarrow \infty$, CIÒÈ μ , E AVENDO LA LEGGE $y_1(t)$ POSSIAMO RICAVARE ~~DE~~ ~~PER~~ ~~DA~~ T_{a1} . ANZITUTTO ~~NECESSARIO~~ ESPlicitIAMO L'INSIEME DI CUI POI INDICHEREMO L'inf

$$\left| \frac{\mu (1 - e^{-\frac{t}{T}}) - \mu}{\mu} \right| < 0,01 \iff \left| -e^{-\frac{t}{T}} \right| < 0,01 \iff -\frac{t}{T} < \ln 0,01 \iff t > 4,6 T$$

PENSANDO IL TEMPO DI ASSESTAMENTO DI UN SISTEMA DEL PRIMO ORDINE ALL' 1% È APPROSSIMABILE A $t > 5T$. CHIARAMENTE PIÙ T È PICCOLA PIÙ IL SISTEMA SARÀ VELOCE AD ASSESTARSI.

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SISTEMA NON LINEARE, DOVE x_1 RAPPRESENTA LA VELOCITÀ DEL MEZZO, b IL COEFFICIENTE DI ATTITO AL SUOLO E μ LA COPPIA IN INGRESSO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{b}{M} x_1^2 + \frac{\mu}{M} \\ y = x_1 \end{cases}$$

LINEARIZZANDO IN UN INTORNO DEL PUNTO DI EQUILIBRIO $b \bar{x}_1^2 = \bar{\mu}$ SI OTTIENE

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = \left(-\frac{2b}{M} \bar{x}_1 \right) \delta x_1 + \frac{1}{M} \delta \mu \\ \delta y = \delta x_1 \end{cases}$$

DA CUI SI RICAVA FACILMENTE LA f.d.t. IN FORMA DI BODE

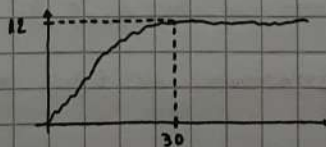
$$G(s) = 1 \cdot \left(s + \frac{2b}{M} \bar{x}_1 \right)^{-1} \cdot \frac{1}{M} = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{s + \frac{2b}{M} \bar{x}_1} = \frac{1}{Ms + 2b\bar{x}_1} = \frac{\frac{1}{2b\bar{x}_1}}{1 + \frac{M}{2b\bar{x}_1} s}$$

PER CUI SI RICONOSCONO SUBITO I VALORI DI μ E T :

$$\mu = \frac{1}{2b\bar{x}_1}$$

$$T = \frac{M}{2b\bar{x}_1}$$

PER FISSARE MEGLIO LE IDEE, IMMAGINIAMO DI OTTENERE IL SEGUENTE CARICO IN SEQUITO ALLA MISURA DI UNA GAMMALETTA



SI POTREBBE CONCLUDERE CHE LA $G(s)$ HA $\mu = 12$ (CHE CORRISPONDE, ANZI O FORSE, AL VALORE y_{ss}) E $T = \frac{30}{5} = 6$ (INFATTI $T_{AL} \approx 5T$), GIACCHÉ $G(s) = \frac{12}{1+6s}$

2 POLI

CON DUE POLI LA F.d.T. SARÀ DEL TIPO

$$G_2(s) = \frac{M}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

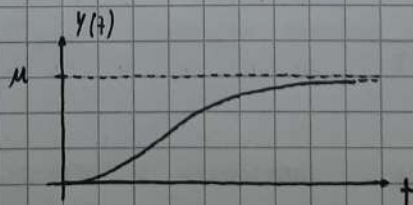
MOLTIPLICANDO PER LA TRASFORMATA DI $\delta_{-1}(t)$ E NAMANWIANDO I TERMINI SI OTTIENE

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= G_2(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{M}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{A_1}{s + \frac{1}{T_1}} + \frac{1}{s} \cdot \frac{A_2}{s + \frac{1}{T_2}} \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{A_1 T_1}{1+sT_1} + \frac{1}{s} \cdot \frac{A_2 T_2}{1+sT_2} \end{aligned}$$

CHE È LA SOMMA DI DUE TERMINI ESATTAMENTE UGUALI ALLA $Y_1(s)$ DEL CASO AD 1 POLO, L'UNICA DIFFERENZA STA NEL FATTO CHE PRIMA AVEVAMO M AL DENOMINATORE E ORA ABBIAMO $A_1 T_1$ E $A_2 T_2$. PORTANDO L'ANTITRASFORMATA, CIOÈ L'USCITA NEL DOMINIO DEL TEMPO, SARÀ

$$y_2(t) = A_1 T_1 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) + A_2 T_2 (1 - e^{-\frac{t}{T_2}})$$

IL CUI GRAFICO È



DOVE IL FLESSO È DOVUTO AL FATTO CHE IN A_1 E A_2 SONO CONTENUTI SPA T_1 CHE T_2 . AD OGGI NOBIL IL TEMPO DI ASSESTAMENTO ALL'1% SI PUÒ ASSUMERE COME

$$T_{d1} \approx 5 \max(T_1, T_2)$$

IN SOSTANZA AVENDO T_1 E T_2 (CIOÈ I TEMPI DI ASSESTAMENTO DEI 2 POLI) SONO DIVERSI, A

COMANDARE È QUELLO PIÙ ALTO, CIOÈ IL POLO PIÙ LENTO AD ARRESTARSI. È PER QUESTO MOTIVO CHE VIENE INTRODOTTO IL CONCETTO DI **DECADE**, CIOÈ, DIREMO CHE DUE GRANDEZZE DISTAHO UNA DECADE QUANDO

$$\frac{T_1}{T_2} = 10 \quad \left(\frac{T_1}{T_2} = 100 \text{ SONO DISTANTI } 2 \text{ DECADE} \right)$$

2 POLI E 1 ZERO

PER ADESSO CI SIAMO LIMITATI A CONSIDERARE CASI IN CUI COMPARIANO SOLO POLI NELLA P.d.t., PROVIAMO A VEDERE COSA SUCCEDE SE AGGIUNGIAMO UNO ZERO AL NUMERATORE, CIOÈ

$$G(s) = M \cdot \frac{1 + \tau s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

OSSERVIAMO CHE LA RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO NEL DOMINIO DI LAPLACE PUÒ ESSERE SCRITTA COME

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \underbrace{\frac{M}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}}_{Y_2(s)} \cdot \frac{1}{s} + \tau s \underbrace{\frac{M}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}}_{Y_2(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

SI OSSERVA COME I TERMINI EVIDENZIATI CORRISPONDONO ESATTAMENTE ALLA $Y_2(s)$, CHE ABBIAMO GIÀ STUDIATO. NEL SECONDO ADDENDO È PRESENTE IL FATTORE τs , AD IMMAGINE CHE ANTIDIFFERENZIAMO QUEL MEMBRO DOVEREMO CONSIDERARE LA DERIVATA. IL RISULTATO È

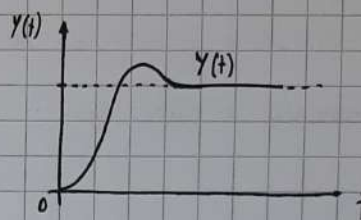
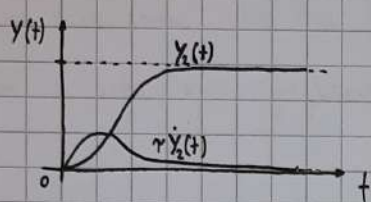
$$y(t) = y_2(t) + \tau \dot{y}_2(t)$$

IN SOSTANZA AVER AGGIUNTO UNO ZERO HA COMPORTATO L'AGGIUNTA DI τ DERIVATE DELLA FUNZIONE. DOPPIATO PER $\tau = 0$ CANCELLO LO ZERO E QUINDI LA DERIVATA, MENTRE PER $\tau = T_1$ O T_2 STO CANCELLANDO L'EFFETTO DI UNO DEI 2 POLI, QUINDI IL SISTEMA TORNEREBBE AL 1° ORDINE

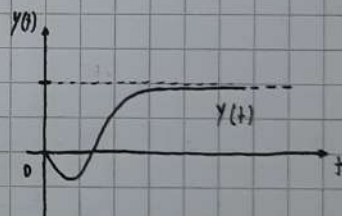
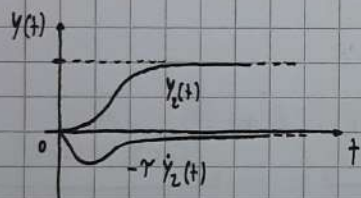
ASSUNTO CHE SARÁ IMPOSSIBILE, NELLA PRATICA, CANCELLARE TOTALMENTE UN POLO, POTREMO OSSERVARE CHE AVENDO $\tau \approx T_1$ o T_2 LA RISPOSTA SARÁ MOLTO SINGOLARE AL RISPETTO AL SISTEMA DI PRIMO ORDINE, MA NON IDENTICA.

IN GENERE SI CERCA DI ELIMINARE I POLI VELOCI (CON T BASSO), IN QUANTO SONO QUELLI LENTI A CARATTERIZZARE MAGGIORMENTE LA DINAMICA DEL SISTEMA.

SI HA INOLTRE CHE PRESENDO τ MOLTO ALTO (RIS. DEL T MAGGIORE) POSSONO VERIFICARSI DELLE **SOVRAELONGAZIONI**, CIOÉ



SIMILMENTE SI PUÓ GENERARE UNA **SOTTOELONGAZIONE** NEL CASO IN CUI τ FOSSE NEGATIVO. IN QUEL CASO SI AVREBBE



IN QUESTI CASI OCCORRE DARE UN INGRESSO IL LARGO E NON ASPETTARE CHE SI ESAURISCA L'EFFETTO DELLA SOTTOELONGAZIONE PRIMA DI DARE ALTRO INGRESSO. RACCOMANDO OSSERVARE CHE LA PRESENZA DI UN $\tau < 0$ IMPLICA UN $z_i > 0$.

QUASI TUTTI I SISTEMI SONO APPROSSIMABILI A SISTEMI DEL SECONDO ORDINE CON POLI COMPLESSI CONIUGATI.

2 POLI COMPLESSI CONIUGATI

IL PRINCIPE DEI SISTEMI DEL SECONDO ORDINE A POLI COMPLESSI CONIUGATI É

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$

I CUI POLI SONO

$$p_{1/2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

BASTA PORRE LA PARTE
REALE < 0, POI NON CI
SI DEVE DIMENTICARE DI
IL $\sqrt{1-\xi^2}$ CHE PUÒ FAR DIVENTARE
REALE LA "PARTE IMMAGINARIA"

DOVE $0 \leq \xi < 1$ IMPONE CHE I POLI SIANO ASINTOTICAMENTE STABILI. ALTRI

UTILI RISULTATI SU QUESTO SISTEMA SONO I SEGUENTI

$$y_{\infty} = \mu \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0$$

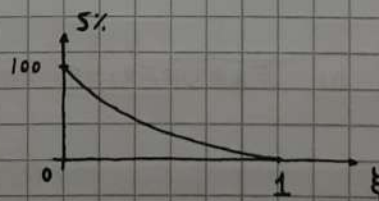
MENTRE LA RISPOSTA DEL SISTEMA AL GRADINO UNITARIO È



COME SI PUÒ OSSERVARE, QUESTO TIPO DI SISTEMA PRESENTA SEMPRE UNA SOVRACOLLAZIONE, È NEL NOSTRO INTERESSE ESPRIMERE IL SUO VALORE IN FUNZIONE DI ξ E ω_n . LA FORMULA CHE UTILizzeremo SARÀ

$$S\% = 100 e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

TALE FUNZIONE È COSÌ FATTA



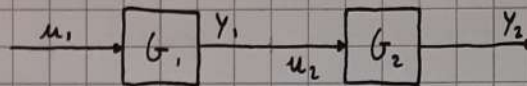
PERCIÒ SE VOLESSI CHE IL MIO SISTEMA SOTTOLASSE MENO DEL 20% SOVRACOLLAZIONE

MI BASTEREBBE PRENDERE L' ξ^* IN CORRISPONDENZA DEL 20%. E PORRE $\xi \geq \xi^*$. FACCIO

INOLTRE OSSERVARE CHE PER QUESTO SISTEMA $T_{d1} = \frac{4,6}{\xi \omega_n} \approx \frac{5}{\xi \omega_n}$.

SERIE DI FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

SARÀ UTILE IN SERVITO SAPERE COME SEMPLIFICARE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO IN SERIE, CIOÈ TALI CHE L'USCITA DI UNA CORRISPONDA ALL'INGRESSO DELL'ALTRA.



ESSENDO $y_1 = G_1 u_1$ E $y_2 = G_2 u_2 = G_2 y_1$ SI AVrà

$$y_2 = G_1 G_2 u_1$$

PER CUI $G_L = G_{\text{serie}} = G_1 \cdot G_2$. CI SI PUÒ CHIEDERE MA SE SIA STATO CONVENIENTE O NO QUESTO CAMBIO. SUPPONIAMO CHE

$$G_1 = \frac{n_1}{d_1}$$

$$G_2 = \frac{n_2}{d_2}$$

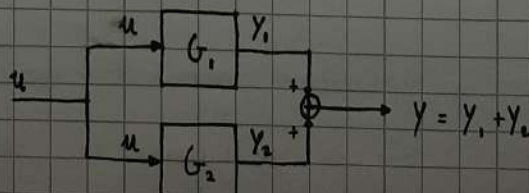
$$G_1 \cdot G_2 = \frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}$$

SIANO NUMERI (CIOÈ RIDOTTE AI MINORI TERMINI), IL PRODOTTO PRESENTERÀ I POLI DI G_1 E QUELLI DI G_2 , TUTTAVIA POTREBBERO CONVENIRE AVERE LUOGO SEMPLIFICAZIONI TRA GLI ZERI DI G_1 E I POLI DI G_2 O VICEVERSA. POICHÉ LE CANCELLAZIONI NON SONO MAI PERFETTE APPLICHEREMO LA RETROAZIONE PER RENDERE TAN. TYPICAMENTE, PER VELOCIZZARE UN SISTEMA, SI CERCANO DI CANCELLARE I POLI LENTI.

DEFINIAMO **GUADO RELATIVO** IL NUMERO DI POLI IN PIÙ RISPETTO AL NUMERO DI ZERI.

PARALLELO DI FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Lo schema di RENDIMENTO È



DAL MOMENTO CHE $y = y_1 + y_2$ E $y_1 = u \cdot G_1$ E $y_2 = u \cdot G_2$ SI HA

$$y = (G_1 + G_2) u$$

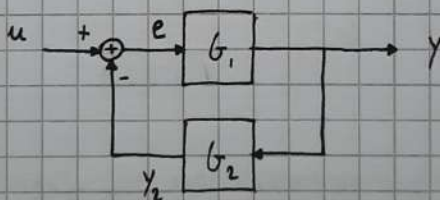
PER CUI $G_{//} = G_1 + G_2$. IN SOSTANZA AD UNIRE DUE F.d.t. IN PARALLELO EREDITIAMO I POLI E OTTENIAMO UN NUOVO NUMERATORE

$$G_1 + G_2 = \frac{n_1 d_2 + n_2 d_1}{d_1 d_2}$$

CHIARAMENTE ANCHE QUI SI POTRANNO AVERE QUASI-CANCELLAZIONI DEI POLI (SEMPRE STABILI PERÒ, ALTRIMENTI ALLA LUNGA I VALORI ESPLODONO COMUNQUE).

RETROAZIONE E FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

ABBIAMO GIÀ VISTO COS'È LA RETROAZIONE IN UNO DEI CAPITOLI INIZIALI, ORA VEDIAMO COME SI DESCRIVE IL LEGAME FM E F.d.t. IN RETROAZIONE NEGATIVA:



AVENDO $e = u - y_2$ SI AVRÀ $y = G_1(e) = G_1(u - y_2) = G_1(u - y \cdot G_2)$

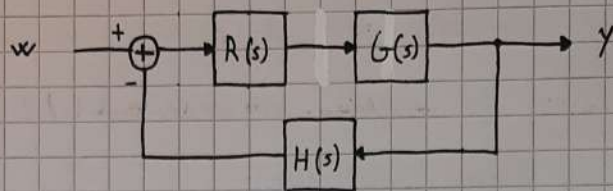
DA CUI

$$y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} u$$

CHIAMATI n_1, n_2, d_1, d_2 I NUMERATORI E I DENOMINATORI DI G_1 E G_2 POSSIAMO SCRIVERE IL RAPPORTO COME

$$G_{\text{FEEDBACK}} = \frac{\frac{n_1}{d_1}}{1 + \frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2}} = \frac{n_1 d_2}{d_1 d_2 + n_1 n_2}$$

ABBIAMO COSÌ OTTENUTO UNA FORMULA IN CUI OGNI ELEMENTO DIPENDE DAL TRASFUGO G_1 .
IN LINGUALE LO SCHEMA DI RETROALIMENTAZIONE SARÀ COSÌ SVILUPPATO



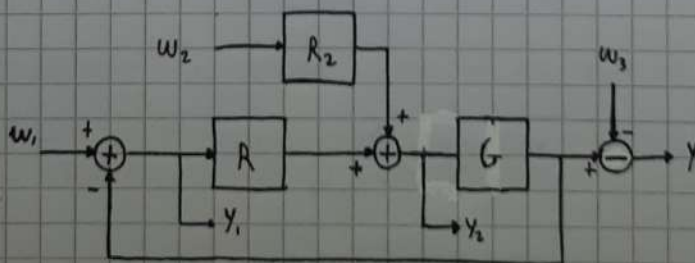
DOVE $H(s)$ È IL TRASDUTTORE ED È L'ELEMENTO CHE SI OCCUPA DI CONVERTIRE L'USCITA IN UN SEGNALE ELETTRICO, O COMUNQUE IN UNA FORMA CHE $R(s)$ E $G(s)$ POSSONO ELABORARE.
DI SOLITO ~~SI~~ SI CERCA DI PRENDERE $H(s)$ VELOCE, PAR A 1, AD OGNI POLO IL SUO VALORE È STABILITO IN UNA RASE INIZIALE, MENTRE $R(s)$ VA PROLETTATA.

SE IL SISTEMA È LINEARE E RAPPRESENTATO A BLOCCHI CONTINUA A VALERE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPORZIONE DEI EFFETTI.

VOLENDO TROVARE LA f.d.t. TRA w E y AVREMO

$$G_{wy} = \frac{RG}{1 + RGH}$$

È POSSIBILE ANCHE IDEARE UNA FORMULA PER CALCOLARE LA f.d.t. TRA UN INGRESSO E UN'USCITA GENERICI, CONSIDERANDO IL SEGUENTE SCHEMA IN RETROALIMENTAZIONE NEGATIVA



SE VOLESSIMO CALCOLARE LA f.d.t. TRA w_2 E y DOVREMO

- CALCOLARE LA f.d.t. PER ANDARE DALL'INGRESSO w_2 A y SENZA PASSARE DUE VOLTE

NELLO STESSO PUNTO, QUINDI AVREMO $\Delta(s) = R_2 \cdot G \cdot (-1)$, INFINITI
SI CONSIDERANO ANCHE I "+" E I "-" NEL CALCOLO DEL PERCORSO NERATO.

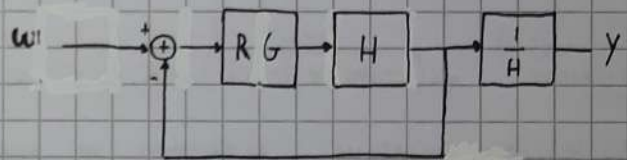
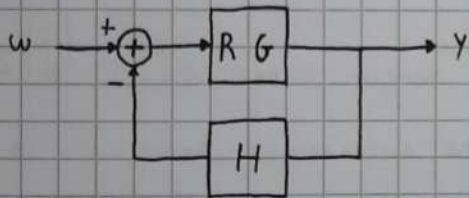
IL SECONDO PASSO CONSISTE NEL CALCOLARE IL GUADAGNO DI ANELLO, CIOÈ
 Π (f.d.t. DEL LOOP), IN QUESTO CASO VARRÀ $L(s) = RG$

IL RISULTATO FINALE SARÀ QUINDI

$$G_{wy} = \frac{\Delta(s)}{1 + L(s)} = - \frac{R_2 G}{1 + RG}$$

ESISTE ANCHE UNA FUNZIONE NEL CASO IN CUI CI FOSSE RO PIÙ LOOP, MA È TROPPO COMPLICATA.

IL NOSTRO OBIETTIVO È AVERE DEI SISTEMI A RETROAZIONE UNITARIA, È POSSIBILE
ATTUARE UN TRUCCETTO MATEMATICO PER OTTENERE QUESTO RISULTATO



PER VERIFICARE CHE GLI SCHEMI SONO EFFETTIVAMENTE EQUIVALENTI SI PUÒ CALCOLARE LA
f.d.t. TRA w E y , NEL PRIMO CASO LA CONOSCIAMO GIÀ, NEL SECONDO POSSIAMO
APPLICARE IL METODO APPENA VISTO

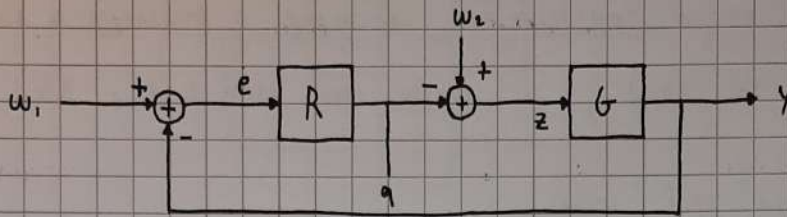
$$1^{\circ} \text{ CASO: } G_{wy} = \frac{RG}{1 + RGH}$$

$$2^{\circ} \text{ CASO: } G_{wy} = \frac{RGH \cdot \frac{1}{H}}{1 + RGH} = \frac{RGH}{1 + RGH}$$

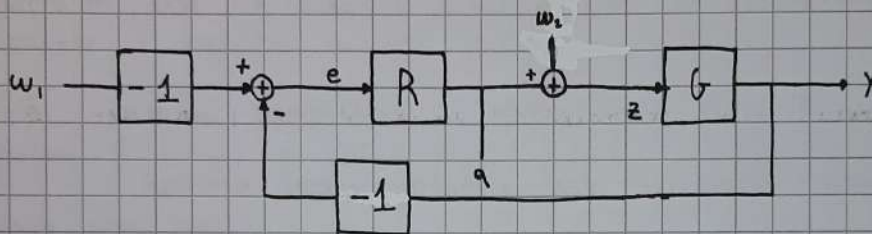
ABBIAMO OTTENUTO LA STESSA f.d.t. GRAZIE AD UNA CANCELLAZIONE, CHE IN QUESTO CASO È
ESATTA PERCHÉ INTRODOTTA MATEMATICAMENTE DA NOI.

RETROAZIONE POSITIVA

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SCHEMA



TALE SCHEMA È EQUIVALENTE CON UNO DOVE R VIENE SOTTITO ANZICHÉ SOTTATTO E
CONIAMO DUE COSTANTI A -1 , CIÒ È

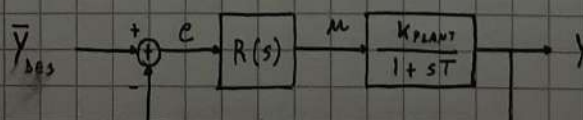


PERTANTO $q = (-w_1 - (-y)) \cdot R$. IN GENERALE UN NUMERO DISPAN DI -1 SI HA CON
RETROAZIONE NEGATIVA, ALTREMENTI UN NUMERO PAR PER RETROAZIONE POSITIVA. IN
RETROAZIONE POSITIVA AVREMO

$$G(s) = \frac{RG}{1 - RG}$$

COME PROGETTARE $R(s)$ PER OTTENERE GUADAGNO UNITARIO

IN GENERALE QUANDO PROGETTIAMO UN CONTROLLORE VOLEMMO CHE /RISPONDE COME,
A ESEMPIO, TEMPERATURA DESIDERATA 18°C , IL TERMOSENSE PORTI LA TEMPERATURA ALLA
STANZA A 18°C . PERTANTO CI PIACEREBBE CAPIRE COME RENDERE UNITARIO IL GUADAGNO
IN UNA P.I.T., CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SCHEMA



CONSIDERANDO IL CONTROLLORE PROPORZIONALE $R(s) = K$ LA f.d.t. DA $\bar{y}_{des}$ A y SARÀ:

$$G(s) = \frac{\frac{K \cdot K_{PLANT}}{1+sT}}{1 + \frac{K \cdot K_{PLANT}}{1+sT}} = \frac{K \cdot K_{PLANT}}{1 + K \cdot K_{PLANT}} \cdot \frac{1}{1 + s \frac{T}{1 + K \cdot K_{PLANT}}}$$

PERTANTO $\mu = \frac{K \cdot K_{PLANT}}{1 + K \cdot K_{PLANT}}$ E $T_{FEED} = \frac{T}{1 + K \cdot K_{PLANT}}$. IL SISTEMA È UN PRIMO ORDINE, IL GUADAGNO È QUASI UNITARIO E DUNQUE LA RISPOSTA AL GRADINO DA 18 SARÀ DEL TIPO



PROVIAMO ORA AD AGGIUNGERE AL CONTROLLORE PROPORZIONALE L'INTEGRALE DELL'ERRORE, CIOÈ, $\frac{1}{s}$ NEL DOMINIO DI LAPLACE.

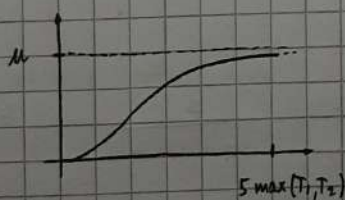


$$\frac{\frac{K}{s} \cdot \frac{K_{PLANT}}{1+sT}}{1 + \frac{K}{s} \cdot \frac{K_{PLANT}}{1+sT}} = \frac{K \cdot K_{PLANT}}{s^2 T + s + K \cdot K_{PLANT}} = G(s)$$

IL SISTEMA CHE ABBIAMO OTTENUTO È DEL SECONDO ORDINE E DI TIPO 0 (NO POLI NELL'ORIGINE), QUINDI POSSIAMO CALCOLARE IL GUADAGNO μ COME

$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^0 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 T + s + K \cdot K_{PLANT}} = \frac{1}{K \cdot K_{PLANT}}$$

DUNQUE, A SECONDA CHE I 2 POLI SIANO REALI O COMPLESSI CONIUGATI AVREMO



RISPOSTA IN FREQUENZA

IN QUESTO CAPITOLO CI OCCUPEREMO DELL'ANALISI DEI SISTEMI LTI (LINEARI TEMPO INVARIANTI) NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE. IN PARTICOLARE INTRODUCIAMO ORA UN TEOREMA, DETTO TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA, IL QUALE Afferma CHE SE SOLLECITIAMO QUESTI SISTEMI CON DELLE SINUSOIDI, ALLORAE L'USCITA SARÀ UNA SINUSOIDE DELLA STESSA PULSAZIONE EVENTUALMENTE AMPLIFICATA E SFASATA DI QUANTITÀ LEGATE ALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO. SIA $u(t)$ IL NOSTRO INGRESSO

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

E SIA $G(s)$ LA f.d.t. DEL SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE. ALLORA LA RISPOSTA SARÀ

$$y_{AP}(t) = U |G(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

↓
REGIME PERMANENTE,
RISULTA PER $t \rightarrow +\infty$

dim:

NE VEDIAMO LA DIMOSTRAZIONE PER $\varphi = 0$. DUNQUE $u(t) = \cos(\omega t)$ (HO POSTO ANCHE $U = 1$). COME DETTO PRIMA $G(s)$ È ASINTOTICAMENTE STABILE, CALCOLIAMOCI ORA LA TRASFORMATA DELLA RISPOSTA

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{s - p_i} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{s - p_i} + \frac{B_1}{s - j\omega} + \frac{B_2}{s + j\omega} \right)$$

POICHÉ $G(s)$ È ASINTOTICAMENTE STABILE I TERMINI $\frac{A_i}{s - p_i}$ PER $t \rightarrow +\infty$ TENDERANNO A ZERO. NON CI RESTA CHE CALCOLARE I 2 COEFFICIENTI B_1 E B_2

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \cdot G(s) \cdot \frac{s}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{1}{2} G(j\omega)$$

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) \cdot G(s) \cdot \frac{s}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = -\frac{1}{2} G(-j\omega)$$

SI OSSERVI INOLTRE CHE

$$\overline{G(-j\omega)} = \int_0^{+\infty} q(t) e^{j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} \overline{q(t)} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} q(t) e^{-j\omega t} dt$$

$\downarrow$
 $G(j\omega)$

È IL CONIUGATO DI UN NUMERO REALE

IN NOTAZIONE POLARE AVREMO

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)}$$

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{-j\angle G(j\omega)}$$

SOSTITUENDO NELL'ESPRESSIONE DI $Y(s)$ OTTIENIAMO

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{B_1}{s-j\omega} + \frac{B_2}{s+j\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{|G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}}{s-j\omega} + \frac{|G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)}}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} |G(j\omega)| \left(e^{j\omega t} e^{j\angle G(j\omega)} + e^{-j\omega t} e^{-j\angle G(j\omega)} \right) \\ &= |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} + e^{-j(\omega t + \angle G(j\omega))}}{2} \end{aligned}$$

SONO PASSATO AL DOMINIO NEL TEMPO, OVVERO $e^{-j\omega t}$

A QUESTO PUNTO OCCORRE VISUALIZZARE QUESTO SECONDO TERMINE COME SOMMA DI VETTORI NEL PIANO COMPLESSO, CON LO STESSO MODULO E ARGOMENTO OPPOSTO, CONSIDERANDO LA METÀ NON AVREMO ALTRO CHE LA PARTE REALE DI QUESTI VETTORI (CHE È UGUALE), RIVOLTI

$$Y(s) = |G(j\omega)| \operatorname{Re} \left(e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} \right)$$

PASSANDO AL DOMINIO NEL TEMPO SI AVrà

$$y_R(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \angle G(j\omega))$$

DIAGRAMMI CARTESIANI O DI BODE

PER I SISTEMI SISO LA FORMA PIÙ UTILIZZATA PER LA RAPPRESENTAZIONE DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA SONO I DIAGRAMMI DI BODE. SONO COMPOSTI DA UNA COPPIA DI CURVE, UNA ASSOCIATA ALLA FASE E UNA AL MODULO DI $G(j\omega)$, IL TUTTO IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA ω . PER COMODITÀ SI TRACCIAMO I GRAFICI SU SCALA LOGARITMICA, IN PARTICOLARE AVREMO

- ASSE X : $\log_{10} \omega$
- ASSE Y MODULO : $20 \log_{10} |G(j\omega)| =: |G(j\omega)|_{dB}$ ↗ DECIBEL
- ASSE Y FASE : $\angle G(j\omega)$

POTRÒ OSSERVARE CHE $|G(j\omega)|_{dB} = 0$ QUANDO $|G(j\omega)| = 1$. INOLTRE, CONSIDERANDO LA FUNZIONE $G(s)$ NELLA FORMA RATTORIZZATA (FORMA DI BODE), SI CAPISCE CHE IL TRACCIAMENTO DEL DIAGRAMMA DI BODE PUÒ ESSERE FATTO CONSIDERANDO SEPARATAMENTE I TERMINI DELLA FUNZIONE RATTORIZZATA. SI SÀ CHE IN ESSA COMPARTONO DELLE PRODOTTORIE, PERTANTO, POICHÉ $\log(x \cdot y \cdot z) = \log x + \log y + \log z$, IN DECIBEL OTTERREMO DELLE SOMMATORIE, IN QUESTO SENSO SI POTRANNO CONSIDERARE SEPARATAMENTE I TERMINI.

OSSERVATO CHE PER QUALUNQUE NUMERO COMPLESSO $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ RISULTA

$$\left| \frac{1}{s} \right|_{dB} = 20 \log \frac{1}{s} = 20 \log s^{-1} = -20 \log s = -|s|_{dB}$$

I CONTRIBUTI AL DIAGRAMMA DI BODE DEL MODULO DEGLI ZERI SI RACCOMANDEREMMO IMMEDIATAMENTE CONSIDERANDO L'OPPOSTO DEL CONTRIBUTO DEI POLI. DUNQUE, NEL SEGUENTE ANALIZZEREMMO LE RISPOSTE IN FREQUENZA DEI TERMINI

a) μ

b) $\frac{1}{s}$

c) $\frac{1}{1 + Ts}$

d) $\frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

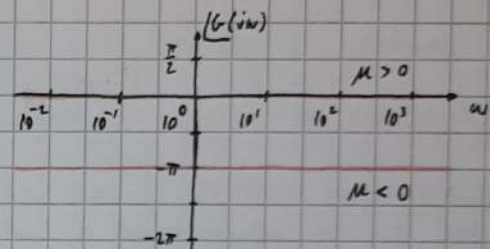
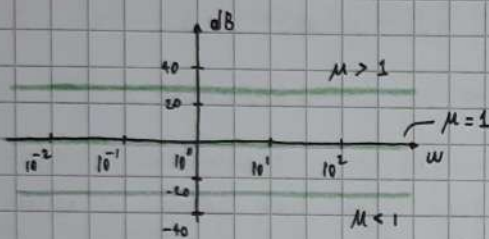
PER SEMPLICITÀ TRACCIEREMO SUBITO ANCHE IL DIAGRAMMA DELLA FASE, DUNQUE FACENDO NOTARE

CHE ANCHE IN QUESTO CASO, PER $s \in \mathbb{C} - \{0\}$ AVREMO

$$s = r e^{i\theta} \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \Rightarrow \arg\left(\frac{1}{s}\right) = -\arg(s)$$

CASO $G(s) = \mu$

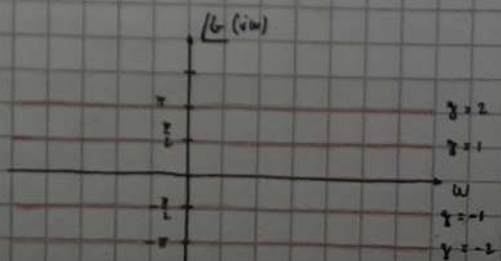
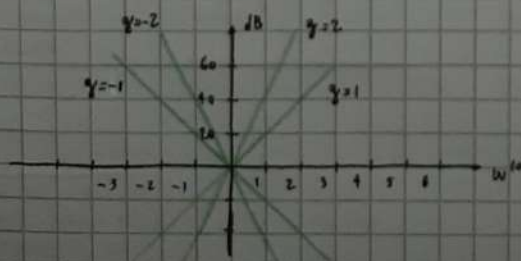
PER DEFINIZIONE SE $G(s) = \mu$ ALLORA $G(j\omega) = \mu$. LA FASE, INVECE, SARÀ 0° PER $\mu > 0$ E -180° PER $\mu < 0$ (UN NUMERO NEGATIVO HA FASE $-\pi$), LUNGO I GRADI SARANNO:



CASO $G(s) = \frac{1}{s}$

ANZITUTTO CALCOLIAMO IL MODULO, $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log|j\omega| = -20 \log(\omega)$. ESSENDO SIA L'ASSE X CHE L'ASSE Y IN SCALA LOGARITMICA IL RISULTATO SARÀ UNA RETTA. SI USA DIRE CHE, PER ESEMPIO IN QUESTO CASO, LA RETTA PERDE 20 dB PER DECADE. PIÙ IN GENERALE, DATA $G(s) = 1/s^y$ AVREMO CHE PER $y > 0$ LA RETTA PERDERÀ 20 y dB PER DECADE (AZIONE INTEGRALE), MENTRE PER $y < 0$ LA RETTA GUADAGNERÀ 20 y dB PER DECADE (AZIONE DERIVATIVA).

PER QUANTO RIGUARDA LA FASE AVREMO $\arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -\arg(j\omega) = -90^\circ$. IN GENERALE, PER $G(s) = 1/s^y$ AVREMO FASE $-y \cdot 90^\circ$, PERTANTO I POLI V RITARDERANNO (SOTTRARRANNO) DI $\frac{\pi}{2}$ E GLI ZERI V ANTICIPERANNO (AGGIUNGERANNO) DI $\frac{\pi}{2}$.



CASO $G(s) = \frac{1}{1+sT}$

INIZIAMO A VEDERE COSA SUCCEDA PER FUNZIONI DEL PRIMO ORDINE. PER PRIMA COSA CI CALCOLIAMO IL MODULO DI $G(j\omega)$

NE CALCOLO IL MODULO

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log \frac{1}{|1+j\omega T|} = -20 \log |1+j\omega T| \\ &= -20 \log \sqrt{1+(\omega T)^2} = -20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \end{aligned}$$

PERTANTO AVREMO

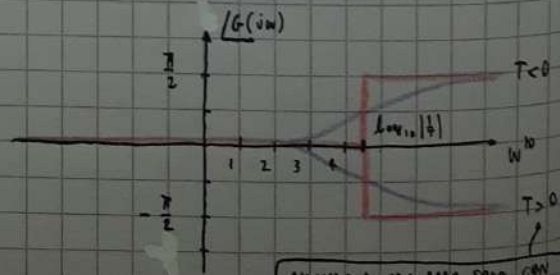
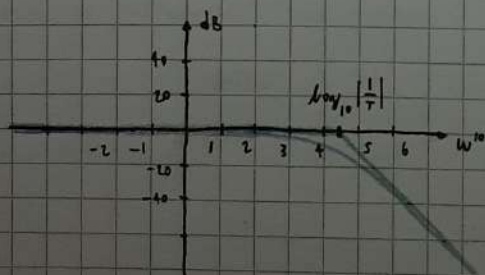
$$|G(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} -20 \log 1 = 0 & \omega T \ll 1 \\ -20 \log \omega T & \omega T \gg 1 \end{cases}$$

QUINDI SI PUÒ APPROSSIMARE IL LOGARITMO DEL MODULO CON UNA RETTA // ALL'ASSE X PRIMA DEL POLO E UNA RETTA DI PENDENZA -20 dB/decade DOPO IL POLO.

LA FASE AVRÀ LA SEGUENTE ESPRESSIONE

$$\begin{aligned} \arg G(j\omega) &= -\arg(1+j\omega T) = -\arctan(\omega T) \\ &= \begin{cases} 0 & \omega T \ll 1 \\ -\pi/2 & \omega T \gg 1 \quad T > 0 \\ \pi/2 & \omega T \ll 1 \quad T < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

DI SEGUITO MOSTEREMO I GRAFICI DEL MODULO E DELLA FASE. IN VERDE E ROSSO SONO TRACCEGGIATI GLI ANDAMENTI IDEALI, IN BLU QUELLI REALI. RACCIO OSSERVARE CHE IL MASSIMO SPOSTAMENTO DAL REALE DEL MODULO È $\approx 3 \text{ dB}$ ($0,7$), MENTRE QUELLO DELLA FASE È $\pi/4$.



AVENDO A CARA FARE SBCO CON POLI E ZERI STABILIZI, SI AVRA' CHE I POLI RITARDELLANO E LE ZERI ANTICIPANO

$$\text{CASO } G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$

PER COMPLETARE QUESTA BREVE ANALISI CONSIDERIAMO ANCHE UN SISTEMA DI SECONDO ORDINE.

ANZITUTTO RICAVIAMOCI IL MODULO DI $G(j\omega)$ IN DECIBEL

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

SI OSSERVA CHE PER $\frac{\omega}{\omega_n}$ PICCOLO IL TERMINE $\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 \approx 1$ E $4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \approx 0$,

MENTRE SE $\frac{\omega}{\omega_n}$ È GRANDE ALLORA $\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4$ E PREVALE SULL'ALTRO ADDENDO. IN

PARTICOLARE $|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} = -40 \log \omega + 40 \log \omega_n$. PERTANTO SI

POTREBBE APPROSSIMARE IL DIAGRAMMA DI BODE AD UNA RETTA // ALL'ASSE X PER $\omega \ll \omega_n$,

UNA SECONDA CON PENDENZA -40 dB/decade PER $\omega \gg \omega_n$. TUTTAVIA NON SAPREMO COME

SI COMPORTA REALMENTE IL MODULO PER $\omega \approx \omega_n$. È FACILE VEDERCI CHE

$$|G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi}$$

PERTANTO PER $\omega \approx \omega_n$ PIÙ LO SMORZAMENTO SARÀ ALTO PIÙ LA CURVA RISULTERÀ SMOSSATA,

MENTRE PIÙ LO SMORZAMENTO SARÀ BASSO PIÙ LA CURVA RISULTERÀ AVERE SOVRACOLONAZIONI

IMPORTANTI. AD OGNI MODO IL MINIMO DI SOVRACOLONAZIONE SI AVrà PER $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

PER QUANTO RIGUARDA LA FASE AVREMO

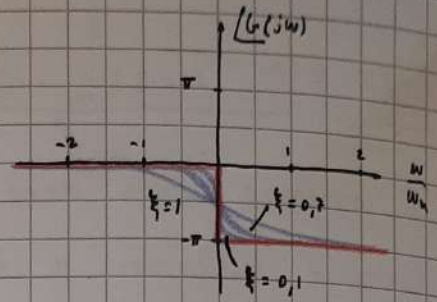
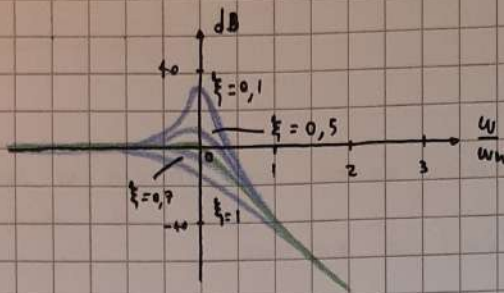
$$\begin{aligned} \arg G(j\omega) &= \arg \frac{1}{1 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\arg \left(1 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) \\ &= -\arctan \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} : \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)\right) \end{aligned}$$

PER $\omega \gg \omega_n$ E $\xi > 0$ SI HA L'ARCOTANGENTE DI UN NUMERO COMPLESSO NEL

2° QUADRANTE, PERTANTO LA FASE SARÀ $-\pi$ (-180°). INVECE, PER $\omega \ll \omega_n$ E

$\xi > 0$ LA FASE SARÀ 0. LO SMORZAMENTO ATTENUERÀ IL PASSAGGIO DA 0 A $-\pi$

A SECONDA DEL SUO VALORE.



TRACCIAMENTO DEL DIAGRAMMA DI BODE

REGOLE PER IL MODULO:

- IL TRATTO INIZIALE HA PENDENZA $-q$ (q è IL TIPO DEL SISTEMA) $+ |u|_{dB}$
- IN PRESENZA DI ZERI LA PENDENZA AUMENTA DI n UNITÀ (n = MOLTEPLICITÀ DELLO ZERO)
- IN PRESENZA DI POLI LA PENDENZA DIMINUISCE DI m UNITÀ (m = MOLTEPLICITÀ DEL POLO)
- IN PRESENZA DI ZERI COMPLESSI CONIUGATI LA PENDENZA SALE DI $2n$ UNITÀ.
- IN PRESENZA DI POLI COMPLESSI CONIUGATI LA PENDENZA SCENDE DI $2m$ UNITÀ.

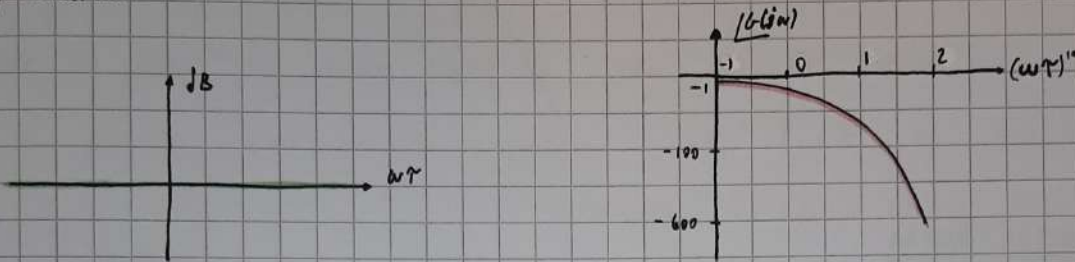
REGOLE PER LA FASE:

- IL TRATTO INIZIALE HA ORDINATA $-q \cdot 90^\circ$.
- IN PRESENZA DI ZERI STABILI O POLI INSTABILI L'ORDINATA AUMENTA DI 90° .
- IN PRESENZA DI POLI STABILI O ZERI INSTABILI L'ORDINATA CALA DI 90° .
- IN PRESENZA DI ZERI COMP. CONIUGATI E SMORZAMENTO POSITIVO L'ORDINATA AUMENTA DI 180° .
- IN PRESENZA DI POLI COMP. CONIUGATI E SMORZAMENTO POSITIVO L'ORDINATA CALA DI 180° .

IN GENERALE POI SI TROVA IL DIAGRAMMA REALE SMUSSANDO GLI ANGOLI E CONSERVANDO GLI SMORZAMENTI IN CASO DI ZERI O POLI COMPLESSI CONIUGATI. AD OGNI POLO SI TRATTA SOLTANTO DI STIME, PER IL LAVORO ESATTO IMPIEGHEREMO UN CALCOLATORE.

RTARDO DI TEMPO E DIAGRAMMA DI BODE

PER COMPLETARE LA TRATTAZIONE SUI DIAGRAMMI DI BODE OCCORRE CONSIDERARE ANCHE LA FUNZIONE DI RITARDO $G(s) = e^{-Ts}$, PERTANTO $G(j\omega) = e^{-Tj\omega}$. IL MODULO SARA' COSTANTE A 1, INRADII $|G(j\omega)| = 1$. LA FASE, INVECE, ESPRESSA IN GRADI, SARA' $-T\omega \frac{180}{\pi}$ ($-T\omega$ IN RADIANTI). I GRADICI, PER QUANTO DETTO, SARANNO

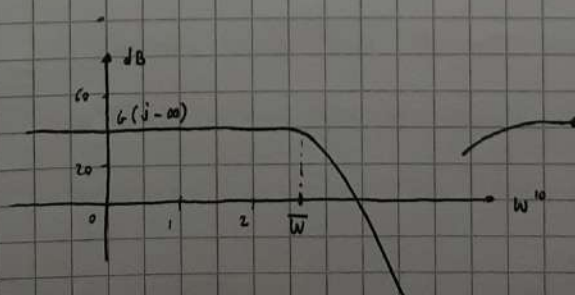


AZIONE FILTRANTE DEI SISTEMI DINAMICI

ABBIAMO CONSIDERATO COME INGRESSI DELLE SINUSOIDI, DOPODICHÉ LE ABBIAMO SCOMPOSTE NELLE ARMONICHE GRABE A ROUNER, INFINE ABBIAMO STUDIATO L'EFFETTO CHE ALCUNI SISTEMI DINAMICI (COSTANTE, POLO NELL'ORIGINE, PRIMO ORDINE, SECONDO ORDINE, RITARDO) PROVOCANO SU ESSI. IN PARTICOLARE ABBIAMO NOTATO COME QUESTI ULTIMI POSSANO UNICAMENTE ATTENUARE, SFASARE O AMPLIFICARE IL SEGNALE IN INGRESSO. IN QUESTO SENSO SVOLGONO UN'AZIONE FILTRANTE SUL SEGNALE IN ENTRATA, ESISTONO INNUMERABILI CATEGORIE DI FILTRI, DI SEGUITO NE VEDREMO ALCUNE TRA LE PIÙ COMUNI.

FILTRI PASSA-BASSO

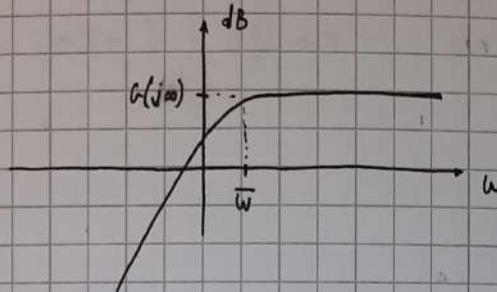
UN FILTRO PASSA-BASSO È TALE PER CUI IL SEGNALE IN INGRESSO VIENE QUASI COMPLETAMENTE ATTENUATO PER FREQUENZE MAGGIORI DI UNA FREQUENZA $\bar{\omega}$. IL ~~modulo~~ SISTEMA SI PÙ RACILMENTE OTTENERE METTENDO UN PO' DI POLI IN CORRISPONDENZA DELLA $\bar{\omega} = \log \left| \frac{1}{T} \right|$



L' $\bar{\omega}$ MEGLIO PER CUI $G(j\bar{\omega})$ È COMPRESO TRA $G(j-\infty) \pm 3 \text{ dB}$ È DETTA **BANDA PASSANTE** PER 3 dB.

FILTRO PASSA-ALTO

SONO TALI PER CUI SOLO LE FREQUENZE PIÙ ALTE DI UNA DATA $\bar{\omega}$ VENGONO LASCIATE INALTERATE, LE ALTRE VERRANNO INVECE ATTENUATE QUASI COMPLETAMENTE. IL GRAFICO DI BODE AVRÀ LA SEGUENTE FORMA



FILTRO PASSA-BANDA

ANZITUTTO SI PRENDE UNA $G(s)$ DEL TIPO

$$G(s) = \frac{1 + 2\xi_z \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}{1 + 2\xi_p \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$

ROPONCHÉ GIOCANDO CON GLI SMORZAMENTI ξ_z E ξ_p SI PUÒ OTTENERE UN RISULTATO DEL GENERE

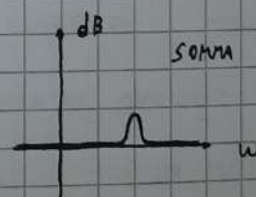
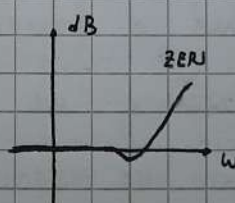
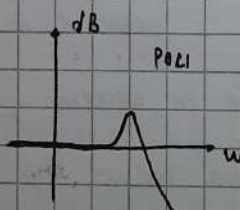


DIAGRAMMA DI NYQUIST

UN ALTRO UTILISSIMO STRUMENTO PER RAPPRESENTARE LA RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN SISTEMA DINAMICO È IL DIAGRAMMA DI NYQUIST. ESSO HA LO STESSO CONTENUTO INFORMATIVO DEL DIAGRAMMA DI BODE, TUTTAVIA CI SARÀ UTILE NEL SEGUITO PER CAPIRE CON IMMEDIATEZZA SE IL SISTEMA RETROAZIONATO È STABILE O NO.

PER COSTRUIRLO CI BASEREMO SUL CARICO DI BODE, PERCHÉ DOVREMO RAPPRESENTARE IL VALORE DI $G(s)$ NEL PIANO COMPLESSO. PER FISSARE MEGLIO LE IDEE CONSIDERIAMO SUBITO UN ESEMPIO CON $G(s) = \frac{10}{1+s}$. LA F.d.T. HA GUADAGNO $M = 10$,

PERTANTO $10 \text{ dB} = 20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$. HA

ANCHE UN POLO IN 1, OVVERO PER $\omega = \log_{10} \left| \frac{1}{T} \right|$

$= 1$. IN REALTÀ IL CARICO DEL MODULO DI

$G(j\omega)$ PRESENTA UNA SMUSSATURA E NON

UN REPENTINO CAMBIO DI DIREZIONE IN $\omega = 1$,

COME AVIAMO GIÀ VISTO LÌ LO SCOSTAMENTO

MASSIMO TRA L'ANDAMENTO REALE E IDEALE È

DI $-3 \text{ dB} \approx 0,7$, CHE SI TRADUCONO IN $-\frac{\pi}{4}$ NEL DIAGRAMMA DELLA FASE. DETTO

CIÒ ABBIAMO TUTTO QUELLO CHE CI SERVE PER COSTRUIRE IL DIAGRAMMA DI

NYQUIST DI $G(s)$. PER PRIMA COSA SI OSSERVA LA

VARIATIONE DI FASE TRA 0 E $-\pi$, IN QUESTO CASO VAI DA

0 A $-\frac{\pi}{2}$, PERTANTO CI MUOVEREMO NEL 4° QUADRANTE. DOPO

OSSERVEREMO IL DIAGRAMMA DELL'INTENSITÀ O MODULO DI

$G(j\omega)$. PER FASE = 0 IL MODULO VALE $M = 10$, PER

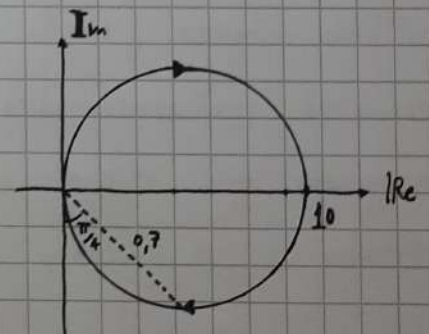
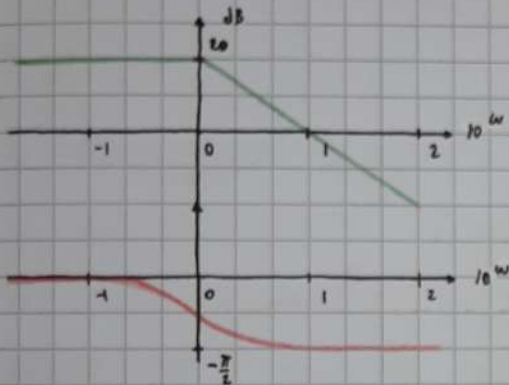
MANO A MANO CHE LA FASE DIMINUISCE A $-\frac{\pi}{2}$, IL

MODULO CALA SEMPRE PIÙ TENENDO A BENO. IL RISULTATO È UNA SEMICIRCONFERENZA

NEL 4° QUADRANTE. SI USA INOLTRE PORSI UNA FRECCIA NEL VERSO IN CUI ω CRESCE

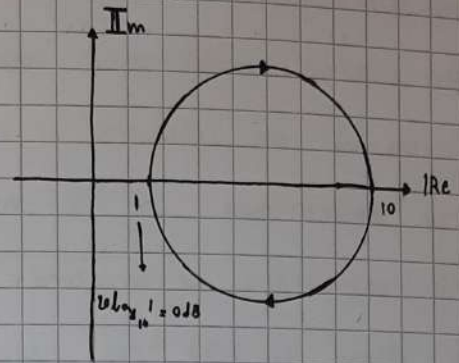
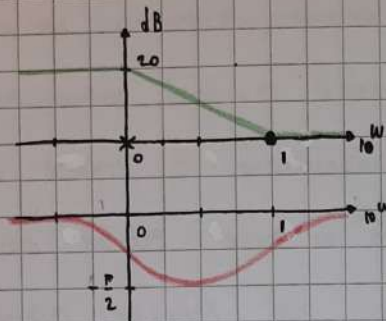
(CIÒ PASSA DA 0 A $+\infty$). PER MOTIVI CHE CI SARANNO CHIARI IN SEGUITO SI COMPLETA

IL DIAGRAMMA COPIANDOLO IN MANIERA SPECULARE NEL SEMIPIANO OPPOSTO.

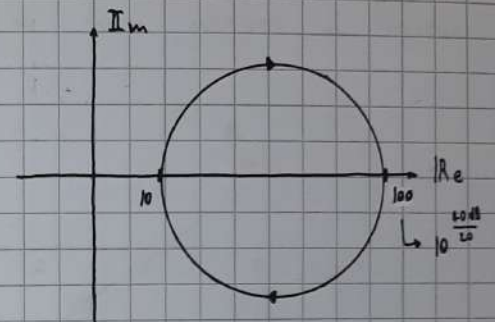
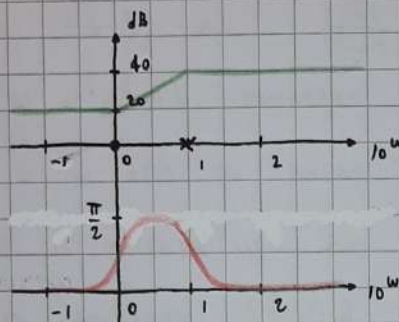


A QUESTO PUNTO VEDIAMO, SENZA ENTRARE TROPPO NEI DETTAGLI, I DIAGRAMMI DI NYQUIST DI ALTRI IMPORTANTI SISTEMI.

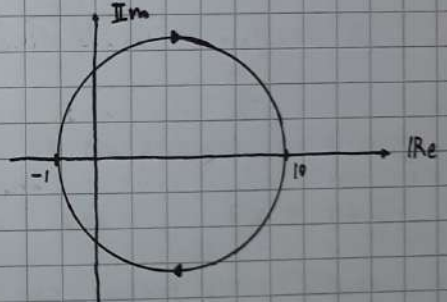
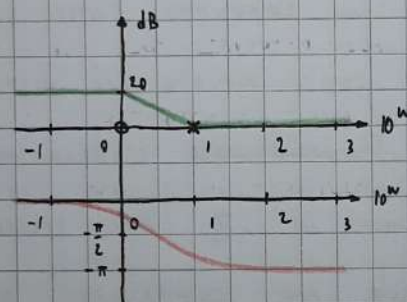
$$G(s) = 10 \cdot \frac{1+0,1s}{1+s}$$



$$G(s) = 10 \cdot \frac{1+s}{1+0,1s}$$

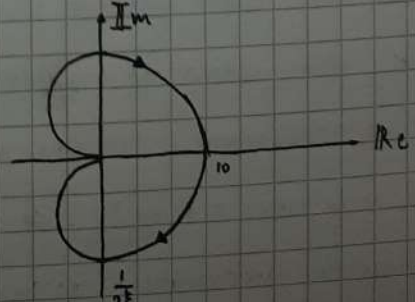
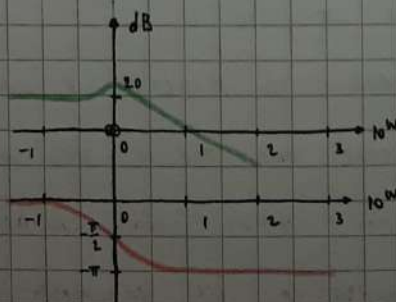


$$G(s) = 10 \cdot \frac{1-0,1s}{1+s}$$



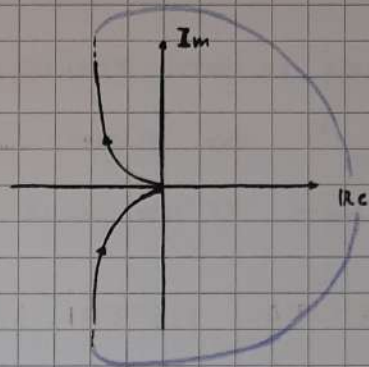
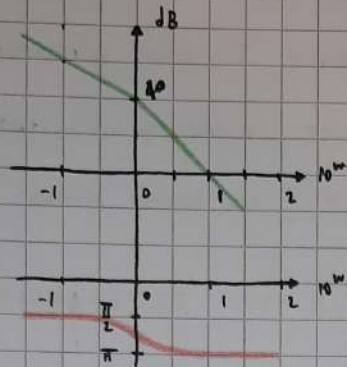
LO È RO INSTABILE ($1-0,1s$ SI ANNULLA PER s POSITIVO, QUINDI INSTABILE) PROVOCA UN ULTERIORE DIMINUIZIONE DELLA FASE A $-\pi$, PORTANDO NEL DIAGRAMMA DI NYQUIST CI MUOVEREMO NEL 3° E 4° QUADRANTE. TUTTAVIA, AVENDO IL MODULO CHE TENGHE AL VALORE COSTANTE 1, IL RISULTATO È UNA SEMICIRCONFERENZA (POI COMPLETATA IN CIRCONFERENZA).

$$G(s) = \frac{10}{1+2,03 \cdot \frac{s}{1} + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$



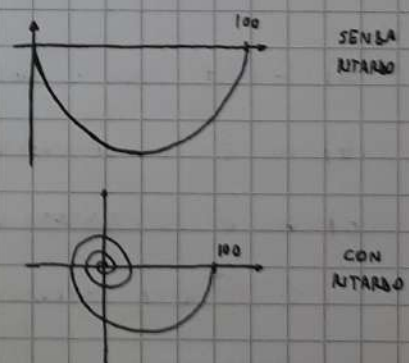
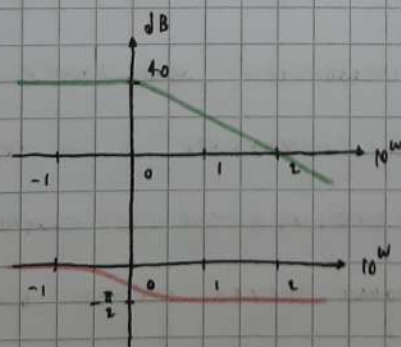
IN QUESTO CASO LA FASE VÁ DI NUOVO DA 0 A $-\pi$, QUINDI 3° E 1° QUADRANTE, INOLTRE IL MODULO DECRESCe, PORTANDO AL DIAGRAMMA DI NYQUIST CHE HO DISEGNATO. NEL PUNTO $-\frac{\pi}{2}$ SI HA LA MASSIMA SOVMOLONGHIONE, PER QUESTO MOTIVO HO SCRITTO $1/2\pi$ NELL'ASSE DELLE ORDINATE.

$$G(s) = \frac{100}{s(1+s)}$$



IL POLO NELL'ORIGINE FA PARTIRE LA FASE DA $-\frac{\pi}{2}$ E QUESTO PROVOCA UN ASINTOTO VERTICALE NEL DIAGRAMMA DI NYQUIST. POICHÉ IN SEGUITO CI SERVIRANNO DEI CIRCUITI CHIUSI, E NON APERTI COME IN QUESTO CASO, SI PUÒ OSSERVARE CHE LA FUNZIONE $G(s) = \frac{100}{(s+1)(1+s)}$ PER $T \rightarrow +\infty$ È DEL TUTTO EQUIVALENTE ALLA PRECEDENTE. IL RITTO È CHE ESSA PRESENTA UNA ~~RETTA~~ ~~POLO~~ POLO IN ~~NUM~~ T , CHIUDENDO IL CERCHIO. QUESTA OSSERVAZIONE CI USTIFICA NEL COMPLETARE IL CIRCUITO IN BLU, ALL'INFINITO.

$$G(s) = \frac{100}{1+s}$$



SENZA RITARDO LA FUNZIONE RIDUCE IL MODULO A 0 E LA FASE ~~DECRESCe~~ PASSA DA 0 A $-\frac{\pi}{2}$. INTRODUCENDO IL RITARDO, COME ABBIAMO VISTO, LA FASE INIZIA A SCENDERE, PROVOCANDO DELLE ROTAZIONI ATTORNO ALL'ORIGINE. SE IL MODULO NON CONVERGESSE A 0 SI AVREBBE CHE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST CONVERGEREBBE AD UNA CIRCONFERENZA AUREOLE UN PUNTO.

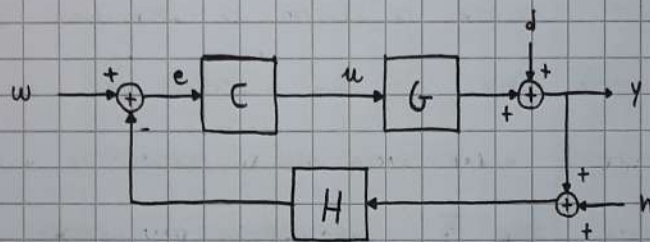
IN GENERALE PER APPROSSIMARE UNA FUNZIONE CON INTARDO SI INIZIA L'APPROSSIMAZIONE DI PADÉ, CHE CONSISTE NELLA SEGUENTE FORMULA

$$G_{\text{PADÉ}}^{(1)}(s) = \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s}$$

IL MODULO DI QUESTA FUNZIONE È COSTANTE A 1 NEL DIAGRAMMA DI BODE, INPAZI IN $\log_{10} |T|$ SONO PRESENTI UN POLO STABILE E UNO ZERO INSTABILE, QUINDI ANNULLANO IL PROPRIO EFFETTO, LA FASE SCENDE DA 0 A $-\pi$, PER QUANTO APPENA BENT.

STABILITÀ SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE

D'ORA IN AVANTI FAREMO SEMPRE RIFERIMENTO AL SEGUENTE SCHEMA PER I SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE



DOVE ORA PRESENTO UNA BREVE DESCRIZIONE DEGLI ELEMENTI

SI SUPPONE CHE G SIA STRETTAMENTE PROPRIO

- G e H sono IL PROCESSO E IL TRASDUTTORE, SONO DATI E NON POSSONO ESSERE MODIFICATI
- w È IL **SEGNALE DI RIFERIMENTO**, SOLITAMENTE È UN SEGNALE A BASSA FREQUENZA
- n È IL **DISTURBO DI MISURA**, CIÒ È IL RUMORE CHE ACCOMPAGNA OVVIAMENTE LE MISURE, È AD ALTA FREQUENZA E BISOGNA SPERARE CHE NON DIA UN CONTRIBUTO COSTANTE, ALTRIMENTI NON SI SAREBBE IN GRADO DI ELIMINARLO (O COMUNQUE ATTENUARLO)
- d È IL **DISTURBO DI CARICO**, ~~MADE~~ PUÒ ESSERE INTESO COME UNA PERTURBAZIONE A BASSA FREQUENZA DEL SISTEMA (IL VENTO PER IL CRUISE CONTROLLER).

IN GENERALE IL TRASDUTTORE H SARÀ LA COSTANTE 1.

IL PRIMO REQUISITO CHE IL NOSTRO SISTEMA DEVE SODDISFARE È QUELLO DI ESSERE ASINTOTICAMENTE STABILE, IN SOSTANZA CHIAMATA **FUNZIONE DI SENSITIVITÀ COMPLEMENTARE**

F LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DA W A Y

POICCHÉ G È STR. PIANTA E C È AL PIÙ PIANTA L'AVrà STR. PIANTA

$$F = \frac{CG}{1+CG} = \frac{L}{1+L} \quad (\text{CON } L=CG)$$

AVREMO CHE IL SISTEMA RETROAZIONATO È ASINTOTICAMENTE STABILE SE IL DENOMINATORE DI F HA RADICI A PARTE REALE NEGATIVA. NELLA NOSTRA ANALISI SIAMO QUINDI INTERESSATI A STUDIARE LE RADICI DELL'EQUAZIONE

$$L + 1 = 0$$

POSSIAMO SCRIVERE L'EQUAZIONE CONSIDERANDO $L = \frac{n_L}{d_L}$, CIÒ

$$\frac{n_L}{d_L} + 1 = \frac{n_L + d_L}{d_L} = 0$$

CHIAMAMO ORA p IL NUMERO DI POLI INSTABILI DI L (CHE COINCIDE CON QUELLO DI L , IL DENOMINATORE È LO STESSO!) E z IL NUMERO DI ZERI INSTABILI DI L , CIÒ $n_L + d_L$. È CHIARO CHE VOLENDO TRACCIARE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST DI L CONTERRÀ TANTE RIVOLUZIONI ATTORNO A -1 QUANTO SARÀ IL CONTRIBUTO ALLA FASE DI TUTTI GLI ZERI E POLI STABILI E INSTABILI. IN PARTICOLARE AVREMO

$\rightarrow N$ È IL GADO DELLA f.d.t.

$$\begin{aligned} \Delta \text{FASE} (w \geq 0) &= z \left(-\frac{\pi}{2}\right) + (n-z) \left(\frac{\pi}{2}\right) + p \left(\frac{\pi}{2}\right) + (n-p) \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -z \frac{\pi}{2} + n \frac{\pi}{2} - z \frac{\pi}{2} + p \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2} + p \frac{\pi}{2} \\ &= \pi (p - z) \end{aligned}$$

PRESE CON IL $-$ SE ORARI, CON IL $+$ SE ANTIORARI.

PERTANTO, $\Delta \text{FASE} (-\infty \leq w \leq +\infty) = 2\pi (p - z)$. IN SOSTANZA, DETTO N IL NUMERO DI RIVOLUZIONI ATTORNO A -1 , SI AVRÀ CHE $N = p - z$. POICHÉ CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ASINTOTICA STABILITÀ È CHE z SIA PAR A ZERO DOVREMO PORRE $z = p - N = 0$.

TALE CRITERIO, CHE VÁ SOTTO IL NOME DI **CRITERIO DI NYQUIST**, NON SOLO PERMETTE DI STABILIRE SE UN SISTEMA IN RETROAZIONE É STABILE O NO, MA DÁ ANCHE LA POSSIBILITÀ DI ATTIVARE QUALCHE MODIFICA PER RENDEROLO TALE (NEL CASO IN CUI NON LO FOSSE).

STABILITÀ IN CONDIZIONI PERTURBATE

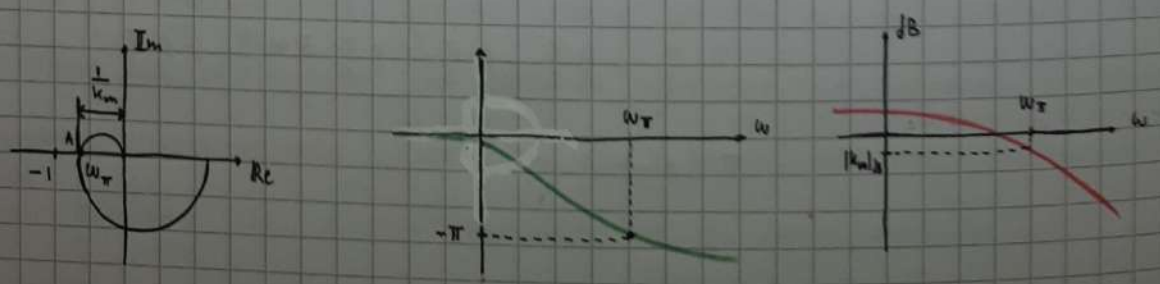
LA STABILITÀ É UN REQUISITO FONDAMENTALE PER I SISTEMI DI CONTROLLO. NONOSTANTE UN SISTEMA POSSA ESSERE STATO CLASSIFICATO ASINTOTICAMENTE STABILE, NON POSSIAMO ESCLUDERE CHE ESSO, A SEGUITO DI DETERMINATE PERTURBAZIONI, POSSA DIVENIRE INSTABILE. PER QUESTO MOTIVO SONO STATI SVILUPPATI ALCUNI **INDICI DI ROBUSTEZZA**, IL CUI SCOPO É QUELLO DI INDICARE IL MARGINE CHE SI HA ~~TRA~~ TRA STABILITÀ E INSTABILITÀ.

MARGINE DI STABILITÀ VETTORIALE

CORRISPONDE ALLA DISTANZA VETTORIALE TRA IL PUNTO -1 E IL PUNTO PIÙ VICINO AD ESSO DEL DIAGRAMMA DI NYQUIST. SE TALE DISTANZA É ELEVATA RISULTA IMPROBABILE CHE DEFORMAZIONI DEL DIAGRAMMA DOVUTE A LIMITATE VARIAZIONI DI $L(s)$. AD OGNI MODO ESSO PREVEDE IL TRACCIAMENTO PUNTUALE DEL GARGICO DI NYQUIST, PENSANDO É COMPLICATO DA APPLICARE NELLA PRATICA.

MARGINE DI GUADAGNO

SUPPONIAMO CHE UN SISTEMA RETROAZIONATO ABBIA FUNZIONE D'ANELLO $L(s)$ E NON POSSIEDA POLI INSTABILI, RIVINDI $P=0$. SUPPONIAMO INOLTRE CHE IL SUO DIAGRAMMA DI NYQUIST SIA



CIÒ CHE DEFINIAMO **MARGINE DI GUADAGNO** k_m É IL RECIPROCO DELL'ASCISSE DEL PUNTO A, CHE CHIAMEREMO X_A . SI OSSERVA CHE PER ω_π (LA FREQUENZA CORRISPONDENTE AL PUNTO IN

CUI LA FASE VALE $-\pi$) AVREMO

$$k_m = |x_A|^{-1} = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \Rightarrow |k_m|_{dB} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB} \quad (\arg L(j\omega_\pi) = -\pi)$$

PER AVERE ASINTOTICA STABILITÀ DOVREMO AVERE $\frac{1}{k_m} < 1 \Rightarrow k_m > 1$. ~~PROPRIO~~ MA
 QUINDI CHE VINCOLO IMPONE ALLA SCELTA DELLA COSTANTE k DI UN CONTROLLORE PROPORZIONALE
 RIVOLTO IN SENE A L ? CON L'AGGIUNTA DI k IL GUADAGNO IN ω_π VARIA $\frac{k}{k_m}$, PERTANTO
 DOVENDO VALERE $\frac{k}{k_m} < 1$ PER FORA LA CONDIZIONE SARÀ

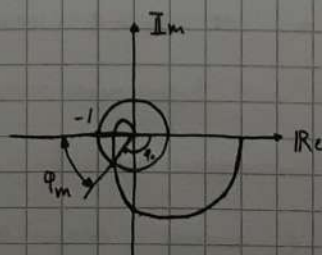
$$k < k_m$$

PRIMA DI CONSIDERARE IL PROSSIMO INDICE DI ROBUSTEZZA VORREI FAR PRESENTE CHE IL
 NOSTRO OBIETTIVO È RENDERE ASINTOTICAMENTE STABILE $F = \frac{L}{1+L}$, PER QUESTO
 MOTIVO, SAPENDO CHE AGGIUNGENDO UN CONTROLLORE PROPORZIONALE k IL GUADAGNO DI
 F DIVENTEREBBE $k |L(j\omega_\pi)|$ PONIAMO LA CONDIZIONE

$$k |L(j\omega_\pi)| < 1 \Rightarrow k < \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = k_m$$

MARGINE DI FASE

SUPPONIAMO DI TROVARCI NELLE STESSA CONDIZIONI IN CUI CI SIAMO POSTI PER IL
 MARGINE DI GUADAGNO. IL MARGINE DI FASE ϕ_m È DEFINITO COME LA DIFFERENZA
 TRA π E LA FASE ϕ_c DI $L(s)$ QUANDO ENTRA NELLA CIRCONFERENZA UNITARIA
 CENTRATA NELL'ORIGINE.



È FACILISSIMO INDIVIDUARE QUESTA GRANDEZZA A PARTIRE DAL DIAGRAMMA DI BODE, INFATTI BASTA OSSERVARE LA DISTANZA DA $-\pi$ DELLA FASE IN CORRISPONDENZA DEL PUNTO IN CUI IL MODULO VALE 1, DOÈ 0dB (CHIAMEREMO LA FREQUENZA ALLA QUALE ACCADE CIÒ ω_c)

FREQUENZA CRITICA

SICCOME SPESSE QUESTI SISTEMI PRESENTANO UN RITARDO, È UTILE STABILIRE QUALE SIA IL RITARDO MASSIMO PER CONTINUARE AD AVERE UN SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE. SAPENDO CHE ALLA GENERICA FREQUENZA ω IL RITARDO INTRODOTTO DA $e^{-\tau s}$ È $\omega\tau$, POSSIAMO IMPORRE CHE ALLA PULSAZIONE CRITICA ω_c VALGA $\omega_c\tau_{max} < \varphi_m \frac{\pi}{180}$ (DOVE IL TERMINE $\frac{\pi}{180}$ È DOVUTO AL FATTO CHE IL MARGINE DI FASE È ESPRESSO IN GRADI E LA PULSAZIONE CRITICA IN RADIANTI). PERTANTO LA CONDIZIONE CERCATA SARÀ

$$\tau_{max} = \frac{\varphi_m^{(gradi)}}{\omega_c} \frac{\pi}{180}$$

NEL CASO IN CUI IL DIAGRAMMA DI NYQUIST DI $L(j\omega)$ NON PRESENTI PUNTI DI ATTRAVERSAMENTO DEL SEMIASSE REALE NEGATIVO POTREMMO APPRENDERE CHE ESSO HA MARGINE DI FASE GUARDANDO INFINITO. SE INVECE FOSSE INTERAMENTE CONTENUTO NELLA CIRCONFERENZA UNITARIA POTREMMO DIRE CHE HA MARGINE DI FASE INFINITO.

CRITERIO DI BODE

SI CONSIDERI UN SISTEMA RETROAZIONATO E SI SUPPONGA CHE

- $L(s)$ NON ABBAIA POLI INSTABILI ($p=0$)
- $L(j\omega)$ ATTRAVERSI UNA SOLA VOLTA L'ASSE A 0dB

ALLORA SE $\mu > 0$ E $\varphi_m > 0^\circ$ IL SISTEMA RISULTA ASINTOTICAMENTE STABILE (μ È IL GUADAGNO DI L). IL FATTO CHE $\mu > 0$ IMPONE AL DIAGRAMMA DI NYQUIST DI PARTIRE NEL SEMIPIANO DESTRO, LONTANO DA -1 . IL MARGINE DI FASE POSITIVO IMPONE DI PASSARE ALL'INTERNO DELLA CIRCONFERENZA UNITARIA ANZA DI CIRCONDARE IL PUNTO -1 , RICORDANDO INOLTRE CHE NELLE IPOTESI FATTE $p=0$ E DUNQUE, POICHÉ PER L'ASINTOTICA STABILITÀ SI DEVE AVERE $z=0$, $N = p - z = 0$, NON IN SOSTANZA NON DEVONO ESSERE COPERTI SENZ'ALTRO A -1 .

ANALISI FUNZIONE DI SENSITIVITÀ COMPLEMENTARE

COME ACCENNAVO NEL PARAGRAFO PRECEDENTE CONSIDERAMO $F(s)$ PARI A

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (L(s) = C(s) \cdot G(s))$$

ESSA RAPPRESENTA CONTEMPORANEAMENTE 3 FUNZIONI DI TRASFERIMENTO, FACENDO RIFERIMENTO ALLO SCHEMA DELLA RETROAZIONE DI INIZIO CAPITOLO SARANNO:

a) f.d.t. TAA W E Y

b) - f.d.t. TM W E Y

c) f.d.t. TM W E e

LE PROPRIETÀ STATICHE DELLA FUNZIONE $F(s)$ SONO DATE DAL SUO COMPORTAMENTO A REGIME (CIOÈ PER $t \rightarrow +\infty$), OVVERO, NEL DOMINIO DI LAPLACE, PER $s \rightarrow 0$.

RAPPRESENTANDO LA FUNZIONE D'ANELLO $L(s)$ IN FORMA DI BODE

$$L(s) = \frac{M_L}{s^{N_L}} \cdot \frac{\prod (1 + \tau_i s)}{\prod (1 + T_i s)}$$

SI VERIFICA IMMEDIATAMENTE CHE

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{M_L}{s^{N_L}}}{1 + \frac{M_L}{s^{N_L}}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M_L}{s^{N_L} + M_L}$$

$$= \begin{cases} \frac{M_L}{1 + M_L} & \gamma = 0 \\ 1 & \gamma > 0 \\ 0 & \gamma < 0 \end{cases}$$

PERTANTO, AVENDO COME INGRESSO $w(t) = A \delta_{-1}(t)$ ($W(s) = \frac{A}{s}$), PER IL TEOREMA DEL VALORE FINALE VARRÀ

$$Y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \frac{A}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

SI PUÒ ALLORA DISTINGUERE IL CASO IN CUI $\gamma > 0$, $\gamma = 0$, $\gamma < 0$.

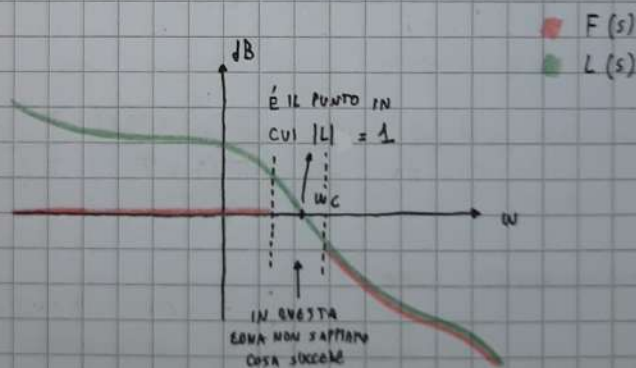
- se $\gamma > 0$ L POSSIEME ALMENO UN POLO NELL'ORIGINE E IL SISTEMA IN RETROAZIONE DÀ LE MIGLIORI PRESTAZIONI A REGIME, CON GUADALNO UNITARIO!
- se $\gamma = 0$ IL GUADALNO V_F È PROSSIMO A 1 PER VALORI ELEVATI DI $|M_L|$.
- se $\gamma < 0$ IL SISTEMA, UNA VOLTA ARRIVATO A REGIME, LENERGIA UN'USCITA NULLA INDIPENDENTEMENTE DAL VALORE COSTANTE W .

PER QUANTO RIGUARDA LA RISPOSTA IN FREQUENZA DI $L(j\omega)$ E $F(j\omega)$ POSSIAMO FARE QUALCHE OSSERVAZIONE. ANZITUTTO UCOMO LA RELAZIONE

LA RELAZIONE VALE ANCHE SEPARATI 1 DB

$$\rightarrow |F|_{dB} = \left| \frac{L}{1+L} \right|_{dB} = \frac{|L|_{dB}}{|1+L|_{dB}}$$

QUINDI PER $|L| \gg 1$ SI AVA $|F| \approx 1$, MENTRE PER $|L| \ll 1$ SI AVA $|F| \approx |L|$. UARICAMENTE AVREMO



POSSIAMO QUINDI APPRENDERE CHE IL MODULO DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA DI $F(s)$ APPARE COME UN FILTRO PASSA-BASSO, DOVE IL VALORE DELLA PULSAZIONE CRITICA ω_c FORNISCE UNA STIMA DELL'ESTREMO SUPERIORE DELLA BANNA PASSANTE. TALE VALORE (ω_c) NON DOVÀ ESSERE COSÌ BASSO DA MANARSI L'INGRESSO W (BASSA FREQUENZA) DA USARE TROPPO ALTO DA LASCIAR PASSARE IL DISTURBO V , SOLTAMENTE AD ALTA FREQUENZA. È INOLTRE LEGITTIMO PENSARE CHE IN CORRESPONDENZA DI ω_c CI SIANO UNO O PIÙ POLI, IN SEGUITO AI QUALI IL MODULO INIZIA A SCENDERE, TALI POLI, POICHÉ PRIMA DI ESSI, SE CE NE POSSERO ALLORA SAREBBERO STATI QUASI-CANCELLATI, SARIANO QUINDI DOMINANTI.

L'ANALISI FIN QUI CONDOTTA NON PERMETTE DI TRARRE CONCLUSIONI ULTERIORI SUI POLI DOMINANTI DI $F(s)$, SE NON QUELLA RELATIVE LA LORO POSIZIONE APPROSSIMATA. ORA, IPOTIZZANDO CHE IN ω_c SI TROVIA UNA COPPIA DI POLI COMPLESSI CONIUGATI AVREMO

$$F \approx \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_c} + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2}$$

DA QUESTA CONSIDERAZIONE SI PUÒ SUBITO RICAVARE L'INTENSITÀ DELLA SOVARELONAZIONE DI $F(j\omega)$ IN ω_c , COME

$$|F(j\omega_c)| = \left| \frac{1}{1 + 2\xi j \frac{\omega_c}{\omega_c} + \left(j \frac{\omega_c}{\omega_c}\right)^2} \right| = \left| \frac{1}{1 + 2\xi j - 1} \right| = \frac{1}{2\xi} \quad [1]$$

IN SECONDO LUOGO SI PUÒ SFRUTTARE IL FATTO CHE $|L(j\omega_c)| = 1$ E, POICHÉ $\varphi_m = \pi + \angle L(j\omega_c)$, AVREMO $\angle L(j\omega_c) = \varphi_m - \pi$.

$$L(j\omega_c) = |L(j\omega_c)| e^{j\angle L(j\omega_c)} = e^{j(\varphi_m - \pi)} = -e^{j\varphi_m}$$

$$\Rightarrow F(j\omega_c) = \frac{L(j\omega_c)}{1 + L(j\omega_c)} = \frac{-e^{j\varphi_m}}{1 - e^{j\varphi_m}}$$

$$\Rightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{|-e^{j\varphi_m}|}{|1 - e^{j\varphi_m}|} = \frac{1}{|(1 - \cos \varphi_m) - j \sin \varphi_m|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos \varphi_m + \cos^2 \varphi_m + \sin^2 \varphi_m}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)}} \stackrel{\text{FORMULE DI BISCHOP}}{=} \frac{1}{\sqrt{2(2 \sin^2(\frac{\varphi_m}{2}))}} = \frac{1}{2 \sin(\frac{\varphi_m}{2})} \quad [2]$$

UNENDO ORA LE RELAZIONI [1] E [2] OTTIENIAMO

$$\frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2 \sin(\frac{\varphi_m}{2})} \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \xi \approx \frac{\varphi_m^{\text{rad}}}{2}$$

SICCOME φ_m È SPESSE ESPRESSA IN GRADI SI PUÒ FARE LA SEGUENTE SEMPLIFICAZIONE

$$\varphi_m^{\text{rad}} \cdot \frac{180}{\pi} = \varphi_m^{\text{grad}} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_m^{\text{grad}} \cdot \frac{\pi}{360} \approx \xi \quad \Leftrightarrow \quad \xi \approx \frac{\varphi_m^{\text{grad}}}{100}$$

DIAMO CHE IDEALMENTE SI CERCHERÀ DI AVERE $\varphi_m \geq 50^\circ$, PER EVITARE
SMEZZAMENTI TROPPO BASSI E RIVINI USPOSTE AL GANNO TROPPO SOVRACCONDATE. *

ANALISI FUNZIONE DI SENSIVITÀ

LA FUNZIONE DI SENSIVITÀ È DEFINITA COME $S(s)$:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (\text{con } L(s) = C(s)G(s))$$

E RAPPRESENTA CONTEMPORANEAMENTE LE SEGUENTI 3 FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

- a) f.d.t. TRA d E y
- b) f.d.t. TRA w E e
- c) -f.d.t. TRA d E e

IDEALMENTE VORREMO CHE $S(s)$ FOSSE NULLA, IN MODO TALE CHE L'EFFETTO SULL'USCITA
DEL DISTURBO E SULL'ERRORE DEL DISTURBO E INGRESSO FOSSE NULLO, È IRREALIZZABILE PERÒ.
UN REQUISITO RAGIONEVOLE PUÒ ESSERE QUELLO DI CHIEDERE CHE LA RISPOSTA IN FREQUENZA
 $S(j\omega)$ ABBAIA MODULO BASSO (QUINDI ATTENUI) IN CORRESPONDENZA DELLE FREQUENZE DI
 w E d PIÙ SIGNIFICATIVE, IN MODO TALE DA RIDURRE L'EFFETTO SULL'ERRORE E SULL'USCITA
(SOLO NEL CASO DI d QUEST'ULTIMA CONDIZIONE).

DI NUOVO, COME FATTO PER LA FUNZIONE DI SENSIVITÀ COMPLEMENTARE, VALUTIAMO IL
COMPORTAMENTO DI $S(s)$ PER $t \rightarrow +\infty$ E QUINDI PER $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{M_L}{s^{n_L}} \frac{\pi(1+\dots)}{\pi(1+\dots)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{n_L}}{s^{n_L} + M_L} = \begin{cases} g_L = 0 \Rightarrow \frac{1}{1+M_L} \\ g_L > 0 \Rightarrow 0 \\ g_L < 0 \Rightarrow 1 \end{cases}$$

* PIÙ ξ È PICCOLO PIÙ I POLI DI $F(s)$ SARANNO VICINI ALL'ASSE IMMAGINARIO, POICHE LA LORO
PARTE REALE SARÀ PIÙ VICINA ALLO ZERO. IN QUEL CASO LE CONDIZIONI DI STABILITÀ DEI POLI IMAGINARI
 $0 \leq \xi \leq 1$, CRITICAMENTE SI VORRÀ UN φ_m ALTO PER EVITARE CHE DOPO L'OWN RICONVERGENTI ξ DIVENTI < 0 .

SI PUÒ ORA VALUTARE LA PRESTAZIONE STATICA DEL SISTEMA (CIOÉ A TRANSITORIO FINITO) CALCOLANDO L'EFFETTO SULLA VARIABILE ERRORE e DI UN INGRESSO A SCALINO u . CHIAMATE QUESTI RISULTATI, CAMBIATI DI SEGNO, SONO VALIDI ANCHE PER UN INGRESSO A SCALINO DEL DISTURBO d . SUPPOSTO QUINDI $u(t) = A \delta_{-1}(t)$, PER IL TEOREMA DEL VALORE FINALE, AVREMO

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{A}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \begin{cases} \frac{A}{1+\mu_L} & q_L = 0 \\ 0 & q_L > 0 \\ A & q_L < 0 \end{cases}$$

CON UN POLO NELL'ORIGINE (O PIÙ) SOLNAMO, NEL SENSO CHE A REGIME L'ERRORE È PAR A 0, QUINDI LA DIFFERENZA TRA INGRESSO E USCITA È NULLA. IN EFFETTI QUESTO È IN ACCORDO CON QUANTO ANALIZZATO PER $F(s)$, IN QUEL CASO PER q_L SO SI AVEVA GUADAGNO UNITARIO, CIOÉ A REGIME SI AVEVA DIFFERENZA NULLA TRA u E y .

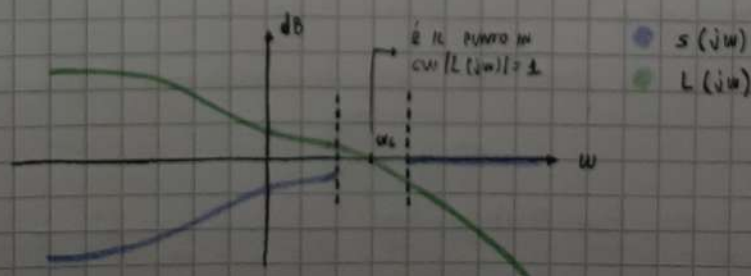
SE $q_L = 0$ E $\mu > 0$ LA PRECISIONE AUMENTA CON μ E SI PUÒ RIDURRE L'ERRORE A REGIME OPERANDO SU μ .

SE $q_L < 0$ L'ERRORE È DATO DALL'INTENSITÀ DELLO SCALINO (IN GENERALE DELL'INGRESSO) CHE LO HA GENERATO.

CONSIDERIAMO ORA LA RISPOSTA IN FREQUENZA DI $S(j\omega)$ PER VALORI DI $|L(j\omega)| \gg 1$ E $|L(j\omega)| \ll 1$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \text{PER } |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & \text{PER } |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

RICORDANDO CHE $\frac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|$ POSSIAMO TRACCIARE IL SEGUENTE GRAFICO RASSUNTIVO



SI NOTA SUBITO COME IL GANICO DI $S(s)$ ASSUMA IL TIPICO ASPETTO DI UN FILTRO PASSA-ALTO. QUESTO FATTO SI PRESTA AD IMPORTANTI OSSERVAZIONI SE SI CONSIDERA $S(s)$ COME f.d.t. TRA d E y . INFATTI IN TAL CASO AVREMO CHE IL DISTURBO SARÀ ATTENUATO PRIMA DELLA PULSAZIONE CRITICA QUANTO MAGGIORE SARÀ IL VALORE DI $L(j\omega)$. OLTRE ω_c LA COMPONENTI DEL DISTURBO d NON SUBIRANNO RIDUZIONI IN AMPIEZZA APPREZZABILI.

INOLTRE, NEL CASO IN ESAME, $S(s)$ HA PER FORMA DEL DERIVATO, IN PARTICOLARE $\dot{y}$ NON SARÀ STRETTAMENTE PROPORZIONALE A $\dot{d}$ E QUANDO DAREMO IL GANICO NE RISENTIREMO IMMEDIATAMENTE NELL'USCITA.

INFINE, NELL'OTTICA DI RENDERE $|S(j\omega)|$ PICCOLO PER UN INTERVALLO DI PULSAZIONI PIÙ AMPIO POSSIBILE (PER ABBATTERE IL DISTURBO E L'ERRORE), SARÀ CERTAMENTE VANTAGGIOSO ALZARE ω_c .

ANALISI FUNZIONE DI SENSITIVITÀ DEL CONTROLLO

LA FUNZIONE DI SENSITIVITÀ DEL CONTROLLO È COSÌ DEFINITA

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + L(s)} = C(s) S(s) = \frac{F(s)}{G(s)}$$

TALE FUNZIONE RAPPRESENTA CONTEMPORANEAMENTE

a) f.d.t. TRA u E y

b) -f.d.t. TRA d E y

c) -f.d.t. TRA u E u

E SICCOME SI VORREBBERO EVITARE BRUSCHE VARIAZIONI DELLA VARIABILE DI CONTROLLO (DATO CHE SARÀ IMPLEMENTATA DA UN SISTEMA FISICO) E u, d LAVORANO A BASSE FREQUENZE MENTRE y È UN SEGNALE AD ALTA FREQUENZA, SI VORREBBE CHE $Q(s)$ ATTENUASSE I SEGNALE A TUTTE LE PULSAZIONI ω .

CALCOLIAMO QUINDI IL LIMITE PER $s \rightarrow 0$, PONENDOCI NELLE IPOTESI SEMPLIFICATIVE IN CUI L SIA TIPO 0

$$\lim_{s \rightarrow 0} Q(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{M_L}{M_G (1 + M_L)}$$

SI OSSERVI COME PER VALORI DI M_L ELEVATI SI HA $M_Q \approx M_G^{-1}$. CIÒ SIGNIFICA CHE A REGIME (CON UN SISTEMA RETROALIMENTATO ASINTOTICAMENTE STABILE E A INGRESSI COSTANTI) IL VALORE M_∞ È L'INVERSO DEL GUADAGNO DEL PROCESSO G DA CONTROLLARE. PER QUANTO RIGUARDA LA RISPOSTA IN FREQUENZA AVREMO

$$|Q(j\omega)| = \begin{cases} \frac{|F|}{|G|} \\ |C| \end{cases} \Rightarrow |Q(j\omega)| = \begin{cases} |G(j\omega)|^{-1} & \text{se } |L| \gg 1 \\ |S(j\omega)| & \text{se } |L| \ll 1 \end{cases} \quad \left[|Q|_{dB} = \begin{cases} -|G|_{dB} & \text{se } |L|_{dB} \gg 0 \\ |C|_{dB} & \text{se } |L|_{dB} \ll 0 \end{cases} \right]$$

PER ESAMINARE LA QUESTIONE DA UN ALTRO PUNTO DI VISTA SI PUÒ PENSARE A $|Q|_{dB}$ COME $|F|_{dB} - |G|_{dB}$. IN SOSTANZA, PERO', SI OSSERVA COME LA RISPOSTA IN FREQUENZA PER $\omega < \omega_c$ DIPENDE SOLO DAL PROCESSO DA CONTROLLARE G , MENTRE PER LE ALTE FREQUENZE DIPENDERÀ SOLO DALLA RISPOSTA DEL REGOLATORE.