

LA MISURA

CON MISURA INTENDIAMO UN'INFORMAZIONE COSTITUITA DA:

- UN NUMERO
- UN'INCERTEZZA (CIOÈ UN INTORNO LIMITATO DEL NUMERO)
- UN'UNITÀ DI MISURA (TERMINE DI RIFERIMENTO USATO PER CONFRONTARE GRANDENZE DELLA STESSA SPECIE)

UNA GRANDEZZA FISICA

UNA GRANDEZZA FISICA PUÒ ESSERE MISURATA:

- DIRETTAMENTE: SE VIENE DEFINITO UN PROCEDIMENTO DI MISURA RIPETIBILE E UN CAMPIONE DI RIFERIMENTO
- INDIRETTAMENTE: SE ESPRESSE COME FUNZIONI DELLE GRANDENZE DIRETTE

LA GRANDEZZA FONDAMENTALE "LUNGHEZZA" NEL CORSO DEL TEMPO È STATA DEFINITA PIÙ VOLTE, ORA SI CERCA DI DEFINIRE TUTTE LE UNITÀ DI MISURA DIRETTE IN FUNZIONE DELLA VELOCITÀ DELLA LUCE (CHE È COSTANTE NEL VUOTO).

LE GRANDEZZE FONDAMENTALI

SONO STATE DEFINITE 7 GRANDENZE FONDAMENTALI:

• LUNGHEZZA	METRO	m	PRIMO MODULO
• TEMPO	SECONDO	s	
• MASSA	CILIOGRAMMO	kg	
• TEMPERATURA	KELVIN	K	
• CORRENTE ELETTRICA	AMPERE	A	SECONDO MODULO
• INTENSITÀ LUMINOSA	CANDELA	cd	
• QUANTITÀ DI SOSTANZA	MOLE	mol	

MISURE RELATIVE E ASSOLUTE

UNA MISURA RELATIVA SI OTTIENE CONFRONTANDO:

- DIRETTAMENTE SE SI UTILIZZA UN CAMPIONE
- INDIRETTAMENTE SE SI UTILIZZA UN STRUMENTO TARATO CON UN CAMPIONE

UNA MISURA ASSOLUTA SERVE A OTTENERE LE GRANDEZZE FISICHE FONDAMENTALI.

ERRORI NELLE MISURE

OGNI MISURA È AFFETTA DA UN ERRORE, O GRADO DI INCERTEZZA.

DEFINIAMO ORA 3 TIPI DI ERRORE:

- ERRORE ASSOLUTO: DIFFERENZA TRA VALORE MISURATO x E MISURANDO y

$$x - y = E_x = \Delta x$$

- ERRORE RELATIVO: RAPPORTO TRA ERRORE ASSOLUTO E_x E MISURANDO y

$$e_x = \frac{x - y}{x} = \frac{E_x}{x} = \frac{\Delta x}{x}$$

- ERRORE PERCENTUALE: ERRORE RELATIVO ESPRESSO IN PERCENTUALE

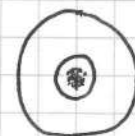
$$e_x \cdot 100 = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100$$

TIPI DI ERRORI

UN ERRORE PUÒ ESSERE GROSSOLANO (DOVUTO ALL'IMPERIZIA DELL'OPERATORE), PUÒ ESSERE SISTEMATICO (POSSONO ESSERE LIMITATI SE SI CONOSCE ~~LA~~ LA RELAZIONE CHE LEGA I VALORI MISURATI AL VALORE MISURANDO) E PUÒ ESSERE CASUALE (QUESTI SONO DOVUTI A VARIABILI IMPREVEDIBILI E QUINDI NON POSSONO ESSERE ELIMINATI DEL TUTTO)

MISURE PRECISE ED ACCURATE

LA PRECISIONE E L'ACCURATEZZA DI UNA MISURA RAPPRESENTANO DUE CONCETTI DIFFERENTI; COMPRENDIAMONE MEGLIO LA NATURA CON IL SEGUENTE ESEMPIO:



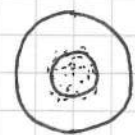
TIRO PRECISO E ACCURATO

$$5,0 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$$



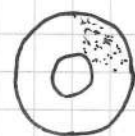
TIRO PRECISO MA NON ACCURATO

$$20,0 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$$



TIRO PRECISO MA NON ACCURATO

$$5,0 \text{ cm} \pm 1,0 \text{ cm}$$



TIRO NON NÉ PRECISO NÉ ACCURATO

$$20,0 \text{ cm} \pm 1,0 \text{ cm}$$

CIFRE SIGNIFICATIVE

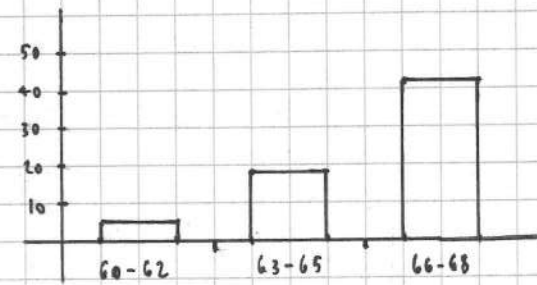
SOLITAMENTE LE INCERTEZZE Sperimentali SI ARROTONDANO A 1 CIFRA SIGNIFICATIVA (NEL LAVORO DI PRECISIONE ANCHE 2 CIFRE SIGNIFICATIVE).

L'ULTIMA CIFRA SIGNIFICATIVA DI UN RISULTATO DOVREBBE ESSERE DELLO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA DELL'INCERTEZZA.

STATISTICA

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE DISTRIBUZIONE DI FREQUENZE E LA RELATIVA TABELLA:

	PESO (kg)	N° STUDENTI
1ª CLASSE	60 - 62	5
2ª CLASSE	63 - 65	18
3ª CLASSE	66 - 68	42



IL LIMITE DELLA PRIMA CLASSE È 60, 62. I CONFINI DELLA PRIMA CLASSE SONO 59,5 E 62,5 (OTTENUTI FACENDO $[63 - 60] / 2$). L'AMPLIEZZA DELLA PRIMA CLASSE È $62,5 - 59,5 = 3$. IL VALORE CENTRALE È 61 E LA FREQUENZA È 5.

POPOLAZIONE E CAMPIONE

LA POPOLAZIONE RAPPRESENTA INTERAMENTE IL GRUPPO DI INTERESSE, IL CAMPIONE INVECE È COSTITUITO DA UNA PARTE DELLA POPOLAZIONE RAPPRESENTATIVA.

POPOLAZIONE, UNITÀ, CAMPIONE STATISTICO

LA POPOLAZIONE STATISTICA È L'INSIEME A CUI SI RIFERISCE L'INDAGINE STATISTICA, L'UNITÀ STATISTICA È L'ELEMENTO DELLA POPOLAZIONE STATISTICA (LA MINIMA UNITÀ) E IL CAMPIONE STATISTICO È UN SOTTOINSIEME DI MISURAZIONI SELEZIONATE DALLA POPOLAZIONE.

MEDIA

DEFINIAMO COSÌ LA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$$

N = NUMERO ELEMENTI DELLA POPOLAZIONE

X_i = i -ESIMA OSSERVAZIONE DELLA VAR X ;

MENTRE LA MEDIA DI UN CAMPIONE $\bar{X}$ SI OTTIENE SOSTITUENDO N CON n (NUMERO DI ELEMENTI NELL'INSIEME CAMPIONE)

MEDIA, MODA, MEDIANA

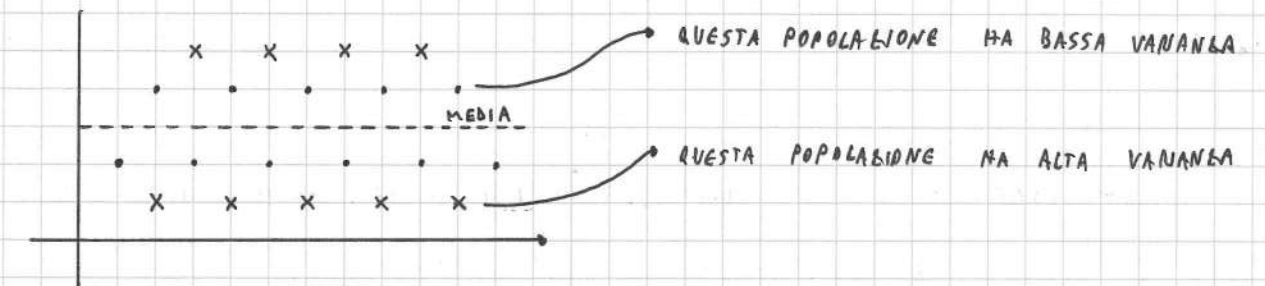
Vittorio Alzetta

CONSIDERIAMO L'INSIEME $\{3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10\}$, ESSO HA:

- MEDIA: 6,22
- MEDIANA (VALORE CENTRALE): 6
- MODA (VALORE PIÙ FREQUENTE): 8

VARIANZA

UNA VOLTA STABILITA LA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE PUÒ ESSERE UTILE ATTRIBUIRE UN VALORE AL MODO IN CUI ESSA VARIA. CAPIAMO MEGLIO CON IL SEGUENTE ESEMPIO:



LA VARIANZA CARATTERIZZA LA VARIABILITÀ DI UNA POPOLAZIONE ED È COSÌ DEFINITA:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2}{N}$$

DOVE μ È LA MEDIA DELLA POPOLAZIONE, N È IL NUMERO DI OSSERVAZIONI E X_i È L' i -ESIMO DATO STATISTICO OSSERVATO.

NEL CASO IN CUI SI VUOLIA CONSIDERARE LA VARIANZA DI UN CAMPIONE SI CONSIDERA LA SEGUENTE FORMULA:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

DOVE n È IL NUMERO DI OSSERVAZIONI DEL CAMPIONE.

DEVIAZIONE STANDARD

POICHÉ LA VARIANZA HA LO SVANTAGGIO DI ESSERE QUADRATICA NE VIENE ESTRATTA LA RADICE (LA VARIANZA È SEMPRE POSITIVA) IN MODO DA OTTENERE UNA MISURA CON LA STESSA UNITÀ DI MISURA DELLA VARIABILE DI PARTENZA.

IN FORMULE AVREMO CHE LA **DEVIAZIONE STANDARD** È:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

NEL PRIMO CASO CONSIDERIAMO L'INTERA POPOLAZIONE, NEL SECONDO UN CAMPIONE DI n ELEMENTI.

MEDIA CAMPIONARIA

DEFINIAMO μ COME LA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE

σ COME LO **SCARTO QUADRATICO MEDIO** (DEVIAZIONE STANDARD) DELLA POPOLAZIONE

ALLORA LA MEDIA E LO SCARTO QUADRATICO MEDIO DELLA POPOLAZIONE ~~VALGONO~~ CAMPIONARIA VALGONO:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad \text{E} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

CON N_p ELEMENTI DELLA POPOLAZIONE

CENNO DI TEORIA DELLE MISURE

SUPPONIAMO CHE VENGA FORNITO IL RISULTATO DI UNA MISURA NELLA SEGUENTE FORMA:

$$L = (100 \pm 20) \text{ m}$$

100 È IL VALORE MEDIO E IL PIÙ PROBABILE PER IL VALORE VERO.

20 È L'INCERTEZZA DELLA MISURA E VIENE CHIAMATA **DEVIAZIONE STANDARD** (σ)

σ RAPPRESENTA L'INTERVALLO ENTRO IL QUALE IL VALORE VERO CADRÀ AL 68%

CONSIDERANDO 2σ LA PROBABILITÀ SALE AL 95% E CON 3σ ARRIVA AL 99,7%.

ESEMPIO

DATIAMO UN ANTICO MATTONE E RILEVIAMO LE SEGUENTI DATE:

1203, 1238, 1191, 1213, 1183

NE CALCOLIAMO IL VALORE MEDIO: $\frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 x_n = 1205,6$

CALCOLIAMO LA DEVIAZIONE O **RESIDUO**:

1203	1238	1191	1213	1183
↓	↓	↓	↓	↓
-2,6	32,4	-14,6	7,4	-22,6

CALCOLIAMO L'INCERTEZZA STATISTICA SULLA MISURA:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{5(5-1)} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i^2} = 9,6$$

DUNQUE IL DATO FINALE SARÀ: 1206 ± 10 ANNI

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

ANZITUTTO CONSIDERIAMO LA FORMULA:

$$P_B(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

DOVE p È LA PROBABILITÀ CHE L'EVENTO E SI VERIFICA

q È LA PROBABILITÀ CHE E NON SI VERIFICA ($1-p$)

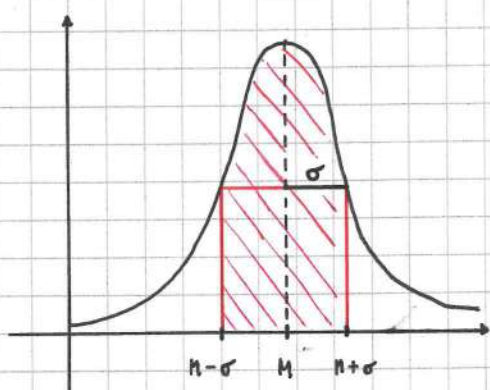
x È IL NUMERO DI VOLTE IN CUI SI VUOLE CHE E SI VERIFICHINO IN n PROVE

DISTRIBUZIONE NORMALE

NEL CASO IN CUI SI CONSIDERA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI EVENTI BISOGNA CONSIDERARE LA DISTRIBUZIONE NORMALE:

$$P_g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

DOVE μ È LA MEDIA E σ È LO SCARTO QUADRATICO MEDIO



L'AREA EVIDENZIATA IN ROSSO È COSTRUITA A PARTIRE DA $\mu + \sigma$ E $\mu - \sigma$, DOVE σ È USCITO MUOVENDOSI ORIZZONTALMENTE A PARTIRE DA METÀ ALTEZZA DELLA CAMPANA. L'AREA ROSSA RAPPRESENTA IL 68% DELLA TOTALE.

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE

SIANO $X = (\bar{x} \pm \sigma_x)$ E $Y = (\bar{y} \pm \sigma_y)$ DUE GRANDENZE FISICHE MISURATE.

SOMMA

$Z = X + Y$ SI OTTIENE FACENDO: $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (\text{SE } X \text{ E } Y \text{ SONO INDIPENDENTI})$$

$$\sigma_z = \sigma_x + \sigma_y \quad (\text{SE } X \text{ E } Y \text{ SONO DIPENDENTI})$$

DIFFERENZA

$Z = X - Y$ SI OTTIENE FACENDO: $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (\text{SE } X \text{ E } Y \text{ SONO INDIPENDENTI})$$

$$\sigma_z = \sigma_x + \sigma_y \quad (\text{SE } X \text{ E } Y \text{ SONO DIPENDENTI})$$

PRODOTTO

$Z = X \cdot Y$ SI OTTIENE FACENDO: $\bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

$$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_x \cdot \bar{y})^2 + (\sigma_y \cdot \bar{x})^2}$$

DIVISIONE

$Z = \frac{X}{Y}$ SI OTTIENE FACENDO: $\bar{z} = \bar{x} / \bar{y}$

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y \cdot \bar{x}}{\bar{y}^2}\right)^2} = \bar{z} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\right)^2}$$

CHIAMEREMO $\frac{\sigma_z}{\bar{z}}$ INCERTEZZA RELATIVA

RELAZIONI TRA VARIABILI

SPESSE CAPITA DI VOLEA DESCRIVERE UNA RELAZIONE TRA ALCUNE VARIABILI CON UNA FUNZIONE MATEMATICA.

LA QUALITÀ DELL'APPROSSIMAZIONE (DATO CHE SARÀ RARO AVERE CHE I PUNTI MISURATI CADANO ESATTAMENTE SULLA FUNZIONE CONSIDERATA) SI CALCOLERÀ COSÌ:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

DOVE f È LA FUNZIONE CONSIDERATA E (x_i, y_i) È UNO L' i -ESIMO PUNTO USCITO Sperimentalmente.

PIÙ BASSO SARA IL NUMERO PIÙ ALTA SARÀ LA QUALITÀ DELL'APPROSSIMAZIONE.

LA CINEMATICA

LA CINEMATICA STUDIA IL **MOTO** DI UN CORPO SENZA RIFERIRSI ALLE CAUSE.

IL MOTO

IL MOTO È CARATTERIZZATO DA UNA **TRAIETTORIA**, CIOÈ L'INSIEME DELLE POSIZIONI

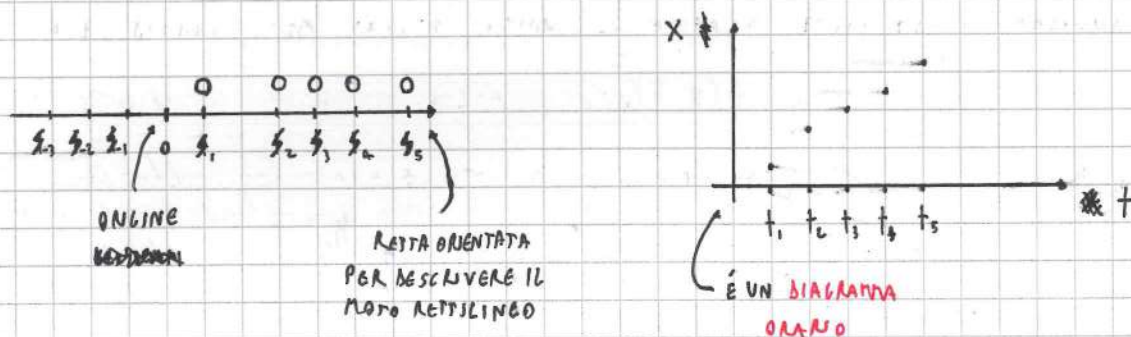
OCCUPATE DAL CORPO NEL TEMPO, PUÒ ESSERE:

- RETTILINEA
- CURVA
- CIRCOLARE

DIREMO CHE UN CORPO È IN MOTO QUANDO LA SUA POSIZIONE VARIEA NEL TEMPO (RISPETTO AD UN SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSATO).

IL MOTO RETTILINEO

INTRODUCIAMO ORA IL MOTO PIÙ SEMPLICE: QUELLO RETTILINEO.



DEFINIAMO **SPOSTAMENTO** Δx TRA LE POSIZIONI x_1 E x_2 (INIZIO E FINE) IL VALORE:

$$\Delta x := x_2 - x_1$$

LO SPOSTAMENTO SI MISURA IN METRI.

LA VELOCITÀ

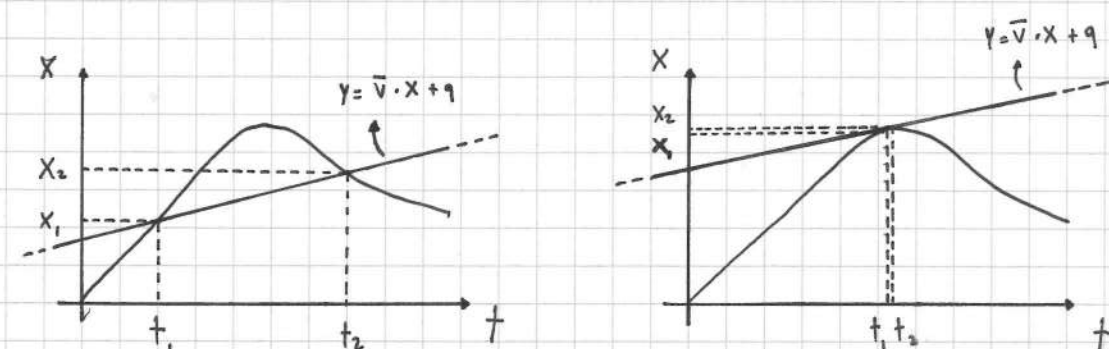
Vittorio Alzetta

DEFINIAMO ANCH'ESSE LA **VELOCITÀ MEDIA** COME IL RAPPORTO FRA LO SPOSTAMENTO E IL TEMPO CHE ESSO HA RICHIESTO:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

DOVE $x(t_1) = x_1$ E $x(t_2) = x_2$

CERCHIAMO DI CAPIRE MEGLIO CON UN GRAFICO COSA SUCCEDE ALL'APPROSSIMARSI DI Δt A 0:



NOTIAMO CHE PER Δt TENDENTE A 0 LA VELOCITÀ MEDIA È RAPPRESENTATA DAL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO IN NEL PUNTO CONSIDERATO. CHIAMEREMO QUEST'ULTIMA **VELOCITÀ ISTANTANEA** (PERCHÉ CALCOLATA IN UN PUNTO E NON IN UN INTERVALLO) E PER CALCOLARLA CI AFFIDEREMO AGLI STRUMENTI DELL'ANALISI I (IN PARTICOLARE LE DERIVATE)

PERCHÉ IL COEFFICIENTE ANGOLARE?

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SISTEMA:

$$\begin{cases} x_1 = mt_1 + q \\ x_2 = mt_2 + q \end{cases} \quad \begin{cases} q = x_1 - mt_1 \\ q = x_2 - mt_2 \end{cases} \rightarrow x_1 - mt_1 = x_2 - mt_2$$

$$x_2 - x_1 = m(t_2 - t_1) \Rightarrow m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

SIA f LA FUNZIONE CHE DESCRIVE LA POSIZIONE DEL PUNTO IN OGNI ISTANTE DI TEMPO,
(CON DOMINIO T E CODOMINIO L) PER CALCOLARE LA VELOCITÀ ISTANTANEA IN t_0 DOVREMO:

$$v_0 = f'(t_0) \quad \text{o} \quad v_0 = \frac{df}{dt}(t_0) \quad \text{o} \quad v_0 = \frac{dx}{dt} \quad \text{LEGE ORARIA} \quad (\text{ES. } x(t) = 4t^2 + 5t)$$

IL RISULTATO ~~ESPRESSO~~ VERRÀ ESPRESSO IN m/s .

L'ACCELERAZIONE

QUESTA GRANDEZZA FISICA ESPRIME LA VARIAZIONE DI VELOCITÀ IN UN DETERMINATO ARCO DI TEMPO.

ANALOGAMENTE A QUANTO FATTO PER LA VELOCITÀ DEFINIAMO L'ACCELERAZIONE MEDIA
COME:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

DOVE SI NOTI CHE v_2 E v_1 SONO LE VELOCITÀ ISTANTANEE CALCOLATE AI TEMPI t_2 E t_1 .

PER DEFINIRE L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA FACCIAMO UN RAGIONAMENTO:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{f'(t_2) - f'(t_1)}{t_2 - t_1}$$

DOVE f È LA FUNZIONE CHE AD OGNI ISTANTE DI TEMPO t ASSOCIA UNA POSIZIONE x .
AVENDO LE VELOCITÀ ISTANTANEE HO SOSTITUITO CON LA DERIVATA DI f CALCOLATA IN t_2 E t_1 .

PER OTTENERE ~~LA VELOCITÀ ISTANTANEA~~ L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA OCCORRE FAR
TENDERE A 0 IL ARCO DI TEMPO CONSIDERATO, FACCIAMOLO:

$$a_{t_0} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{f'(t_2) - f'(t_1)}{t_2 - t_1}$$

QUESTO DOVREBBE RICOMARCI LA DEFINIZIONE DI DERIVATA IN UN PUNTO:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

IL CHE CI PORTA A CONCLUDERE:

$$a_{t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{f'(t_2) - f'(t_1)}{t_2 - t_1} = (f'(t_1))' = f''(t_1)$$

L'ACCELERAZIONE ALL'ISTANTE t_1 SI CALCOLA TROVANDO LA DERIVATA SECONDA NEL PUNTO t_1 .
IL RISULTATO VERRÀ ESPRESSO IN m/s^2

IL MOTO CURVILINEO

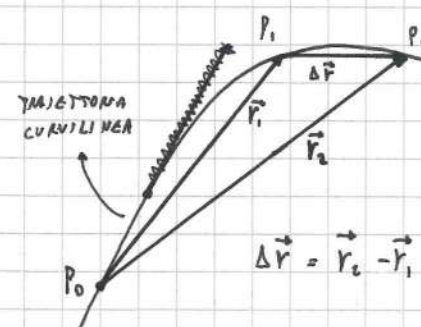
FORMALIZZIAMO ANGIUSTO UN CONCETTO GIÀ UTILIZZATO, QUELLO DI **LEGE ORARIA**,
OVVERO UNA LEGGE CHE AD OGNI ISTANTE DI TEMPO t ASSOCIA IL CORRISPONDENTE
VALORE DI s , CIOÈ IL NUMERO CHE ESPRIME LA DISTANZA DEL CORPO
DALL'ORIGINE CHE SI È SCELTA.

LA LEGGE ORARIA PUÒ ESSERE DESCRITTA DA:

- UNA TABELLA DI VALORI
- UN GRAFICO DI FUNZIONE
- UNA FORMULA MATEMATICA

VELOCITÀ MEDIA

COME FATTO PER IL MOTO RETTILINEO DEFINIAMO LA VELOCITÀ MEDIA NEL CASO DI UN
MOTO CURVILINEO. COMPRENDIAMONE LA DEFINIZIONE CON UN GRAFICO:



$$\text{MODULO DI } \bar{v} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

DIREZIONE DI $\bar{v}$ = RETTA PASSANTE PER P_1, P_2

VERSO DI $\bar{v}$ = VERSO DI $\Delta \vec{r}$

VELOCITÀ Istantanea

PROCEDIAMO QUINDI CON IL DEFINIRE LA VELOCITÀ Istantanea IN UN MOTO CURVILINEO.
IN REALTÀ LA COSA È MOLTO SEMPLICE:

- MODULO = $f'(t_0)$ CON f LECCE ORMAI E t_0 Istante DI INTERESSE
- VERSO = QUELLO DEL VETTORE $\Delta \vec{v}$
- DIREZIONE = TANGENTE ALLA TRAIETTORIA NELL'ISTANTE DI INTERESSE

A PROPOSITO DEL VERSO OCCORRE DIRE QUALCOSA IN PIÙ.

CI TROVIAMO IN UNO SPAZIO A 2 O 3 DIMENSIONI, DUNQUE SCRIVIAMO IL NOSTRO
VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$ COME COMBINAZIONE LINEARE DEI 3 VESSORI $\hat{i}$, $\hat{j}$ E $\hat{k}$:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

CON x, y, z COORDINATE DEL CORPO.

SE ORA VOLESSIMO CALCOLARE IL VETTORE SPOSTAMENTO RELATIVO A $\vec{r}_1$ E $\vec{r}_2$ DOVREMO:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

A QUESTO PUNTO IL CALCOLO DEL VETTORE SPOSTAMENTO IN UN ARCO DI TEMPO
TENDENTE A 0 SARÀ SUFFICIENTE CONSIDERARE SEPARATAMENTE LE VARIAZIONI
RELATIVE ALLE SINGOLE COORDINATE:

$$\begin{aligned} (\text{VELOCITÀ Istantanea}) = \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = f'_x(t_0)\hat{i} + f'_y(t_0)\hat{j} + f'_z(t_0)\hat{k} \\ &= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \end{aligned}$$

MOTO UNIFORME

PER MOTO UNIFORME SI INTENDE UN MOTO CON VELOCITÀ DI INTENSITÀ COSTANTE.

NEL CASO DI UN MOTO RETTILINEO C'È POCO DA DIRE, INFATTI IL VETTORE VELOCITÀ NON CAMBIA.

NEL CASO DI UN MOTO CURVILINEO IL VETTORE VELOCITÀ, SEPPUR RIMANGA COSTANTE IN
MODULO VARIA IN VERSO / DIREZIONE E CAUSA UN'ACCELERAZIONE.

ACCELERAZIONE MEDIA



LA VELOCITÀ VARIA IN VERSO E L'ACCELERAZIONE MEDIA È DA

DA:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

ACCELERAZIONE Istantanea

L'ACCELERAZIONE Istantanea SI OTTIENE FACENDO TENDERE A 0 L'INTERVALLO CONSI

$$\vec{a}_{t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

ANALOGAMENTE A QUANTO FATTO PER LA VELOCITÀ Istantanea IN 2 O 3 DIMENSIONI,
SCOMPONIAMO L'ACCELERAZIONE NELLE SUE 3 COMPONENTI E CALCOLIAMO IL LIMITE
SEPARATAMENTE PER OGNUNA DI QUESTE:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

DOVE SI OSSERVI CHE:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right)$$

SI NOTI CHE IL VERSO DELL'ACCELERAZIONE Istantanea NON SARÀ SEMPRE TANGENTE
ALLA TRAIETTORIA NEL PUNTO CONSIDERATO.

EQUAZIONI IMPORTANTI NEL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (E RETTILINEO)

ANZIUTTO CHIAMAMO CHE SI HA MOTO **UNIFORMEMENTE ACCELERATO** QUANDO L'ACCELERAZIONE È COSTANTE.

IN TAL CASO È POSSIBILE DIMOSTRARE CHE LE SEGUENTI EQUAZIONI DESCRIVONO IL MOTO RETTILINEO DEL CORPO:

$$V = V_0 + a t$$

LA FORMULA PER IL CALCOLO DELL'ACCELERAZIONE MEDIA DICE CHE $a_m = \frac{V_1 - V_0}{t_1 - t_0}$, IN QUESTO CASO $t_0 = 0$ E L'ACCELERAZIONE MEDIA E ISTANTANEA SONO UGUALI:

$$a_m = a = \frac{V - V_0}{t - 0} \quad \begin{array}{l} \text{VALE ATUTTE LE VEL.} \\ \text{VALE IN TUTTI GLI ISTANTI} \end{array} \Leftrightarrow t a = V - V_0 \Leftrightarrow V = V_0 + t a$$

$$= a \cdot \frac{d}{dt} t = a \cdot 1$$

SI NOTI CHE DERIVANDO ENTRAMBI I MEMBRI OTTIENIAMO $\frac{dV}{dt} = 0 + \frac{d}{dt}(t a) = 0 + a = a$ CHE CORRISPONDE ALLA DEFINIZIONE DI a .

$$X = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

CONSIDERIAMO LA FORMULA CHE ESPRIME LA VELOCITÀ MEDIA RISPETTO AL TEMPO E ALLA POSIZIONE OCCUPATA:

$$V_m = \frac{X - X_0}{t - t_0}$$

PONIAMO $t_0 = 0$ E SCRIVIAMO $X = X_0 + V_m t$. [1]

SI OSSERVA CHE ESSENDO L'ACCELERAZIONE a COSTANTE LA VELOCITÀ MEDIA TRA t_0 E UN TEMPO t SARA:

$$V_m = \frac{1}{2} (V + V_0)$$

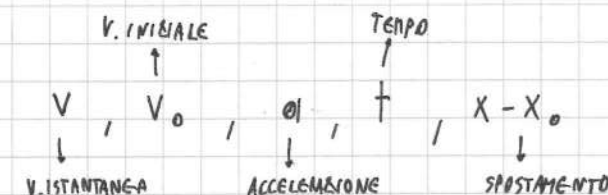
USANDO QUESTA CON LA [1] E QUELLA TROVATA INIZIALMENTE OTTIENIAMO:

$$X = X_0 + \left\{ \frac{1}{2} [(V_0 + a t) + V_0] t \right\} = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

LE 2 FORMULE CHE HO APPENA TROVATO SONO SUFFICIENTI A RISOLVERE TUTTI GLI

ESERCIZI SUL MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

INFATTI, IN QUESTO CASO, LE GRANDENZE CHE POSSONO ENTRARE IN GIOCO SONO SOLO 5:



SAREBBE QUINDI UTILE RICAVARE ALTRE 3 FORMULE CHE CONTENGANO SEMPRE 4 GRANDENZE MA DIVERSE DA QUELLE CONTENUTE NELLE ALTRE EQUAZIONI.

LASCIAMO FUORI IL TEMPO:

$$V^2 = V_0^2 + 2a(X - X_0)$$

ISOLIAMO DALLA PRIMA IL TEMPO E SOSTITUIAMOLO NELLA SECONDA:

$$V = V_0 + a t \quad t = \frac{V - V_0}{a} \Rightarrow (X - X_0) = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$= (X - X_0) = V_0 \cdot \frac{V - V_0}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(V - V_0)^2}{a^2}$$

$$= (X - X_0) = \frac{V_0 V - V_0^2}{a} + \frac{(V - V_0)^2}{2a}$$

$$= (X - X_0) = \frac{2V_0 V - 2V_0^2 + V^2 + V_0^2 - 2VV_0}{2a} \Rightarrow 2a(X - X_0) = V^2 - V_0^2$$

MA LASCIAMO FUORI L'ACCELERAZIONE:

$$(X - X_0) = \frac{1}{2} t (V + V_0)$$

SCOMPONIAMO DI NUOVO LE PRIME 2 EQUAZIONI PER OTTENERE QUELLA CERCATA:

$$V = V_0 + a t \quad a = \frac{V - V_0}{t} \Rightarrow (X - X_0) = V_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{V - V_0}{t} \right) t^2$$

$$= (X - X_0) = \frac{2V_0 t + V t - V_0 t}{2} \Rightarrow (X - X_0) = \frac{1}{2} t (V + V_0)$$

IN ULTIMO ESCLUIAMO LA VELOCITÀ INIZIALE:

$$(x-x_0) = vt - \frac{1}{2}at^2$$

COMBINIAMO NUOVAMENTE LA PRIMA E LA SECONDA EQUAZIONE:

$$v = v_0 + at \Rightarrow v_0 = v - at \Rightarrow (x-x_0) = (v-at)t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow (x-x_0) = vt - at^2 + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow (x-x_0) = vt - \frac{1}{2}at^2$$

INTEGRALI E MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

IN QUESTO PARAGRAFO MOSTRERÒ COME RICAVERE LE 2 EQUAZIONI FONDAMENTALI DEL MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO SFRUTTANDO IL CALCOLO INTEGRALE.

PARTIAMO DALLA DEFINIZIONE DI ACCELERAZIONE ISTANTANEA (IN QUESTO CASO È ANCHE COSTANTE):

$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = a dt$$

INTEGRANDO ENTRAMBI I MEMBRI:

$$\int dv = \int a dt \Rightarrow v = at + c$$

PER $t=0$ SI HA:
 $v_0 = a \cdot 0 + c$
 $v_0 = c$

SCRIVIAMO ORA LA DEFINIZIONE DI VELOCITÀ ISTANTANEA:

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow dx = v dt$$

SOSTITUIAMO L'EQUAZIONE APPENA TROVATA AL POSTO DI v ($v = at + v_0$) E INTEGRIAMO ENTRAMBI I MEMBRI:

$$\int dx = \int (at + v_0) dt \Rightarrow x = v_0 \int dt + \int at dt$$

È UNA COSTANTE

PER $t=0$ SI HA:
 $x_0 = v_0 \cdot 0 + \frac{1}{2}a \cdot 0 + c$
 $x_0 = c$

$$\Rightarrow x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + c \Rightarrow x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

INTEGRALI E CALCOLO VARIAZIONE DI VELOCITÀ E SPOSTAMENTO

IN QUEST'ALTRO PARAGRAFO SPIELHERÒ COME RICAVERE LA VARIAZIONE DI VELOCITÀ E LO SPAZIO PERCORSO (VARIAZIONE DELLA POSIZIONE) A PARTIRE DAI GRAFICI DI FUNZIONE DI ACCELERAZIONE E VELOCITÀ CON L'AUTO DEL CALCOLO INTEGRALE.

- SUPPONIAMO CHE CI VENGA DATA UNA FUNZIONE $v(t)$ CHE DESCRIVE LA VELOCITÀ DEL CORPO C IN FUNZIONE DEL TEMPO t .

POICHÉ DAL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE SAPIAMO CHE:

$$\int_{x_0}^x f'(x) dx = f(x) - f(x_0)$$

OSSERVANDO CHE $\frac{d}{dt} x = v(t)$ POSSIAMO SCRIVERE QUANTO SEGUE:

$$\int_{t_0}^t v(t) dt = x(t) - x(t_0)$$

IN SOSTANZA CI BASTERÀ CALCOLARE L'INTEGRALE DEFINITO TRA t_0 E t PER CONOSCERE LO SPOSTAMENTO DEL CORPO C .

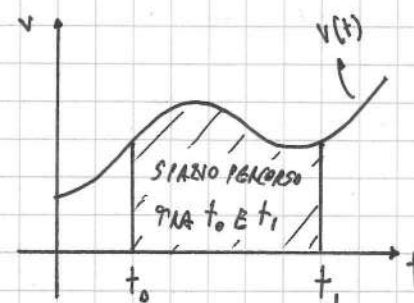
- SUPPONIAMO DI AVERE INVECE LA FUNZIONE $a(t)$ CHE CI RESTITUISCE L'ACCELERAZIONE DI C IN OGNI ISTANTE.

RICORDANDO CHE $\frac{d}{dt} v = a(t)$ POSSIAMO SCRIVERE QUANTO SEGUE:

$$\int_{t_0}^t a(t) dt = v(t) - v(t_0)$$

E ABBIAMO COSÌ RICAVERE LA VARIAZIONE DI VELOCITÀ TRA L'ISTANTE t_0 E t .

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



LA CADUTA DEI CORPI

TUTTI I CORPI, SULLA SUPERFICIE TERRESTRE SONO SOGGETTI ALLA STESSA ACCELERAZIONE COSTANTE CHE CHIAMEREMO **ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ** E INDICHEREMO CON g .

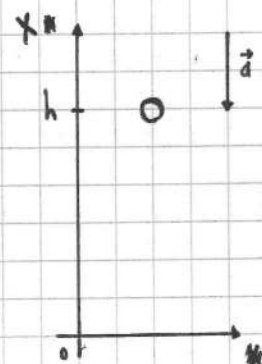
TALE ACCELERAZIONE VARIA A SECONDA DEL LUOGO IN CUI CI TROVIAMO E VALE:

- $9,81 \text{ m/s}^2$ DA NOI
- $9,78 \text{ m/s}^2$ ALL'EQUATORE
- $9,83 \text{ m/s}^2$ AL POLO NORD

TROVANDOCI AD AVERE A CHE FARE CON UN'ACCELERAZIONE COSTANTE (MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO) VALGONO LE EQUAZIONI TROVATE POCO FA.

IN PARTICOLARE STUDIEREMO QUI IL MOTO DI UN CORPO IN CADUTA LIBERA NEL CAMPO DI GRAVITÀ.

CONSIDERIAMO UN CORPO C IN CADUTA LIBERA DA UN'ALTEZZA h CON VELOCITÀ INIZIALE PAR A 0 m/s .



IN QUANTO TEMPO RAGGIUNGERÀ IL SUOLO?

CONSIDERIAMO LA FORMULA $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

SIAMO INTERESSATI AD $x=0$ E SAPPIAMO CHE $x_0 = h$, $v_0 = 0 \text{ m/s}$, $a = -g$

$$0 = h + 0 \cdot t + \frac{1}{2} (-g) \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ORA CI POTREMMO CHIEDERE CHE VELOCITÀ RAGGIUNGE IL CORPO AL CONTATTO CON IL SUOLO, DARE UNA RISPOSTA È MOLTO SEMPLICE, INFATTI, UNA VOLTA CONOSCIUTO IL TEMPO DI CADUTA BASTA SOSTITUIRLO NELLA SEGUENTE EQUAZIONE PER TROVARE LA VELOCITÀ FINALE:

$$v = v_0 + a(t - t_0) = 0 \text{ m/s} + (-g) \cdot \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \right) = -\sqrt{2gh}$$

SPESSO SI OMETTE IL SEGNO MENO RIFERENDOSI AL MODULO DI $\vec{v}$ E NON AL VERSO DEL VETTORE $\vec{v}$

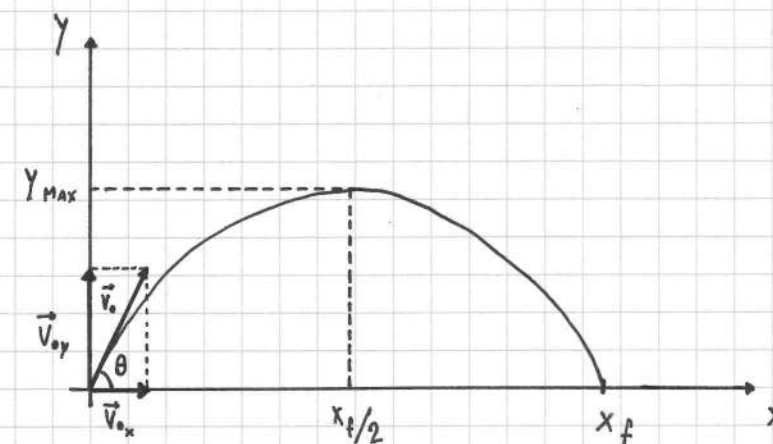
IL MOTO DEI PROIETTILI

Vittorio Alzetta

PARLIAMO DI MOTO DI UN PROIETTILE QUANDO IL CORPO VIENE LANCIATO CON UNA VELOCITÀ INIZIALE $\vec{v}_0$ E IN SEGLITO È SOTTOPOSTO ALLA SOLA ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ $\vec{g}$.

PER ANALIZZARE IL MOTO È PREFERIBILE CONSIDERARE SEPARATAMENTE LE COMPONENTI DI $\vec{v}_0$ (VERTICALE E ORIZZONTALE).

FAIÒ ORA UN ~~GR~~ GRAFICO A QUALITATIVO A CUI IN SEGLITO MI RIFERIRÒ:



PRIMA DI PROCEDERE CON L'ANALISI DEFINIAMO LA DISTANZA PERCORSA LUNGO X DAL CORPO PRIMA DI CADERE A TERRA **LITTATA** (PAR A x_f IN QUESTO CASO).

OSSERVIAMO CHE NELLA PRIMA METÀ L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ **DECELERA** L'OGGETTO (FACENDO DIMINUIRE LA COMPONENTE Y) E NELLA SECONDA METÀ LO **ACCELERA** (AUMENTA L'INTENSITÀ DELLA COMPONENTE Y DELLA VELOCITÀ).

LA COMPONENTE DI $\vec{v}_0$ LUNGO X ($\vec{v}_{0x}$) NON VARIA INVECE, È COSTANTE.

ANALISI DEL MOTO

LUNGO X AVREMO MOTO RETTILINEO UNIFORME:

$$a_x = 0 \Rightarrow \vec{v}_{0x} = \text{COSTANTE} \Rightarrow s_x = s_{x0} + v_{0x} \cdot t$$

LUNGO Y IL MOTO È RETTILINEO ^{UNIF. ACCEL.} (ACCELERAZIONE E DECELERAZIONE) E PERTANTO
VALERANNO LE LEGGI TROVATE IN PRECEDENZA:

$$a_y = -g \quad v_y = v_{0y} - g \cdot t \quad s_y = s_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

ORA CHE ABBIAMO 2 EQUAZIONI CHE ESPRIMONO LA POSIZIONE LUNGO X E LUNGO Y DEL
CORPO IN FUNZIONE DEL TEMPO POTREMO PROVARE A RICAVARNE UNA CHE DIA Y IN
FUNZIONE DI X:

$$x = x_0 + v_{0x} t \Leftrightarrow t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = y_0 + v_{0y} \cdot \frac{x - x_0}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2$$

ASSUMIAMO CHE: $x_0 = y_0 = 0 \text{ m}$, $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta$, $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta$ E
OTTENIAMO:

$$y = v_0 \cdot \sin \theta \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \theta} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cdot \cos \theta)^2}$$

$$= x \cdot \tan \theta - \frac{g}{2 (v_0 \cdot \cos \theta)^2} \cdot x^2$$

ED ECCO CHE ABBIAMO OTTENUTO L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA, DIRETTO QUINDI CHE
LA TRAIETTORIA DEL CORPO È PARABOLICA.

GITTATA

PER RICAVARE IL VALORE DELLA GITTATA G CI BASTERÀ CONSIDERARE IL TEMPO NECESSARIO
PERCHÉ IL CORPO TOCCHI IL SUOLO PER POI VALUTARE LA POSIZIONE LUNGO X NELL'ISTANTE
TROVATO:

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \text{ m} \Leftrightarrow t_0 = 0 \text{ s} \vee t_1 = \frac{2 v_0 \sin \theta}{g}$$

E SOSTITUENDO t_1 IN $x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t = x_0 + v_0 \cdot \cos \theta \cdot t$
POSSIAMO OTTENERE:

~~G = X - X_0~~

$$G = x - x_0 = v_0 \cdot \cos \theta \cdot \frac{2 v_0 \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\theta)$$

GITTATA MASSIMA E ALTEZZA MASSIMA

PER RICAVARE LA GITTATA MASSIMA CI BASTERÀ DERIVARE LA FUNZIONE $G(\theta)$:

$$G'(\theta) = 2 \cdot \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos(2\theta)$$

E PORRE IL RISULTATO PARIA A 0:

$$G'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

AVREMO QUINDI GITTATA MASSIMA LANCIANDO L'OGGETTO CON UN ANGOLO DI 45° RISPETTO AL
SUOLO.

PER L'ALTEZZA MASSIMA DOBBIAMO INVECE RICAVARE ~~IL VALORE DI~~ L'ISTANTE DI TEMP
IN CUI SI HA TALE MASSIMO:

$$y'(t) = v_0 \cdot \sin \theta - g t$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 \cdot \sin \theta - g t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

SOSTITUIAMO ORA QUESTO TEMPO NELLA FORMULA $y(t) = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$ PER
POI DERIVARE RISPETTO A θ E RICAVARE IL L'ANGOLO CON IL QUALE SI HA h_{MAX} :

$$\del{h_{\text{MAX}}(\theta)} h_{\text{MAX}}(\theta) = y_0 + v_0 \sin \theta \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2}$$

$$h'_{\max}(\theta) = 2 \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$h'_{\max}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = 0$$

LE SOLUZIONI SONO IGUANTO 0 E $\frac{\pi}{2}$, ESCLUDIAMO OVVIAMENTE LA PRIMA E CONCLUDIAMO CHE L'ALTEZZA MASSIMA SARA LANCIAANDO L'OGGETTO PERPENDICOLARMENTE RISPETTO AL TELLENO.

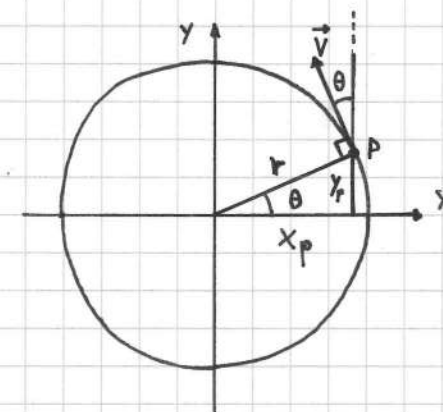
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Vittorio Alzetta

AVREMO MOTO CIRCOLARE UNIFORME SE UNA PARTICELLA SI MUOVE LUNGO UNA CIRCONFERENZA CON VELOCITA' DI INTENSITA' COSTANTE (VARIANDO IN DIREZIONE).

QUESTO MOTO E' CARATTERIZZATO DAL **PERIODO** (TEMPO CHE LA PARTICELLA IMPIEGA A COMPIRE 1 RIVOLUZIONE COMPLETA), DALLA **FREQUENZA** (NUMERO DI GIRI EFFETTUATI PER UNITA' DI TEMPO), DALLA **VELOCITA' ANGOLARE** (RADIANTI PERCORSI IN NELL'UNITA' DI TEMPO) E DALLA **ACCELERAZIONE CENTRIFUGA** (ACCELERAZIONE DOVUTA ALLA VARIANZA DI DIREZIONE DELLA VELOCITA').

ACCELERAZIONE CENTRIFUGA



OSSERVIAMO ANCH'ESSE CHE $\vec{v}$ PUO' ESSERE SCRITTO COME

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{j}$$

MA DAL MOMENTO CHE $\sin \theta = \frac{y_p}{r}$ E $\cos \theta = \frac{x_p}{r}$

AVREMO:

$$\vec{v} = \left(-\frac{v y_p}{r} \right) \hat{i} + \left(\frac{v x_p}{r} \right) \hat{j}$$

ORA PER TROVARE L'ACCELERAZIONE BASTERA DERIVARE

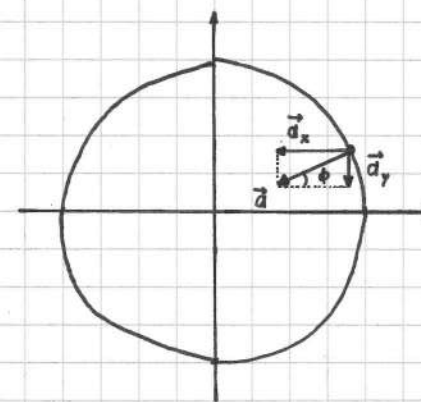
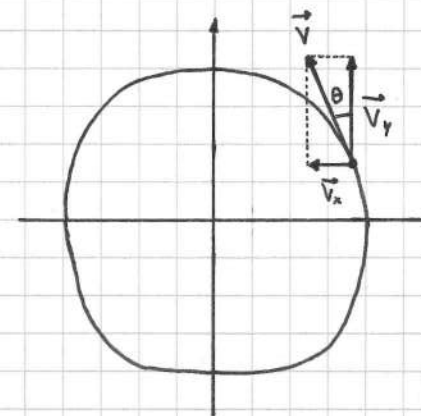
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt} \right) \hat{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt} \right) \hat{j}$$

E POICHE' LA DERIVATA DI y_p E x_p RISPETTO AL TEMPO E' PARIA A v_{py} E v_{px} AVREMO:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left(-\frac{v}{r} v_{py} \right) \hat{i} + \left(\frac{v}{r} v_{px} \right) \hat{j} \\ &= \left(-\frac{v^2 \cos \theta}{r} \right) \hat{i} + \left(-\frac{v^2 \sin \theta}{r} \right) \hat{j} \end{aligned}$$

E QUINDI IL MODULO DI $\vec{a}$ SARA:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \cdot \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{v^2}{r} \cdot 1 = \frac{v^2}{r}$$



ORA CHE ABBIAMO TROVATO IL MODULO NON CI RESTA CHE STABILIRE IL VERSO E ANCHE LA DIREZIONE DEL VETTORE $\vec{a}$.

PER FARLO OSSERVIAMO CHE:

$$\tan \phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-\frac{v^2}{r} \cdot \sin \theta}{-\frac{v^2}{r} \cdot \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\phi = \theta$$

E DUNQUE $\vec{a}$ È SEMPRE RIVOLTA VERSO IL CENTRO.

IL PERIODO E LA FREQUENZA

DEFINIAMO **PERIODO** IL TEMPO CHE IL CORPO IMPIEGA A PERCORRERE LA CIRCONFERENZA, IN FORMULE:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{SPAZIO} \\ \leftarrow \text{VELOCITÀ} \end{matrix} \quad [s]$$

ANALOGAMENTE DEFINIAMO LA **FREQUENZA** COME L'INVERSO IL RECIPROCO DEL PERIODO, IN QUANTO VOGLIAMO SAPERE IL NUMERO DI LAPI PER UNITÀ DI TEMPO:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} \quad [Hz]$$

VELOCITÀ ANGOLARE

LA VELOCITÀ ANGOLARE RAPPRESENTA LA VARIAZIONE DELLA POSIZIONE ANGOLARE NEL TEMPO, DOVE CON POSIZIONE ANGOLARE INTENDO L'ANGOLO COMPRESO FRA L'ASSE X E IL VETTORE $\vec{r}$ (CENTRO - POSIZIONE CORPO).

ESSA È PERTANTO DEFINITA COME:

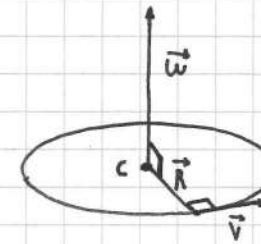
$$\omega = \frac{d}{dt} \cdot \theta \quad \left[\frac{rad}{s} \right]$$

OSSERVEREMO ORA IL SIGNIFICATO VETTORIALE DI QUESTA QUANTITÀ.

ANCITUTTO DICIAMO CHE LA VELOCITÀ ANGOLARE PUÒ ESSERE DEFINITA COME:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

CON IL SEGUENTE DISSEGNO NE COMPRENDEREMO MEGLIO LA NATURA:



$$\text{MODULO DI } \vec{\omega} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{r}|}$$

DIREZIONE DI $\vec{\omega}$ = PERPENDICOLARE AL PIANO DELLA TRAIETTORIA

VERSO DI $\vec{\omega}$ = STABILITO CON LA REGOLA DELLA MANO DESTRA

SI OSSERVI CHE LA SCELTA DELLA DIREZIONE DI $\vec{\omega}$ È CORRETTA ANCHE DAL PUNTO DI VISTA VETTORIALE, INRATTI $\vec{v}$ RISULTA PERPENDICOLARE SIA A $\vec{r}$ SIA A $\vec{\omega}$.

MOTO PERIODICO

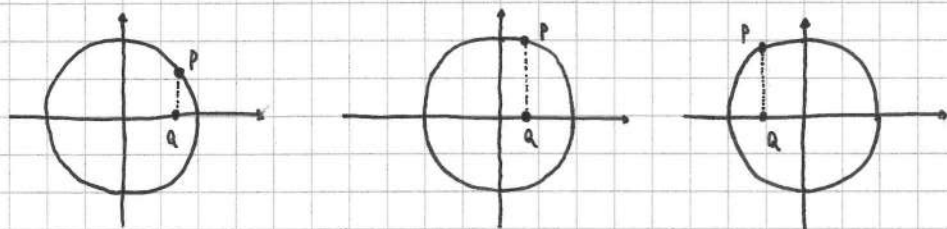
SI HA MOTO PERIODICO QUANDO LE STESSS SITUAZIONI DI MOVIMENTO, CIOE POSIZIONE VELOCITA' E ACCELERAZIONE SI VERIFICANO DI NUOVO.

IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME E' UN MOTO PERIODICO

MOTO ARMONICO

ANCHE IL MOTO ARMONICO E' UN PARTICOLARE TIPO DI MOTO PERIODICO.

ESSO E' CARATTERIZZATO DALLA PROIEZIONE DI UN PUNTO P CHE SI MUOVE DI MOTO UNIFORME CIRCOLARE SU UNA CIRCONFERENZA DI CENTRO O LUNGO L'ASSE X:



STABILIAMO ORA LE LEGGI DEL MOTO ARMONICO, IN PARTICOLARE A PARTIRE DALLA LEGGE ORAMA DETERMINEREMO LA VELOCITA' E L'ACCELERAZIONE IN OGNI ISTANTE.

ABBIAMO DEFINITO LA VELOCITA' ANGOLARE COME:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

TUTTAVIA POSSIAMO RIFORMULARLA IN MODO DA RICEVERE L'ANGOLO SPERATO DAL CORPO IN TEMPO t :

$$\omega \cdot t = \theta \quad (\text{ANGOLO SPERATO IN } t \text{ DAL CORPO})$$

ORA NE CALCOLIAMO IL COSENO PER OTTENERE UN VALORE IN $[-1, 1]$ INDICATIVO DELLA POSIZIONE DEL CORPO LUNGO IL RAGGIO SULL'ASSE X. POI CI BASTERA' MOLTIPLICARE PER R E AVREMO LA POSIZIONE LUNGO X DEL CORPO:

$$s(t) = R \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

DERIVIAMO QUINDI $s(t)$ RISPETTO AL TEMPO E OTTENIAMO:

$$v = \frac{d}{dt} s(t) = \frac{d}{dt} (R \cdot \cos(\omega \cdot t)) = -R \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega$$

DERIVIAMO ULTERIORMENTE PER OTTENERE L'ACCELERAZIONE:

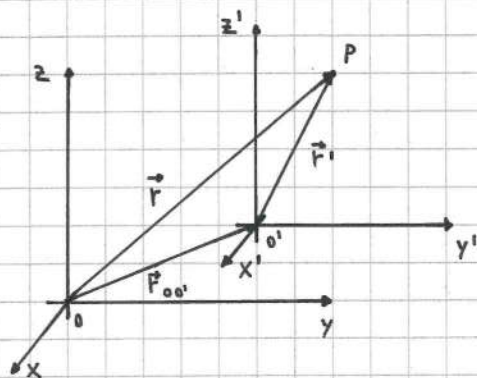
$$a = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} (-R \omega \sin(\omega \cdot t)) = -R \omega^2 \cos(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot s(t)$$

OSSERVAZIONI

LA VELOCITA' E' MASSIMA AL CENTRO E NULLA AGLI ESTREMI, MENTRE L'ACCELERAZIONE E' MASSIMA AGLI ESTREMI E NULLA AL CENTRO.

MOTI RELATIVI IN 3 DIMENSIONI

SUPPONIAMO DI TROVARCI NELLA SEGUENTE SITUAZIONE:



IL SISTEMA CON ASSI $x y z$ È FISSO, MENTRE QUELLO CON ASSI $x' y' z'$ SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME RISPETTO AL SISTEMA FISSO.

LA VELOCITÀ DEL P SISTEMA MOBILE È DETTA **VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO** ED È COSTANTE, LA INDICHEREMO CON $\vec{V}_t$.

P RAPPRESENTA LA POSIZIONE OCCUPATA DA UN CORPO ALL'ISTANTE t , $\vec{r}$ È IL VETTORE POSIZIONE DEL PUNTO P NEL SISTEMA FISSO, $\vec{r}'$ NEL SISTEMA MOBILE.

PRIMA DI CALCOLARE LA VELOCITÀ DI P RISPETTO AI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO OSSERVIAMO CHE $\vec{r}_{00'}$ È IL VETTORE CONGIUNGENTE OGNI ISTANTE LE ORIGINI DEI 2 SISTEMI DI RIFERIMENTO.

A PARTIRE QUINDI DALLA RELAZIONE:

$$\vec{r} = \vec{r}_{00'} + \vec{r}'$$

DERIVANDO, OTTENIAMO I VETTORI VELOCITÀ:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{00'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \Leftrightarrow \boxed{\vec{V} = \vec{V}_t + \vec{V}_i}$$

E DERIVANDO UN'ALTRA VOLTA RISPETTO AL TEMPO OTTENIAMO LA ~~velocità~~ L'ACCELERAZIONE:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_t}{dt} + \frac{d\vec{V}_i}{dt} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} = 0 + \vec{a}_i}$$

IN EFFETTI ESSENDO $\vec{V}_t$ COSTANTE LA SUA DERIVATA SARÀ 0 E DUNQUE ABBIAMO OTTENUTO CHE L'ACCELERAZIONE DI P RISPETTA SUI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO È LA STESSA.

QUESTA PARTICOLARITÀ È ALLA BASE DELLA DEFINIZIONE DEI SISTEMI DI RIFERIMENTO **INERZIALI**, MENTRE LE DUE LEGGI TROVATE PRENDONO IL NOME DI LEGGI DI TRASFORMAZIONE **GALILEIANE**.

SI OSSERVI CHE SE $\vec{V}_t$ NON DOVESSE ESSERE COSTANTE NEL TEMPO ALLORA LA SECONDA LEGGE DIVENTEREBBE:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_i$$

CON $\vec{a}_t$ **ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO** DEL SISTEMA MOBILE.

IN QUESTI CASI SI INTRODURREBBERO DELLE FORZE **APPARENTI** CHE ~~spiegherebbero~~ GIUSTIFICHERANNO QUESTI MOTI DI TRASLAZIONE NON UNIFORMI.

DINAMICA

LA DINAMICA STUDIA LE CAUSE CHE PORTANO UN CORPO A MUOVERSI. INDIVIDUA LE FORZE COME CAUSE E SI BASA SULLE 3 LEGGI DI NEWTON PER DETERMINARE IL MOTO DEI CORPI.

PRINCIPIO D'INERZIA (1^a LEGGE DI NEWTON)

QUESTO PRINCIPIO AFFERMA CHE SE UN OGGETTO NON INTERAGISCE CON L'ESTERNO (TUTTO CIÒ CHE NON È OGGETTO) ALLORA PERMANE NEL SUO STATO DI QUIETE, O VERO VELOCITÀ NULLA, O DI MOTO ~~uniforme~~ A VELOCITÀ COSTANTE SE OSSERVATO DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE (UN SISTEMA IN CUI VALE LA PRIMA LEGGE DI NEWTON)

AGGIUNGO CHE QUALUNQUE SISTEMA DI RIFERIMENTO SI MUOVA CON VELOCITÀ COSTANTE RELATIVAMENTE AD UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE SARÀ CONSIDERATO A SUA VOLTA INERZIALE.

MASSA INERZIALE

LA MASSA INERZIALE DI UN CORPO È UNA SUA PROPRIETÀ INTRINSECA, ESSA È UNA GRANDEZZA SCALARE (SI MISURA IN CHILOGRAMMI) E INFLUENZA L'ACCELERAZIONE SUBITA DA UN CORPO AD UNA FORZA.

FORZE

LE FORZE SONO LE CAUSE DELLE ACCELERAZIONI. I CORPI TENDEREBBERO A RIMANERE IN QUIETE O A MUOVERSI DI VELOCITÀ COSTANTE, LE FORZE IMPEDISCONO QUESTA TENDENZA.

POSSONO ESISTERE FORZE DI CONTATTO O CAMPI DI FORZE (A LIVELLO MICROSCOPICO ESISTONO SOLO QUESTI ULTIMI)

2^a LEGGE DI NEWTON

DA QUESTA SECONDA LEGGE POSSIAMO EVINCERE IL MOTO DI UN OGGETTO SOTTOPOSTO AD UNA FORZA NON NULLA. IN PARTICOLARE:

$$\vec{F}_{\text{TOT}} = m_{\text{in}} \cdot \vec{a} \quad [1]$$

DOVE $\vec{F}_{\text{TOT}}$ È LA FORZA RISULTANTE, VISTO CHE SI PARLA DI VETTORI ESSA CORRISPONDE ALLA SOMMA DI TUTTE LE FORZE CHE AGISCONO SUL CORPO. m_{in} È LA MASSA INERZIALE DEL CORPO E $\vec{a}$ È L'ACCELERAZIONE CHE IL CORPO SUBISCE. SI OSSERVA CHE $\vec{a}$ E $\vec{F}_{\text{TOT}}$ HANNO STESSA DIREZIONE E VERSO.

ANALISI DIMENSIONALE E SIGNIFICATO DI 1 N

DIMENSIONALMENTE LA [1] EQUIVALE A:

$$[F] = [M] \cdot \frac{[L]}{[T]^2}$$

DOVE $[F]$ SI MISURA IN NEWTON E 1 N EQUIVALE ALLA FORZA NECESSARIA AD ACCELERARE DI $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ UN CORPO DI MASSA INERZIALE 1 kg.

QUANTITÀ DI MOTO E IMPULSO

DEFINIAMO QUANTITÀ DI MOTO LA GRANDEZZA:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

E OSSERVIAMO CHE:

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} dt = d\vec{p}$$

ORA SUPPONIAMO DI VOLEA CALCOLARE L'INTERVALE TRA t_0 E t DELLA FORZA:

$$\int_{t_0}^t F dt = \int_{p_0}^p dp = p - p_0 = \Delta p$$

DEFINIAMO **IMPULSO** LA QUANTITÀ CHE ABBIAMO OTTENUTO, CIOÈ IL PRODOTTO TRA FORZA E TEMPO PER LA QUALE È STATA APPLICATA. (SI MISURA IN JOULE)

PRINCIPI DELLA DINAMICA E MOTO

OSSERVIAMO CHE IN PRESENZA DI FORZA COSTANTE APPLICATA AD UN CORPO AVREMO:

$$\vec{F} \text{ COSTANTE} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{a} \text{ COSTANTE}$$

E SI AVRÀ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

SE INVECE LA RISULTANTE DELLE FORZE FOSSE NULLA SI AVREBBE:

$$\vec{F} = 0 \text{ N} \Rightarrow \vec{a} = \frac{0 \text{ N}}{m} \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{COSTANTE}$$

E SI AVREBBE MOTO UNIFORME.

LA FORZA PESO

INIZIAMO ORA AD INTRODURRE ALCUNI TIPI DI FORZE, INIZIANDO DA QUELLA PIÙ COMUNE, LA **FORZA PESO** O PIÙ SEMPLICEMENTE PESO.

ESSA È GENERATA DALL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE CHE LA TERRA ESERCE SU TUTTI I CORPI.

LA DEFINIAMO COME:

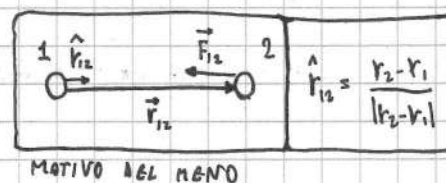
$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

SI CAPISCE QUINDI CHE MASSA E PESO SONO DUE QUANTITÀ DIFFERENTI, LA PRIMA È COSTANTE OVUNQUE MENTRE LA SECONDA VARIA DA LUOGO A LUOGO.

LA FORZA GRAVITAZIONALE

SECONDO LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE:

$$\vec{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r}_{12}$$



OGNI MASSA (CORPO DOTATO DI MASSA) HA LA CAPACITÀ DI ATTRARRE ED ESSERE ATTRATTO DA ALTRE MASSE.

MASSA INERZIALE E MASSA GRAVITAZIONALE

- LA MASSA INERZIALE MISURA LA DIFFICOLTÀ PER UNA DATA FORZA DI MODIFICARE IL MOTO DI UN CORPO.
- LA MASSA GRAVITAZIONALE MISURA INVECE L'INTENSITÀ DELL'ATTRAZIONE CHE VIENE ALLA TERRA.

SULL'EQUIVALENZA DI QUESTE DUE MASSE SONO STATI FATTI NUMEROSI ESPERIMENTI, CHE HANNO PORTATO AD AFFERMARE L'EQUIVALENZA CON PRECISIONI INFERIORI A 10^{-18} .

CONSIDERIAMO DUE CORPI IN CADUTA:

$$\vec{F}_{P1} = m_{g1} \cdot \vec{g} \quad \vec{F}_{P2} = m_{g2} \cdot \vec{g}$$

APPLICANDO LA SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA OTTENIAMO:

$$m_{i1} \cdot \vec{a}_1 = m_{g1} \cdot \vec{g} \quad m_{i2} \cdot \vec{a}_2 = m_{g2} \cdot \vec{g}$$

DA CUI AVREMO:

$$\vec{a}_1 = \frac{m_{g1} \cdot \vec{g}}{m_{i1}} \quad \vec{a}_2 = \frac{m_{g2} \cdot \vec{g}}{m_{i2}}$$

ESSENDO $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$ PER 2 CORPI IN CADUTA LIBERA CONCLUDIAMO CHE:

$$\frac{m_{g1}}{m_{i1}} = \frac{m_{g2}}{m_{i2}} \Leftrightarrow \frac{m_{g1}}{m_{g2}} = \frac{m_{i1}}{m_{i2}}$$

E CIOÈ $\frac{m_g}{m_i} = 1$ (CON UNA SCELTA ADICATA DELL'UNITÀ DI MISURA)
VALE ANCHE L'OSSERVAZIONE:

$$a \propto \frac{m_g}{m_i}$$

DALLA PRECEDENTE CONCLUSIONE POSSIAMO DIRE CHE,

$$F = ma \wedge F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow P = mg \wedge P = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$$

← MASSA TERRE
← RAGGIO TERRESTRE

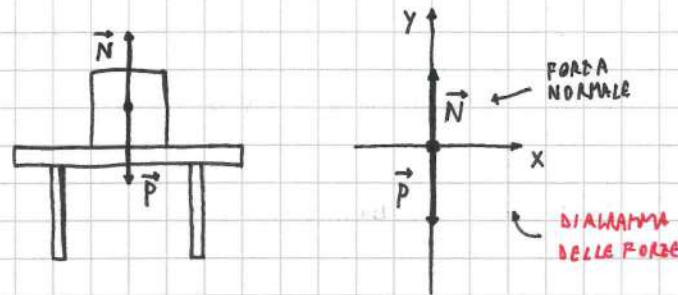
DA CUI:

$$mg = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \Leftrightarrow g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

REAZIONE VINCOLARE

LA **REAZIONE VINCOLARE** O FORZA NORMALE È LA FORZA CHE UNA SUPERFICIE ESERCITA SU UN CORPO APPOLLATO AD ESSA.

IL MOTIVO PER IL QUALE È ANCHE CHIAMATA NORMALE VIENE DAL FATTO CHE HA SEMPRE DIREZIONE PERPENDICOLARE RISPETTO ALLA SUPERFICIE.



SI OSSERVA CHE LA FORZA NORMALE È OPPOSTA IN VERSO MA UGUALE IN MODULO E DIREZIONE RISPETTO ALLA FORZA CHE L'HA GENERATA.

LA COPPIA DI FORZE NORMALE E "GENERATRICE" PUÒ ESSERE CONSIDERATA COME UNA COPPIA AZIONE REAZIONE, E CI PORTA AL MASSIMO PARADIGMA.

PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

SIMILMENTE A QUANTO APPENA DETTO IL 3° PRINCIPIO DELLA DINAMICA Afferma CHE SE IL CORPO 1 ESERCITA UNA FORZA $\vec{F}_{12}$ SUL CORPO 2 ALLORA IL CORPO 2 ESERCITA UNA FORZA $-\vec{F}_{12}$ SUL CORPO 1. IN SOSTANZA:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

QUESTO PRINCIPIO HA PROFONDE IMPLICAZIONI FISICHE, INFATTI CI ASSICURA CHE LE FORZE SONO SEMPRE PRESENTI A COPPIE (NON ESISTONO FORZE ISOLATE) E AGISCONO SU OGGETTI DIFFERENTI.

EQUILIBRIO STATICO E DINAMICO

SIA C UN CORPO NON SOLLETO A FORZE ESTERNE, DIREMO CHE C È IN **EQUILIBRIO**, IN FORMULE:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a} = 0$$

DIREMO INOLTRE CHE L'EQUILIBRIO È **STATICO** SE C HA VELOCITÀ NULLA E **DINAMICO** SE HA VELOCITÀ COSTANTE.

LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO CI PERMETTE DI RICAVARE A POSTERIORI LE FORZE DI VINCOLO, IN QUANTO SPESSE NON FACILMENTE INTUIBILI A PRIORI, INFATTI:

$$\vec{R}_{\text{tot}} = \vec{R} + \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = -\vec{R}$$

I VINCOLI

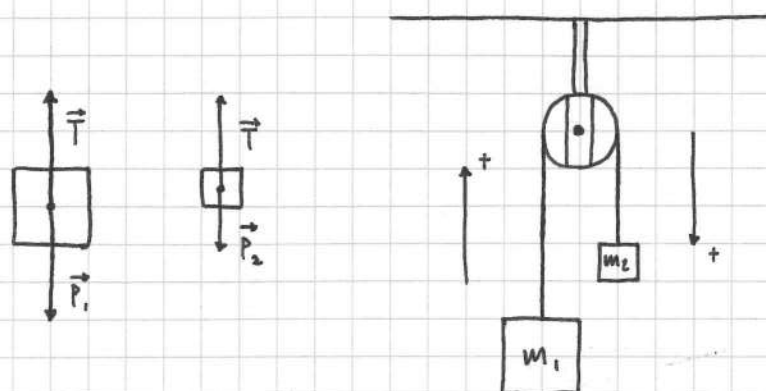
ESISTONO TANTISSIMI TIPI DI VINCOLI, NE VEDREMO ALCUNI PIÙ COMUNI DEGLI ALTRI NEGLI ESERCIZI:

- **FUNE**: TRASMETTE FORZA SOLO IN TRAZIONE
- **BALLA**: TRASMETTE FORZA IN TRAZIONE E SPINTA E ANCHE CON SFORZI DI TAGLIO
- **LOTTAIA**
- **PUNTO FISSO**

SULLA FUNE POSSIAMO AGGIUNGERE CHE LA FORZA CHE TRASMETTE AL CORPO È CHIAMATA **TENSIONE**, ESSA È DIRETTA COME LA CORDA E APPLICATA AL PUNTO DI CONTATTO COL CORPO. IN UNA FUNE IDEALE LA TENSIONE È TRASMESSA INALTERATA SU TUTTA LA LUNGHEZZA.

LA MACCHINA DI ATWOOD

QUESTO SISTEMA, CHIAMATO MACCHINA DI ATWOOD, PREVEDE LA PRESENZA DI 2 BLOCCHI (MASSE) AI CAPI DI UNA FUNE PASSANTE PER UNA CARRUCCIA:



ANZIUTTO CHIAMATO CHE IL MOTIVO PER IL QUALE IL VERSO POSITIVO CAMBIA APPARENTEMENTE DIREZIONE È DOVUTO AL FATTO CHE LA CORDA, WRANNO SULCA CARRUCCIA, INVERTE LA DIREZIONE.

ANALIZZIAMO ORA SEPARATAMENTE LE FORZE ALENN SUL CORPO 1 E 2:

$$\text{CORPO 1: } m_1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{T}| - |\vec{P}_1|$$

$$\text{CORPO 2: } m_2 \cdot |\vec{a}| = |\vec{P}_2| - |\vec{T}|$$

IN UN PRIMO MOMENTO POTREBBE SEMBRARE UN SISTEMA INSOLUBILE (2 EQUAZIONI E 3 INCOGNITE) MA SI OSSERVA CHE ESSENDO I 2 CORPI DIRETTAMENTE COLLEGATI LA LORO ACCELERAZIONE (ALMENO IN MODULO) È UGUALE, PERTANTO RICATIAMOLA:

$$\begin{cases} m_1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{T}| - |\vec{P}_1| \\ m_2 \cdot |\vec{a}| = |\vec{P}_2| - |\vec{T}| \end{cases} \rightarrow a \cdot (m_1 + m_2) = m_2 g - m_1 g \rightarrow |\vec{a}| = g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

RICAVIAMO ORA LA TENSIONE SOSTITUENDO $|\vec{a}|$ IN UNA DELLE DUE EQUAZIONI CON IL RISULTATO AVENUTA TROVATO:

$$|\vec{T}| = g \cdot m_1 + m_1 \cdot g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = g \left(\frac{m_1^2 + m_1 m_2 + m_1 m_2 - m_1^2}{m_1 + m_2} \right) = g \cdot \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

LA FORZA DI ATTRITO

TMA LE SUPERFICI DI DUE CORPI POSTI IN CONTATTO SI CREANO DELLE MICROFUSIONI (SALDATURE A FREDDO ISTANTANEE) DOVUTE ALLA VICINANZA DEGLI ATOMI DEI CORPI.

APPLICANDO UNA FORZA PARALLELA ALLA SUPERFICIE DI APPOLIO CI ACCORGEREMO CHE INIZIALMENTE, NONOSTANTE LA SPINTA, IL CORPO NON SI MUOVERÀ.

SARÀ NECESSARIO ARRIVARE AD UNA SOLITA MASSIMA O LIMITE, CHIAMATA **PUNTO DI ROTTURA**, PERCHÉ IL CORPO INIZI A MUOVERSI:



CHIAMEREMO FORZA DI **ATTRITO STATICO** LA FORZA CHE SI OPPONE AL TENTATIVO DI MUOVERE L'OBIETTO PENO. QU COME SI PUÒ INTUIRE DAL GRAFICO QUESTA FORZA NON È COSTANTE E HA UN VALORE MASSIMO, CALCOLABILE COME:

$$|\vec{F}_s| = |\vec{N}| \cdot \mu_s \quad (\mu_s < 1)$$

DOVE $\vec{N}$ È LA REAZIONE VINCOLARE ESERCITATA SUL CORPO E μ_s È UN COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO RICAVATO Sperimentalmente. È INTUITIVO PENSARE CHE NÙ IL CORPO È PRENUTO A TERRA O SU UNA LENERICA SUPERFICIE D'APPOLO LE MICROFUSIONI SARANNO MAIORI IN NUMERO E FORZA E PORTANDO AD UN CONSEGUENTE AUMENTO DELLA FORZA DI ATTRITO STATICO.

ORA INVECE INTRODUCIAMO LA FORZA DI **ATTRITO DINAMICO**, OVVERO LA FORZA NECESSARIA A MANTENERE IN MOTO UN CORPO GIÀ IN MOVIMENTO. ESSA IN TENSILE È PIÙ DEBOLE DEL VALORE MASSIMO DELLA FORZA DI ATTRITO STATICO, ED È COSTANTE. LA CALCOLOREMO COME:

$$|\vec{F}_d| = |\vec{N}| \cdot \mu_d \quad (\mu_d < 1)$$

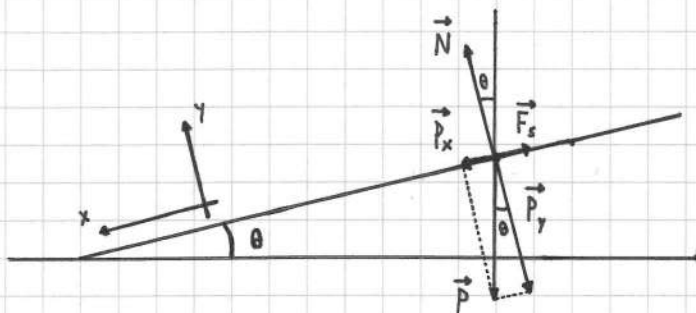
DOVE μ_d È UN COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO RICAVATO Sperimentalmente

COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO E ANGOLO DI INCLINAZIONE

PUÒ ESSERE UTILE RICAVARE UNA FORMULA PER IL CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO IN FUNZIONE DELL'ANGOLO CON CUI INCLINIAMO UNA SUPERFICIE DI APPOGGIO.

A QUEL PUNTO CI BASTEREBBE TROVARE L'ANGOLO AL QUALE L'OGGETTO INIZIA A SCIVOLARE PER AVERE IMMEDIATAMENTE μ_s .

INIZIAMO ANALIZZANDO IL DIAGRAMMA DELLE FORZE:



DALLA SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA ABBIAMO:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}$$

ANALIZZIAMO LA COMPONENTE X E Y SEPARATAMENTE:

$$X: \vec{P}_x + \vec{F}_s = m \vec{a}_x$$

$$Y: \vec{P}_y + \vec{N} = m \vec{a}_y$$

POICHÉ SIAMO INTERESSATI ALLA CONDIZIONE DI ~~ATTRAZIONE~~ EQUILIBRIO STATICO PONIAMO $\vec{a}_x = 0$ E $\vec{a}_y = 0$,

PASSANDO AI MODULI AVREMO:

$$X: m \cdot g \cdot \sin \theta - |\vec{N}| \cdot \mu_s = 0$$

$$Y: -m \cdot g \cdot \cos \theta + |\vec{N}| = 0$$

DA CUI RICAVIAMO:

$$m g \cdot \sin \theta - m g \cos \theta \cdot \mu_s = 0 \Rightarrow \mu_s = \frac{m g \sin \theta}{m g \cos \theta} = \tan \theta$$

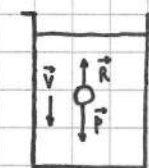
IL MOTO IN UN FLUIDO

Vittorio Alzetta

UN FLUIDO, SOSTANZA LIQUIDA O VISCOSA, ESERCITA UNA FORZA DI RESISTENZA SULLI OGGETTI CHE SI MUOVONO AL SUO INTERNO.

QUESTA FORZA $\vec{R}$ DIPENDE DA VARI FATTORI, QUAD TIPO DI FLUIDO, FORMA DELL'OGGETTO O L'AREA EFFICACE DELLA SEZIONE TRASVERSALE.

CON BUONA APPROSSIMAZIONE POSSIAMO DIRE CHE L'INTENSITA' DEL VETTORE $\vec{R}$ AUMENTA IN MANIERA PROPORZIONALE ALL'AUMENTO DELLA VELOCITÀ DEL CORPO, IN FORMULE:



$$\vec{R} = -\vec{v} \cdot b$$

DOVE b È UN COEFFICIENTE DA RICAVATO SPERIMENTALMENTE.

DAL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA AVREMO:

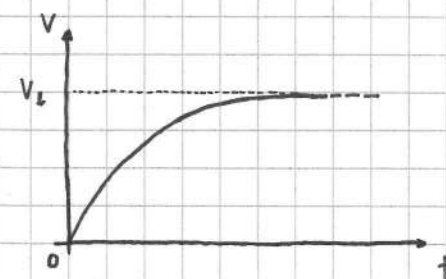
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{R} = m \vec{a} \Rightarrow m \cdot g - v \cdot b = m \cdot a$$

RICORDANDO CHE $a = \frac{dv}{dt}$ OTTENIAMO:

$$g - \frac{v \cdot b}{m} = \frac{dv}{dt}$$

POICHÉ COMPARE SIA LA FUNZIONE v CHE LA SUA DERIVATA SIAMO DI FRONTE AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE, NON ESSENDO ANCORA IN GRADO DI RISOLVERLA NE DARÒ SUBITO LA

SOLUZIONE, RICAVATA PONIENDO $v(t=0) = 0$ (VELOCITÀ INIZIALE NULLA):



$$v(t) = \underbrace{\frac{m g}{b}}_{\text{QUESTA È DETTA VELOCITÀ LIMITE}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{b t}{m}}\right) \quad \frac{b}{m} \text{ È DETTA COSTANTE DI TEMPO}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME E FORZE

AVEVAMO GIÀ PARLATO DI MOTO CIRCOLARE UNIFORME, E AVEVAMO CAPITO CHE UN CORPO IN TALE MOTO SUBIVA UN'ACCELERAZIONE CENTRIPETA DIRETTA AL CENTRO. ORA SAPPIAMO CHE AD UN'ACCELERAZIONE CORRISPONDE UNA FORZA, CHE IN QUESTO CASO CHIAMEREMO **FORZA CENTRIPETA**.

AVRÀ LA STESSA DIREZIONE E LO STESSO VERSO $\vec{a}_c$, MENTRE AVRÀ MODULO:

$$|\vec{F}_c| = m \cdot |\vec{a}_c| = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

CHIANTO IL MODULO ~~CHIAMEREMO~~, IL VERSO E LA DIREZIONE DELLA FORZA CENTRIPETA SI POTREBBE OSSERVARE CHE ALL'INTERNO DI UN'AUTO IN CURVA ANZICHÉ AVERE LA SENSAZIONE DI ESSERE SPINTI VERSO L'INTERNO SI HA LA SENSAZIONE OPPOSTA, CIOÉ DI ESSERE TIRATI VERSO L'ESTERNO.

QUESTO É IN ACCORDO CON IL FATTO CHE IN ASSENZA DI UNA FORZA CENTRIPETA IL NOSTRO CORPO TENDEREBBE A MUOVERSI LUNGO LA RETTA TANGENTE AL PUNTO DELLA CIRCONFERENZA IN CUI SI TROVA DI MOTO RETTILINEO UNIFORME. ED É QUINDI PER QUESTO MOTIVO CHE ISTANTE PER ISTANTE CI SENTIAMO SPINGERE ESTERNAMENTE:



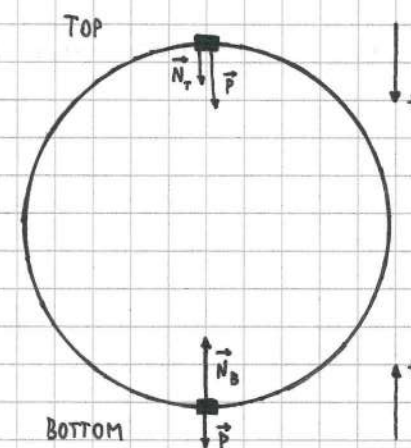
MA CONSIDERIAMO ORA COME SISTEMA DI RIFERIMENTO QUELLO DEL PUNTO IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME. IL CORPO É FERMO, E DUNQUE, IN ACCORDO CON IL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA LA RISULTANTE DELLE FORZE APPLICATE AL CORPO DEVE ESSERE 0.

ECCO QUINDI CHE SI RENDE NECESSARIA L'INTRODUZIONE DI UNA FORZA APPARENTE CHIAMATA **FORZA CENTRIFUGA** (D'ALTROUNDE CI TROVIAMO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO NON INERZIALE E QUINDI, COME ANTICIPAVO, VENGONO INTRODOTTE FORZE APPARENTI).

TALE FORZA HA DIREZIONE E INTENSITÀ PARI ALLA FORZA CENTRIPETA MA VERSO OPPOSTO.

UN ESERCIZIO IMPORTANTE

CONSIDERIAMO IL PILOTA DI UN AEREO CHE COMPIÉ UN GIRO DI 360° SU SÉ STESSO. DETERMINIAMO ORA LA FORZA ESERCITATA DAL SELLIOCINO DEL PILOTA SUL PILOTA. ANZITUTTO RISEGNAMO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



CHIARAMENTE IL PESO É SEMPRE RIVOLTO VERSO IL BASSO, MENTRE LA FORZA ESERCITATA DAL SELLIOCINO SPINGE VERSO IL CENTRO IL CORPO DEL PILOTA. LA RISULTANTE DI QUESTE FORZE SARÀ LA FORZA CENTRIPETA.

DUNQUE IN FORMULE AVREMO:

$$\text{BOTTOM: } \vec{P} + \vec{N}_b = \vec{F}_c \Leftrightarrow -m|\vec{g}| + |\vec{N}_b| = m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

$$\text{TOP: } \vec{P} + \vec{N}_t = \vec{F}_c \Leftrightarrow m|\vec{g}| + |\vec{N}_t| = m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

É IMPORTANTE SOTTOLINEARE IL FATTO CHE IL VERSO POSITIVO NON CAMBIA, É SEMPLICEMENTE DIRETTO VERSO IL CENTRO.

IN CONCLUSIONE, LA FORZA ESERCITATA DAL SELLIOCINO SUL PILOTA NEI 2 ISTANTI SARÀ:

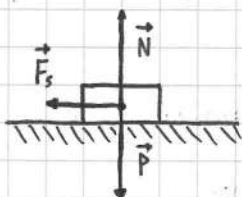
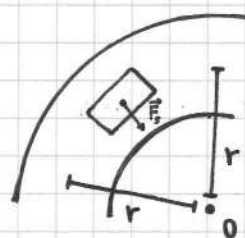
$$|\vec{N}_b| = m|\vec{g}| + m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{r} \quad |\vec{N}_t| = -m|\vec{g}| + m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

ESERCIZIO IMPORTANTE

PROVIAMO A CALCOLARE LA VELOCITÀ MASSIMA CON LA QUALE UN'AUTO PUÒ AFFRONTARE UNA CURVA (CHE SUPPORREMO CIRCOLARE) DI RAGGIO r .

PER COMPIERE UNA CURVA DOVREMO IMPRIMERE UNA CERTA FORZA SULL'ASFALTO DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA CURVA (CHE CHIAMEREMO O). SE RUSCIREMO AD IMPRIMERNE UNA ABBASTANZA FORTE DA FARCI COMPLETARE LA CURVA DIPENDE DAL VALORE MASSIMO CHE PUÒ ASSUMERE LA FORZA DI ATTACCO STATICO.

RAPPRESENTIAMO LA SITUAZIONE:



IN FORMULE AVREMO CHE SE L'AUTO SARÀ IN GRADO DI COMPLETARE LA CURVA ALLORA DOVRÀ VALERE:

$$|\vec{F}_s| \geq |\vec{F}_c| \Leftrightarrow |\vec{N}| \cdot \mu_s \geq m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{r} \Leftrightarrow m \cdot |\vec{g}| \cdot \mu_s \geq m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

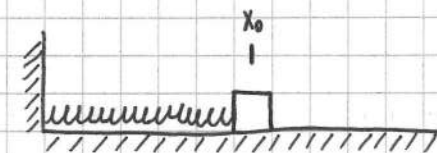
QUINDI, LA MASSIMA VELOCITÀ RAGGIUNGIBILE IN UNA CURVA CIRCOLARE DI RAGGIO r È:

$$v_{\max} = \sqrt{g r \mu_s}$$

MOTO ARMONICO CON OSCILLATORI

Vittorio Alzetta

CONSIDERIAMO UN CORPO FISSATO AD UNA MOLLA LIBERO DI MUOVERSI SU UNA SUPERFICIE PIANA DI ATTACCO:



È DIMOSTRABILE Sperimentalmente CHE LA LEGGE CHE LEGA LA POSIZIONE DEL CORPO NEL TEMPO E LA FORZA APPLICATA DALLA MOLLA (OSCILLATORE) SU DI ESSO È:

$$F(t) = -k x(t)$$

DOVE k È UN COEFFICIENTE SPERIMENTALE. PER IL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA CI TROVEREMO NELLA SEGUENTE SITUAZIONE:

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow -k \cdot x(t) = m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

SIAMO DI NUOVO DI FRONTE AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE, QUESTA VOLTA DI 2° ORDINE.

PER RISOLVERLA PONIAMO $x(t=0) = x_0$ E OSSERVIAMO CHE SIAMO LÁ A CONOSCENZA DI ALCUNE FUNZIONI LA CUI DERIVATA SECONDA È PARIA ALLA FUNZIONE STESSA (A MENO DI QUALCHE COSTANTE), SONO LE FUNZIONI SINUSOIDALI:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin(\omega t) = -\omega^2 \sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) = -\omega^2 \cos(\omega t)$$

CERCHIAMO ORA DI CAPIRE SE $x(t) = A \cos(\omega t)$ PUÒ ESSERE UNA SOLUZIONE, I SIMBOLI A E ω INDIRICANO DUE COSTANTI DA DETERMINARE.

SAPENDO CHE $x(t=0) = x_0$ OTTIENIAMO SUBITO CHE $A = x_0$ ($x(0) = A \cdot \cos 0 \Leftrightarrow A = x_0$)

PER NCAVARE ω NON CI RESTA CHE SOSTITUIRE $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ NELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_0 \cos \omega t) = -k x_0 \cos(\omega t)$$

$$m \frac{d}{dt} (-x_0 \omega \sin \omega t) = -k x_0 \cos(\omega t)$$

$$-m x_0 \omega^2 \cos \omega t = -k x_0 \cos(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

EBBENE ABBIAMO TROVATO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE, MA NOTIAMO CHE IL SENO, HODENDO NELLA STESSA PROPRIETÀ DEL COSENO PUÒ BENISSIMO ESSERE SOSTITUITO AL POSTO DI QUEST'ULTIMO.

E POICHÉ COSTANTE · SOLUZIONE È ANCORA SOLUZIONE E SOLUZIONE + SOLUZIONE È ANCORA SOLUZIONE POSSIAMO DIRE:

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

MA PONENDO COME CONDIZIONI INIZIALI $x(t=0) = x_0$ E $v(t=0) = V_0$ AVREMO SUBITO IL VALORE DI a E b :

$$x(0) = x_0 = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$$

PER LA VELOCITÀ CALCOLIAMO PRIMA LA DERIVATA:

$$v(t) = x'(t) = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t$$

E ORA TROVIAMO b :

$$v(0) = V_0 = -\omega a \cdot 0 + \omega b \cdot 1 = \omega b$$

LA LEI E ORANA FINALE SARÀ PERTANTO:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$$

IN CASO DI VELOCITÀ INIZIALE NULLA LE LEI ORANA, DELLA VELOCITÀ E DELL'ACCELERAZIONE SARANNO:

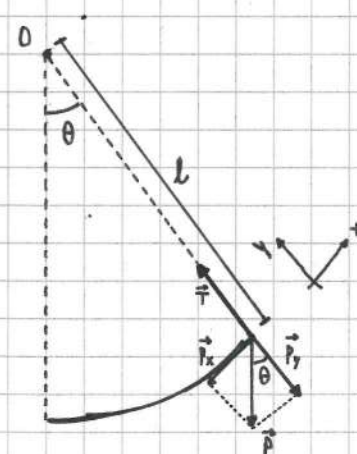
$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

$$v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t$$

$$a(t) = -x_0 \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x(t)$$

IL PENDOLO SEMPLICE

PER UNA COSA SCHEMATIZZIAMO LA SITUAZIONE CON UN DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



SAPPIAMO CHE ESPRIMENDO θ IN RADIANI POSSIAMO ESPRIMERE LA VELOCITÀ COME:

$$v(t) = \frac{d}{dt} (\theta(t) \cdot r) = r \frac{d}{dt} \theta(t)$$

PER CAPILO BASTA PENSARE CHE $\bar{v} = \frac{2\pi r}{t}$ DOVE 2π È L'ANGOLO VIRO MISURATO IN RADIANI.

DA QUESTA CONSIDERAZIONE SULLA VELOCITÀ E DAL 2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA AVREMO:

$$m \cdot a = -m \cdot g \cdot \sin \theta \Rightarrow m \cdot \frac{dv}{dt} = -m g \sin \theta \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \cdot m \cdot r = -m g \sin \theta$$

TUTTAVIA LA VARIABILE $\theta(t)$ COMPARE SIA SOTTO DERIVATA SECONDA SIA COME SENO, QUINDI SIAMO DI FRONTE AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE NON LINEARE. PER θ PICCOLI PERÒ POSSIAMO APPROSSIMARE LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR AL $\sin \theta \approx \theta$ (REMANENDO AL PRIMO TERMINE):

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{r} \cdot \theta(t) \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \text{STESSA EQUAZIONE STUDIATA PRIMA}$$

↑ PROCESSO DI LINEARIZZAZIONE

ENERGIA

IN QUESTO CAPITOLO VEDREMO COME È POSSIBILE TRATTARE I PROBLEMI CHE ABBIAMO IMPARATO A RISOLVERE FINORA TRAMITE IL CONCETTO DI **ENERGIA**, CHE PER SEMPLICITÀ DEFINIREMO COME LA CAPACITÀ DI COMPIERE UN LAVORO.

QUESTA ENERGIA VIENE ASSOCIATA AD UN CORPO TRAMITE UN VALORE NUMERICO CHE VARIEGÀ NEL CASO IN CUI DOVESSE ESSERCI UN TRASFERIMENTO DI ENERGIA DALL'AMBIENTE AL CORPO STESSO.

NEL NOSTRO CASO QUESTO TRASFERIMENTO DI ENERGIA AVVERRÀ A CAUSA DI FORZE E CHIAMEREMO IL LAVORO EFFETTUATO DA QUESTE **LAVORO MECCANICO**.

ENERGIA CINETICA

INTRODUCIAMO ORA IL PRIMO TIPO DI ENERGIA, L'**ENERGIA CINETICA**. QUESTA SARÀ L'ENERGIA ASSOCIATA ALLO STATO DI MOTO DELL'OGGETTO, QUANTO PIÙ BASSO SARÀ VELOCE QUANTO PIÙ ALTA SARÀ LA SUA ENERGIA CINETICA.

PER QUESTO MOTIVO DEFINIAMO COME SEGRE L'ENERGIA CINETICA DI UN CORPO DI MASSA m CHE SI MUOVE DI VELOCITÀ v :

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

L'UNITÀ DI MISURA DI K SAREBBE $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$, CHE NEL SISTEMA INTERNAZIONALE È CHIAMATO **JOULE** E INDICATO COME:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

SI OSSERVI CHE v^2 È IN REALTÀ $\vec{v} \cdot \vec{v}$, UN PRODOTTO SCALARE; K INFATTI È UNO SCALARE, NON UN VETTORE.

ABBIAMO DETTO CHE LA VARIAZIONE DI ENERGIA È DOVUTA, PER QUANTO CI MUOVIA, ALLA PRESENZA DI FORZE.

EBBENE ORA DEFINIREMO UNA GRANDEZZA CHE DARA INFORMAZIONI SULLE FORZE APPLICATE E SUI PUNTI DELLO SPAZIO IN CUI SONO STATE APPLICATE, TALE GRANDEZZA È CHIAMATA **LAVORO**:

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

PER ADESSO QUINDI ABBIAMO VISTO UN PRIMO TIPO DI ENERGIA, QUELLA CINETICA, E UN PRIMO MODO IN CUI ESSA PUÒ ESSERE TRASFERITA, CON IL LAVORO (E QUINDI L'INFLUENZA DI FORZE).

È POSSIBILE DIMOSTRARE UN TEOREMA, DETTO **TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA** CHE LEGA LE DUE GRANDEZZE APPENA INTRODOTTE:

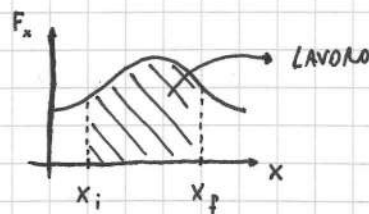
$$\begin{aligned} K_f - K_i &= \int_i^f 1 \cdot dK = \int_i^f 1 \cdot d\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) \\ &= \int_i^f \frac{1}{2} m d\vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_i^f m \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ &= \int_i^f m \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot d\vec{v} = \int_i^f m \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot \vec{v} dt = \int_i^f m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = L \end{aligned}$$

ECCO QUINDI CHE IL LAVORO PUÒ ESSERE INTESO COME LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA TRA IL PUNTO INIZIALE E IL PUNTO FINALE DELL'ARCO DI TEMPO CONSIDERATO.

RICORDANDO CHE $\vec{p} = m \vec{v}$ (QUANTITÀ DI MOTO) POSSIAMO USCIVERE LA DEFINIZIONE DI ENERGIA CINETICA COME:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2m} \cdot m^2 v^2 = \frac{1}{2m} \cdot p^2 \quad \Leftrightarrow \quad p = \sqrt{2mK}$$

OSSERVIAMO CHE IL LAVORO PUÒ ESSERE INTESO GRAFICAMENTE COME:



IN QUESTO GRAFICO SPAZIO - FORZA ~~INQUADRANDO~~ IL LAVORO È RAPPRESENTATO DALL'AREA DEL SOTTOCARIATO.

LA POTENZA

PER ADESSO ABBIAMO PARLATO DI ENERGIA IN RELAZIONE ALLO SPAZIO, TUTTAVIA È UTILE INTRODURRE QUESTA NUOVA GRANDEZZA CHE LEGA IL LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA ALL'ARCO DI TEMPO IN CUI È STATO FATTO:

$$P = \frac{dL}{dt}$$

LA CHIAMEREMO **POTENZA**. SI OSSERVA CHE LA POTENZA PUÒ ANCHE ESSERE ESPRESSA COME:

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_T \cdot v$$

LA SUA UNITÀ DI MISURA SARÀ:

$$[POTENZA] = \frac{[LAVORO]}{[T]} = \frac{[N] [L^2]}{[T]^3}$$

ESPRIMEREMO IN **JOULE** IL LAVORO E IN **WATT** LA POTENZA.

SEGNO DEL LAVORO

CERCHIAMO DI CAPIRE DA COSA DIPENDA IL SEGNO DEL LAVORO COMPIUTO.

DALLA DEFINIZIONE SI HA:

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} \quad \text{CON } F \text{ COSTANTE}$$

MA VEDIAMO:

$$L = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

DOVE θ È L'ANGOLO COMPRESO FRA $\vec{F}$ E $\Delta \vec{r}$. PERTANTO L SARÀ POSITIVO SE LA COMPONENTE DI $\vec{F}$ LUNGO LA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO HA LO STESSO VERSO DELLA VETTORE $\Delta \vec{r}$, L SARÀ NEGATIVO IN CASO CONTRARIO. SARÀ NULLO QUANDO $\theta = 90^\circ$, CIOÈ LA FORZA SARÀ APPLICATA PERPENDICOLARMENTE ALLO SPOSTAMENTO.

LAVORO ESEGUITO DA PIÙ FORZE

CONSIDERIAMO UNA PARTICELLA SU CUI AGISCONO n FORZE, LA CUI RISULTANTE SARÀ: $\sum_n \vec{F}_n = \vec{F}_{Ns}$. IL LAVORO FATTO DA TALI FORZE È:

$$L_{Ns} = \int_i^f \left(\sum_n \vec{F}_n \right) \cdot d\vec{r} = \sum_n \int_i^f \vec{F}_n \cdot d\vec{r}$$

PER IL TEOREMA DI ~~DETERMINAZIONE~~ ~~DELLA~~ ~~LAVORO~~ ~~FATTO~~ PASSANDO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE POSSIAMO PORTARE FUORI IL SIMBOLO DI SOMMAZIONE E CONCLUDERE CHE IL LAVORO FATTO DALLE n FORZE È PARO ALLA SOMMA DEI LAVORI FATTI SINGOLARMENTE DALLE FORZE.

LAVORO DELLA FORZA PESO

ABBIAMO DETTO CHE IL LAVORO È CAUSATO DALL'AZIONE DELLE FORZE, CALCOLIAMO ANCHE IL LAVORO EFFETTUATO DAL PRIMO TIPO DI FORZA CHE ABBIAMO VISTO, LA FORZA PESO.

SAPENDO CHE $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ AVREMO CHE IL LAVORO FATTO DALLA FORZA PESO QUANDO UN CORPO DI MASSA m HA RAGGIUNTO L'ALTEZZA d SARÀ:

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m g d$$

DOVUTO AL $\cos(\pi)$
 $\vec{P}$ E $d\vec{r}$ SONO OPPOSTI

DAL VALORE NEGATIVO DEL LAVORO TRAIAMO IMPORTANTI CONCLUSIONI:

$$L < 0 \Rightarrow K_f - K_i < 0 \Rightarrow V_f - V_i < 0 \Rightarrow V_f < V_i$$

SE INVECE IL CORPO DI MASSA m DOVESSE RINSCENDERE VERSO IL BASSO SI AVEREBBE:

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = +m g d$$

STAVOLTA $\vec{P}$ E $d\vec{r}$
HANNO LO STESSO VERSO

E DI CONSEGUENZA:

$$L > 0 \Rightarrow K_f - K_i > 0 \Rightarrow V_f - V_i > 0 \Rightarrow V_f > V_i$$

IL CORPO ACCELERA SCENDEDO E DECELERA SALEDO.

LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA

DOPO IL LAVORO DELLA FORZA ~~PESO~~ PESO INTRODUCIAMO QUELLO SVOLTO DA UNA FORZA ELASTICA.

ABBIAMO VISTO IN PRECEDENZA CHE LA FORZA ELASTICA È UNA FORZA VARIABILE, ESSA INFATTI È ESPRESSA COME FUNZIONE DI x , LO SPOSTAMENTO, DALLA LEGGE DI HOOKE:

$$F(x) = -k x$$

DOVE IL SEGNO "-" INDICA CHE SI OPPONE SEMPRE AL VETTORE SPOSTAMENTO.

ORA IMMAGINIAMOCI DI DIVIDERE LO SPOSTAMENTO TOTALE IN TANTI PICCOLI PERI, TALI PER CUI LA FORZA APPLICATA DALLA MOLLA IN QUELLI INTERVALLI PUÒ ESSERE CONSIDERATA COSTANTE (ALL'INTERNO DELLO STESSO INTERVALLO, NON TRA INTERVALLI DIVERSI)

ORA, PER TROVARE IL LAVORO DELLA FORZA ELASTICA NON CI RESTA CHE SOMMARE TUTTI I LAVORI COMPIUTI NEI PICCOLI INTERVALLI:

$$W_e = \sum_{i=1}^n -F_{x_i} \Delta x$$

ORA NON CI RESTA CHE FAR TENDERE A $+\infty$ IL VALORE n E CONSIDERARE INTERVALLI INFINITESIMI (CIÒÈ CALCOLARE L'INTEGRALE):

$$W_e = \int_{x_i}^{x_f} -F(x) dx$$

DOVE CONOSCIAMO L'ESPRESSIONE DI $F(x)$, PERCUI:

$$\begin{aligned} W_e &= \int_{x_i}^{x_f} -k x dx = -k \left[\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2} \right] \\ &= -\frac{k}{2} (x_f^2 - x_i^2) \\ &= -\frac{1}{2} k x_f^2 + \frac{1}{2} k x_i^2 \end{aligned}$$

QUINDI IL LAVORO SARÀ POSITIVO QUANDO LA POSIZIONE FINALE SARÀ PIÙ VICINA ALLA POSIZIONE DI RIPOSO RISPETTO ALLA POSIZIONE INIZIALE. IL LAVORO SARÀ NEGATIVO QUANDO LA POSIZIONE FINALE SARÀ PIÙ LONTANA, RISPETTO ALLA POSIZIONE INIZIALE ALLA POSIZIONE DI RIPOSO.

LE FORZE CONSERVATIVE

PER ADESSO, QUANDO ABBIAMO PARLATO DI LAVORO, ABBIAMO PRESO IN CONSIDERAZIONE IL PERCORSO SEGUITO DALLA PARTICELLA IN AGGIUNTA.

D'ORA IN POI DIREMO CHE SE IL LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA DIPENDE SOLO DALLA POSIZIONE INIZIALE E DALLA POSIZIONE FINALE DEL CORPO ALLORA QUESTA FORZA SARÀ DI TIPO **CONSERVATIVO**.

IN CASO CONTRARIO LA FORZA SARÀ **NON CONSERVATIVA**.

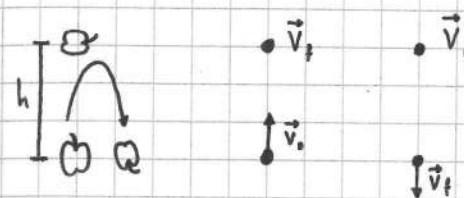
SONO ESEMPLI DI FORZE CONSERVATIVE LA FORZA GRAVITAZIONALE E LA FORZA ELASTICA, MENTRE LA FORZA DI ATTRITO **NON** È CONSERVATIVA.

IN QUEST'ULTIMO CASO IL LAVORO DIPENDE DALLA LUNGHEZZA DEL PERCORSO E QUINDI NON SOLO DALLA POSIZIONE INIZIALE E FINALE.

L'ENERGIA POTENZIALE

QUELLA CHE STIAMO INTRODUCENDO ORA È UN TIPO DI ENERGIA MOLTO GENERALE, CAPIAMO PERCHÉ CON QUALCHE ESEMPIO EFFICACE.

IMMAGINIAMO DI LANCiare UNA MELA VERSO L'ALTO CON VELOCITÀ INIZIALE v_0 .



QUESTO VORRÀ DIRE CHE LA MELA AVrà, INIZIALMENTE, ENERGIA CINETICA NON NULLA. DURANTE LA SALITA PERÒ, LA FORZA DI GRAVITAZIONE ESERCITA O SVOLGE UN

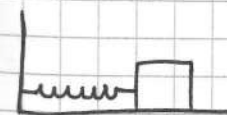
LAVORO NEGATIVO SULLA MELA, MA QUESTO COSA VUOL DIRE?

VUOL DIRE CHE STA TOLLENDO (RUBANDO) ENERGIA AL SISTEMA DELLA MELA (IN QUESTO CASO CINETICA). MA DOVE VA A FINIRE QUESTA ENERGIA?

EBBENE QUI ENTRA IN GIOCO L'**ENERGIA POTENZIALE** CHE PUÒ ESSERE VISTA COME UN CONTENITORE DI ENERGIA "RUBATA", QUESTO CONTENITORE PUÒ SIA RICEVERE CHE CEDERE ENERGIA.

INFATTI, QUANDO LA MELA RICADE LA FORZA DI GRAVITAZIONE ^{SVOLGE} ~~ESERCITA~~ UN LAVORO POSITIVO SULLA MELA, CIÒ VUOL DIRE CHE LEI STA DANDO DELL'ENERGIA (IN QUESTO CASO CINETICA). MA DA DOVE PRENDE QUEST'ENERGIA? LA PRENDE DI NUOVO DALL'ENERGIA POTENZIALE, DALLO STESSO CONTENITORE CHE PRIMA AVEVA REMPITO.

UN DISCORSO ANALOGO PUÒ ESSERE FATTO PER UN SISTEMA CON MOLLA.



IN QUESTO CASO SE DALLA POSIZIONE DI RIPOSO SPINGIAMO PER UN Istante ~~IL~~ IL BLOCCO VERSO DESTRA ESSO PARTIRà CON UN PÒ DI ENERGIA CINETICA, CHE LEI VERRà GRADUALMENTE

RUBATA DALLA FORZA ELASTICA (DAL LAVORO COMPIUTO DA ESSA) PER ESSERE INSENITA NEL CONTENITORE DI ENERGIA POTENZIALE. QUANDO POI IL CORPO RITORNA VERSO SINISTRA ACCELERA, AUMENTANDO ENERGIA CINETICA, CHE OVVIAMENTE VERRà PRESA DAL CONTENITORE DI ENERGIA POTENZIALE REMPITO PRIMA.

PERCHÉ STAVOLTA LE FORZE CHE RUBANO L'ENERGIA SONO PIÙ D'UNA, MENTRE QUELLA LAMVITAZIONALE LA TRASFORMEREBBE IN POTENZIALE, QUELLA DI ATTITO (DELL'ARIA, QUINDI FORZA DI ATTITO VISCOSO) LA MUTEREBBE IN ENERGIA TERMICA, IMPEDENDO ALL'ENERGIA MECCANICA DI CONSERVARSI.

IN FORMULE SI AVREBBE:

$$L_{ATT} = \Delta E_{mec} = E_{mec}^f - E_{mec}^i$$

IN SOSTANZA IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA È NEGATIVO (INFATTI RUBA ENERGIA, NON LA REGALA) POICHÉ L'ENERGIA MECCANICA DELLO STATO f È MENO RISPETTO ALLO STATO i (CHE VIENE PRIMA).

FORZA ED ENERGIA POTENZIALE

PONIAMOCI, PER SEMPLICITÀ, IN UNA SITUAZIONE UNIDIMENSIONALE (IN CASO CONTRARIO BISOLNEREBBE CONSIDERARE VETTORI E NON PUNTI).

IN QUESTO CASO IL LAVORO W COMPIUTO DA UNA FORZA È PARI A:

$$W = F(x) \Delta x$$

CONOSCENDO LA RELAZIONE TRA W E ΔU OTTENIAMO:

$$-W = -F(x) \Delta x = \Delta U(x)$$

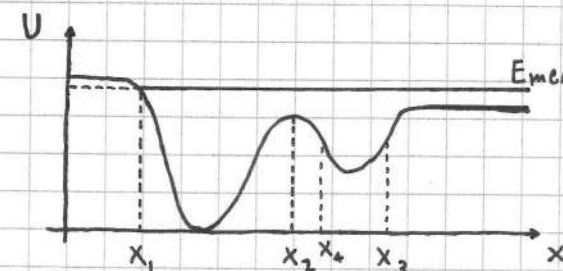
E DERIVANDO OTTENIAMO LA FORZA ISTANTANEA IN FUNZIONE DELLO SPAZIO x :

$$F(x) = -\frac{d}{dx} U(x)$$

DATO QUINDI IL GRAFICO DELL'ENERGIA - POTENZIALE SAPPIAMO CHE LA SUA PENDENZA DEDUCE PER OGNI PUNTO x CORRISPONDE DELL'INTENSITÀ DELLA FORZA APPLICATA IN QUEL PUNTO.

ALL'OPPOSTO

QUI DI SEGUITO IL GRAFICO DELL'ANDAMENTO DELL'ENERGIA POTENZIALE IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE:



ANZIUTTO OSSERVIAMO CHE L'ENERGIA CINETICA NON PUÒ MAI ESSERE NEGATIVA, ANCHE SE LA VELOCITÀ DOVESSE ESSERLO ESSA COMPARE AL QUADRATO RUINDI:

$$K \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

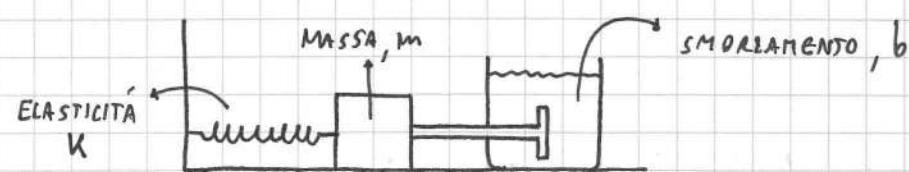
PER QUESTO MOTIVO UNA PARTICELLA PUÒ AVVICINARSI A x_1 DA DESTRA SENEA PERÒ SOPPASSARLO, INFATTI IN x_1 LA VELOCITÀ SARÀ NULLA E SU DI ESSA AGIRÀ UNA FORZA POSITIVA (PENDENZA NEGATIVA) CHE LA PORTERÀ VERSO DESTRA. CHIAMEREMO IL PUNTO x_1 , POICHÉ OR LÌ LA PARTICELLA INVERTE IL MARCHIO MOTO, PUNTO DI INVERSIONE.

ORA IMMAGINIAMOCI CHE IL VALORE DELL'ENERGIA MECCANICA SIA PARI AL VALORE DI U IN x_2 . SE UNA PARTICELLA DOVESSE TROVARSI LÌ FERMATA SI AVREBBE CHE ALLA MINIMA PERTURBAZIONE CAMBIEREBBE LIEVEMENTE LA SUA POSIZIONE LUNGO x E INIZIEREBBE AD AGIRE SU DI ESSA UNA FORZA NON NULLA, CREATURA QUESTA SITUAZIONE PRECARIA **ENVILIBRO INSTABILE**.

SE INVECE UNA PARTICELLA DOVESSE TROVARSI NEL PUNTO x_3 E IL VALORE DELL'ENERGIA MECCANICA FOSSE PROPRIO QUELLO DI U IN x_3 ALLORA SI AVREBBE CHE LA PARTICELLA RIMANEREBBE VINCOLATA A MUOVERSI NELLA BUCCA DI POTENZIALE COMPRESA FRA I 2 PUNTI DI INVERSIONE x_3 E x_4 , TALE SITUAZIONE SI CHIAMA CONDIZIONE DI **ENVILIBRO STABILE**.

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

IN QUESTO BREVE CAPITOLO DARO' GLI STRUMENTI NECESSARI A STUDIARE IL MOTO DI UN OSCILLATORE ARMONICO SOTTOPOSTO A FORZE SMORZANTI, CONSIDERANDO PER ESEMPIO IL SEGUENTE SCHEMA:



IL LIQUIDO FRENERA' LE OSCILLAZIONI DEL BLOCCO m TRAMITE LA PALETTA IMMERSA IN ESSO. CON BUONA APPROSSIMAZIONE POSSIAMO DEFINIRE LA FORZA DI SMORZAMENTO COME:

$$F_d = -b \cdot v$$

POICHÉ LUNGO x AVRANNO SOLO FORZA F_d DI SMORZAMENTO E FORZA ELASTICA ED ENTRAMBE SI OPPONGONO SEMPRE AL MOTO AVANZO:

$$-b \cdot v - k \cdot x = m \cdot a$$

0, SCRIVENDO LE DERIVATE:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0$$

CHÉ È UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI SECONDO ORDINE CON SOLUZIONE:

$$x(t) = A \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega' \cdot t + \phi)$$

DOVE $A \cdot e^{-\frac{b}{2m}t}$ RAPPRESENTA L'AMPIEZZA E ω' È LA PULSAZIONE E VALE:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

SI OSSERVA CHE PONENDO $b = 0 \frac{kg}{s}$ (SMORZAMENTO NULLO) SI OTTIENE LA SOLITA FORMULA DELL'OSCILLATORE ARMONICO NON SMORZATO.

SAPPIAMO CHE L'ENERGIA MECCANICA PER UN OSCILLATORE NON SMORZATO VALE

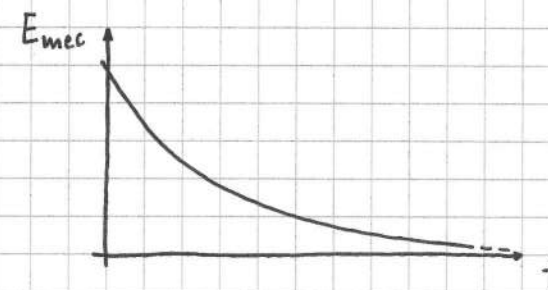
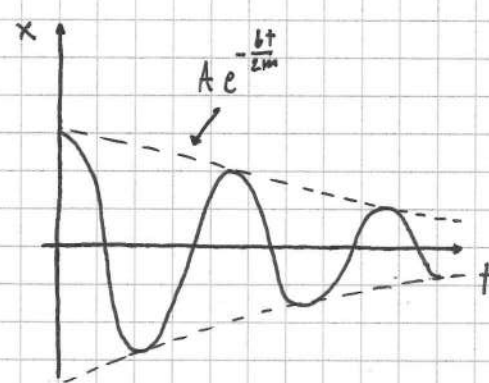
$\frac{1}{2} k A^2$ (È FACILE DA CAPIRE SE PENSIAMO CHE L'ENERGIA CINETICA È NULLA QUANDO IL CORPO È PIÙ DISTANTE DALLA SUA POSIZIONE DI RIPOSO, LÌ C'È SOLO ENERGIA POTENZIALE CHE È UGUALE ALL'ENERGIA MECCANICA E VALE INFINITO QUANTO SOTTO SOPRA).

PER TROVARE L'ENERGIA MECCANICA DI UN OSCILLATORE SMORZATO DOBBIAMO SOSTITUIRE AL POSTO DI A UNA NUOVA AMPIEZZA, OTTENENDO:

$$E_{mec}(t) = \frac{1}{2} k \cdot \left(A \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot e^{-\frac{b}{m}t}$$

QUI DI SEGUITO UN ANDAMENTO APPROSSIMATO DELL'ENERGIA MECCANICA E DELLA POSIZIONE NEL TEMPO.



SI OSSERVA CHE PER $\omega' = 0$, CIOÈ:

$$\frac{k}{m} = \frac{b^2}{4m^2} \Leftrightarrow k = \frac{b^2}{4m}$$

IL CORPO LASCIATO DA UNA POSIZIONE DIVERSA DA QUELLA DI EQUILIBRIO VI SI AVVICINA PER POI PERMANERE SENZA OSCILLARE (OVVIAMENTE, IL L'ARTICOLAMENTO DEL COSENDO È 0).

QUESTA CONDIZIONE PRENDE IL NOME DI SMORZAMENTO CRITICO.

OSCILLAZIONI FORZATE E RISONANZA

MODIFICANDO OPPORTUNAMENTE LO SCHEMA FATTO NEL CAPITOLO PRECEDENTE POSSIAMO OTTENERE UN OSCILLATORE ARMONICO FORZATO.

CI BASTA PERMETTERE AL MURO DI SINISTRA DI MUOVERSI AVANTI E INDIETRO SULLA BASE DI UNA FORZA CHE CHIAMEREMO **ECCITATRICE**.

PRIMA DI CONTINUARE OCCORRE SPIEGARE CHE OGNI SISTEMA HA UNA PROPRIA FREQUENZA ANGOLARE NATURALE, CIOÈ LA FREQUENZA ANGOLARE ALLA QUALE OSCILLEREBBE SE FOSSE SOTTOPOSTO AD UNA PERTURBAZIONE E POI FOSSE LASCIATO LIBERO.

LA FORZA ECCITATRICE SARÀ DIRETTA NEL VERSO DEL MOTO E AVRÀ UN ANDAMENTO SINUSOIDALE DEL TIPO:

$$F = F_0 \cdot \sin(\omega_F \cdot t)$$

DOVE ω_F È DETTA **PULSAZIONE FORZANTE**. LUNGO X AGIRANNO LE SEGUENTI FORZE:

$$-kx - b\dot{x} + F_0 \sin(\omega_F t) = m \cdot a$$

CHE, PASSANDO ALLE DERIVATE, DIVENTA:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x + b \frac{d}{dt} x + kx = F_0 \sin(\omega_F t)$$

SI TRATTA DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE CON SOLUZIONE:

$$x(t) = \underbrace{A \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega' \cdot t + \phi)}_{\text{HA LA STESSA FORMA DELL'OSCUILLAZIONE DELL'OSCILLATORE SMORZATO}} + \underbrace{A_F \cdot \sin(\omega_F \cdot t + \phi_F)}_{\text{È DOVUTA ALLA FORZA ECCITATRICE}}$$

QUANDO $\omega' \approx \omega_F$ SI VERIFICA IL FENOMENO DELLA **RISONANZA**, INPATTI È FACILE VEDERE CHE AN. SI OTTENGONO VALORI DI X PIÙ GRANDI PROPRIO QUANDO LE DUE FREQUENZE ANGOLARI SONO VICINE.

CENTRO DI MASSA

Vittorio Alzetta

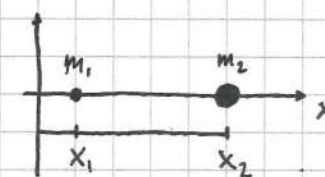
PER ADESSO, IN TUTTI GLI ESEMPI ED ESERCIZI, ABBIAMO APPROSSIMATO GLI OGGETTI A CORPI PUNTFORMI, CIOÈ DEI PUNTI SINGOLI.

IN QUESTO CAPITOLO VEDREMO COME PERFECIONARE QUESTA APPROSSIMAZIONE INTRODUCENDO ANZITUTTO I **SISTEMI DI PARTICELLE**, CIOÈ SISTEMI FORMATI DA PIÙ DI UN PUNTO (SONO QUINDI PIÙ COMPLESSI DA STUDIARE).

IN QUESTI SISTEMI SI FINIREBBE PER DOVER ^{USARE} N 2^o LEGGI DELLA DINAMICA, ^{UNA} PER OGNI PARTICELLA CHE LO COMPONE. UN GRANDE AIUTO CONSISTE NEL CONSIDERARE IL CORPO IN QUESTIONE COME **RIGIDO** (NON DEFORMABILE), CIO IMPLICHEREBBE CHE LE POSIZIONI RELATIVE DELLE PARTICELLE DEL SISTEMA ~~REMANESSANO~~ ^{REMANESSANO} UMANESSEDO COSTANTI.

INTRODUCIAMO ORA IL CONCETTO DI **CENTRO DI MASSA** DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI, CIOÈ QUEL PUNTO CHE SI MUOVE COME SE TUTTA LA MASSA DEL SISTEMA FOSSE CONCENTRATA IN QUEL PUNTO E TUTTE LE FORZE DEL SISTEMA FOSSEDO APPLICATE IN QUEL PUNTO.

NOI SUPPONIAMO DI TROVARCI IN UNA RETTA (1 DIMENSIONE) E DI AVERE UN SISTEMA FORMATO DA 2 PARTICELLE, IL CENTRO DI MASSA SARÀ COSÌ DEFINITO:



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

SI OSSERVI CHE A SECONDA CHE m_1 O m_2 SIANO PIÙ MASSICCE IL CENTRO DI MASSA SARÀ PIÙ VICINO AL CORPO CON MASSA MAIORE. NEL CASO PIÙ GENERALE IN CUI DIVIDIAMO IL SISTEMA IN N PARTICELLE IN UN PIANO O IN UNO SPAZIO PER TROVARE IL CENTRO DI MASSA DOVREMO:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

CI ACCORGIAMO SUBITO, PERÒ, CHE LA STRATEGIA DELLE SOMMATORIE NON È SOSTENIBILE SE PENSIAMO AL NUMERO DI PARTICELLE CHE DOVREMO CONSIDERARE PER UN OGGETTO QUALSIASI.

SE DECIDIAMO DI CONSIDERARE QUESTI CORPI COME DISTRIBUZIONI CONTINUE DI MATERIA ALLORA LE PARTICELLE DIVENTERANNO OGGETTI DI MASSA dm E LE SOMMATORIE DIVENTERANNO INTEGRALE, PERTANTO:

$$\vec{r}_{com} = \frac{\int_0^M \vec{r} dm}{M} \quad [0]$$

DOVE M È LA MASSA DEL SISTEMA.

NONOSTANTE QUESTI CAMBIAMENTI RISULTA ANCORA DIFFICILE CALCOLARE QUESTI INTEGRALE, È PER QUESTO MOTIVO CHE CONSIDEREREMO DEI CORPI **UNIFORMI**, COSÌ CHE HANNO DENSITÀ COSTANTE PER OGNI ELEMENTO DEL CORPO COME PER L'INTERO OGGETTO. AVREMO QUINDI:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \quad [1]$$

DOVE dV È IL VOLUME OCCUPATO DALLA PARTICELLA DI MASSA dm .

MODIFICANDO OPPORTUNAMENTE LA [1] POSSIAMO SOSTITUIRE NELLA [0]:

$$\vec{r}_{com} = \frac{\int \frac{M}{V} \cdot dV \cdot \vec{r}}{M} = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV$$

SI OSSERVI CHE NEL CASO IN CUI LA DENSITÀ NON FOSSE STATA UNIFORME SI AVREBBE OTTENUTO:

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

DOVE ρ È CALCOLATA IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE DELLA PARTICELLA.

NEL CASO DI OGGETTI BIDIMENSIONALI INTRODUCIAMO UNA **MANDELLA** DEL TUTTO ANALOGA A ρ CHE CHIAMEREMO **DENSITÀ SUPERFICIALE** E INDICHEREMO CON $\sigma \left(= \frac{m}{\Sigma} \right)$, PERTANTO RICAVEREMO IL CENTRO DI MASSA DI QUESTI OGGETTI CON:

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \sigma(\vec{r}) d\Sigma \rightarrow \text{SUPERFICIE}$$

ANCHE QUI CONSIDERIAMO UN CORPO NON UNIFORME (DENSITÀ SUPERFICIALE NON COSTANTE).

NEL CASO DI OGGETTI MONODIMENSIONALI INTRODUCIAMO LA **DENSITÀ LINEARE**, CHE INDICHEREMO CON $\lambda \left(= \frac{m}{\gamma} \right)$ E CI PERMETTERÀ DI CALCOLARE LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA COME:

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \lambda(\vec{r}) d\gamma \rightarrow \text{CURVA}$$

IN TUTTI QUESTI CASI GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE SONO GLI ESTREMI DEL CORPO CHE STIAMO CONSIDERANDO.

ESEMPIO

PROVIAMO A CALCOLARE IL CENTRO DI MASSA DI UNA SBARRA UNIFORME DI DENSITÀ LINEARE $\lambda = M/L$:

$$x_{com} = \frac{1}{M} \int_0^L x \cdot \lambda dx = \frac{1}{M} \cdot \lambda \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{1}{M} \cdot \lambda \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{1}{M} \cdot \frac{L^2}{2}$$

COME CI ASPETTAVAMO IL CENTRO DI MASSA SI TROVA AL CENTRO DELLA SBARRA.

MOTO DEL CENTRO DI MASSA

CERCHIAMO ORA DI CAPIRE DA COSA DIPENDE IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA. ANZITUTTO POSSIAMO DIRE CHE:

$$M \cdot \vec{r}_{cm} = m_1 \cdot \vec{r}_1 + \dots = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i = \left(M \cdot \frac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \right)$$

DA CUI, DERIVANDO 2 VOLTE OTTENIAMO:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots = \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$$

E PER LA 2° LEGGE DI NEWTON SAPPIAMO CHE $m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i$, DUNQUE,

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA È DETERMINATO DALLE FORZE AGENTI SULLE PARTICELLE DEL SISTEMA, CHE DIVIDEREMO IN:

- FORZE INTERNE, CIÒ ESEERCITATE DA ALTRE PARTICELLE DEL SISTEMA.
- FORZE ESTERNE, CIÒ ESEERCITATE DA AGENTI ESTERNI AL SISTEMA.

IN SOSTANZA AVREMO:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_{i,INT} + \sum_i \vec{F}_{i,EST} = \sum_i \vec{F}_{i,EST}$$

MA POICHÉ PER IL 3° PRINCIPIO DELLA DINAMICA LA SOMMA DELLE FORZE INTERNE È 0, SI AVrà CHE IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA SARà UNICAMENTE DETERMINATO DALLA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE.

ESEMPIO

SE CONSIDERIAMO UNA CHIAVE INGLESE IN MOTO ROTOTRASCATORIO CI POSSIAMO ACCORGERE DELLA PRESENZA DI UN PUNTO (IL CENTRO DI MASSA) CHE SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME IN QUANTO LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È NULLA

QUANTITÀ DI MOTO

QUELLO CHE VEDREMO ORA È UN CONCETTO CHE ABBIAMO GIÀ INTRODOTTO IN PRECEDENZA, L'ABBIAMO DEFINITA COME:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

DA CUI NE DERIVIAMO CHE LA QUANTITÀ DI MOTO HA LO STESSO VERSO E DIREZIONE DELLA VELOCITÀ, E CI PERMETTE ANCHE DI RIFORMULARE LA 2° LEGGE DELLA DINAMICA COME:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ASSUMENDO m COSTANTE POSSIAMO ESPRIMERE LA FORZA RISULTANTE IN UN CORPO ($m \cdot \vec{a}$) COME LA VARIANONE DELLA SUA QUANTITÀ DI MOTO.

NEL CASO IN CUI CI FOSSERO PIÙ PARTICELLE NEL SISTEMA CI INTROVEREMO NELLA SEGUENTE SITUAZIONE:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

SAREBBE BELLO POTER ESPRIMERE LA QUANTITÀ DI MOTO DI UN SISTEMA DI PARTICELLE IN FUNZIONE DELLA MASSA DEL SISTEMA E DELLA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA. DOBBIAMO PERÒ CALCOLARE QUESTE DUE GRANDEZZE, LA PRIMA È IMBENATA:

$$M = \sum_i m_i$$

PER LA SECONDA BISOLVA LAVORARE UN PÒ DI PIÙ:

$$V_{cm} = \frac{d}{dt} x_{cm} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \right) = \frac{\sum_i m_i \frac{dx_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \cdot v_i$$

DOVE IL 3° PASSAGGIO È GIUSTIFICATO DAL TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO

IL SEGNO DI ~~INDEFINITO~~ DERIVATA.

IL RISULTATO È IL SEGUENTE:

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M \cdot \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}_{cm}$$

DA CUI SI PUÒ FACILMENTE RICAVARE CHE:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M \cdot \vec{v}_{cm})}{dt} = M \cdot \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{EXT}$$

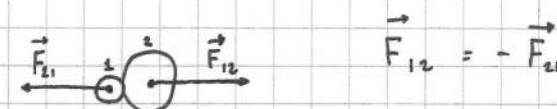
CHE SIGNIFICA CHE IN ASSENZA DI FORZE ESTERNE LA QUANTITÀ DI MOTO $\vec{P}$ È CONSERVATA E PUÒ ESSERE MODIFICATA SOLO DA QUESTE ULTIME.

SE INFATTI $\vec{F}_{EXT} = 0$ ALLORA LA DERIVATA DELLA QUANTITÀ DI MOTO È NULLA E LA QUANTITÀ DI MOTO È COSTANTE.

COLLISIONI

QUANDO SI PARLA DI COLLISIONI TRA OGGETTI OCCORRE FARE UN'IMPORTANTE PREMESSA, DURANTE L'URTO LE FORZE DI INTERAZIONE TRA GLI OGGETTI SONO COSÌ INTENSE DA RENDERE TRASCURABILI LE RESTANTI FORZE ESTERNE.

DA QUESTO SEMPLICE RAGIONAMENTO POSSIAMO CONCLUDERE CHE IN BASE AL 3° PRINCIPIO DELLA DINAMICA LE FORZE DI INTERAZIONE TRA I CORPI DEVONO ESSERE PARI IN MODULO E OPPOSITE IN VERSO, RENDENDO NULLA LA RISULTANTE E COSTANTE LA QUANTITÀ DI MOTO DURANTE LA COLLISIONE (SI CONSERVA IN QUALUNQUE TIPO DI URTO):



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

SUPPONIAMO DI AVERE UN URTO TRA DUE MASSE SU DI UNA RETTA, CHIAMIAMO m_1 E m_2 LE MASSE, v_{1i} E v_{2i} LE VELOCITÀ INIZIALI E v_{1f} E v_{2f} LE VELOCITÀ FINALI. PER LA CONSERVAZIONE ~~DELLA~~ DELLA QUANTITÀ DI MOTO AVREMO:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

TALE RELAZIONE PERÒ NON È SUFFICIENTE A STABILIRE QUALI SIANO LE VELOCITÀ FINALI.

INTRODUCIAMO QUINDI 2 TIPI DI URTI, CON PARTICOLARI CARATTERISTICHE CHE CI PERMETTERANNO DI RICAVARE LE VELOCITÀ FINALI DATE QUELLE INIZIALI.

COLLISIONI PERFETTAMENTE ANELASTICHE

IN QUESTO PARTICOLARE TIPO DI COLLISIONE LE PARTICELLE, DOPO L'URTO, RIMANONO ATTACCHATE (QUINDI IN FORMULE $v_{1f} = v_{2f}$). IL CHE CI PERMETTE DI SCRIVERE:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

A PIÙ DIMENSIONI ANCHE CONSIDERARE DEI PUNTI SU UNA RETTA SI CONSIDERANO DEI VETTORI NELLO SPAZIO ($V \rightsquigarrow \vec{V}$).

PER QUANTO RIGUARDA L'ENERGIA CINETICA NELL'URTO ANELASTICO AVREMO:

$$K_i = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2m_1} (m_1 v_1)^2 = \frac{p^2}{2m_1} \quad \text{si conserva}$$

$$K_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2(m_1 + m_2)} (m_1 + m_2)^2 (v_f)^2 = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)}$$

PER SEMPLICITÀ CI SIAMO POSTI NEL CASO IN CUI $v_2 = 0$ (IL SECONDO CORPO È FERMO) E ABBIAMO CONCLUSO CHE $K_f < K_i$; POICHÉ PARTE DI QUELL'ENERGIA VIENE TRASFORMATA IN ENERGIA TERMICA.

COLLISIONI PERFETTAMENTE ELASTICHE

IN QUEST'ALTRO TIPO DI URTI I DUE CORPI NON RIMARRANNO ATTACCATI MA IN COMPENSO SI CONSERVERÀ L'ENERGIA CINETICA (OLTRE ALLA QUANTITÀ DI MOTO).

CI INTROVEREMO QUINDI NELLA SEGUENTE SITUAZIONE:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 (v_1 - w_1) = -m_2 (v_2 - w_2) \\ m_1 (v_1 + w_1)(v_1 - w_1) = -m_2 (v_2 + w_2)(v_2 - w_2) \end{cases}$$

DIVIDENDO LA PRIMA PER LA SECONDA AVREMO:

$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2$$

CON LA QUALE SARÀ SEMPLICISSIMO TROVARE w_1 E w_2 (LE VELOCITÀ FINALI):

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - w_1) = -m_2 (v_2 - v_1 - w_1 + v_2) \\ m_1 (v_1 + v_1 - v_2 - w_2) = -m_2 (-w_2 + v_2) \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 v_1 - m_1 w_1 = 2m_2 v_2 + m_2 v_1 + m_2 w_1 \\ 2m_1 v_1 - m_1 v_2 - m_1 w_1 = -m_2 w_2 - m_2 v_2 \end{cases}$$

DA CUI INFINE AVREMO:

$$w_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + (2m_2) v_2}{m_1 + m_2}$$

$$w_2 = \frac{(2m_1) v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$$

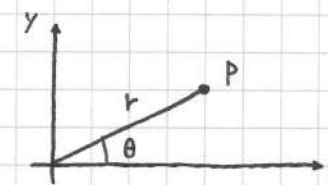
~~NON SI CONSERVA~~

~~MALE I URTI ELASTICI SI CONSERVA QUANTITÀ DI MOTO E ENERGIA CINETICA, IN QUELLO ANELASTICO~~

DINAMICA ROTAZIONALE

POSIZIONE ANGOLARE

PER DESCRIVERE LA POSIZIONE ANGOLARE DI UN OGGETTO CI RIFAREMO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO POLARE (VISTO IN ANALISI) CHE PREVEDE 2 INFORMAZIONI PER RAPPRESENTARE UN PUNTO NELLO SPAZIO: IL RAGGIO E L'ANGOLO RISPETTO AD UN ASSE.



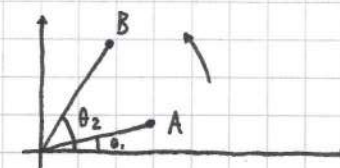
$$P = (r, \theta)$$

DURANTE IL MOVIMENTO DELLA PARTICELLA L'UNICA VARIABILE CHE CAMBIA È L'ANGOLO θ . SE L'OGGETTO RUOTA DI θ PERCORRE UN ARCO DI LUNGHEZZA RAGGI A:

$$s = r \cdot \theta$$

SPOSTAMENTO ANGOLARE

DEFINIAMO LO SPOSTAMENTO ANGOLARE COME L'ANGOLO DI ROTAZIONE DELL'OGGETTO IN UN ARCO DI TEMPO FINITO.



$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$

VELOCITÀ ANGOLARE

ANZITUTTO DEFINIAMO LA VELOCITÀ ANGOLARE **MEDIA** COME IL RAPPORTO FRA L'ANGOLO SPAZZATO E L'ARCO DI TEMPO NEL QUALE È AVVENUTO QUESTO SPOSTAMENTO ANGOLARE:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

LA VELOCITÀ ANGOLARE **ISTANTANEA** NON SARÀ ALTRO CHE IL LIMITE PER $\Delta t \rightarrow 0$ (INTERVALLO DI TEMPO) DELLA VELOCITÀ ANGOLARE MEDIA:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{t_f \rightarrow t_i} \frac{\theta(t_f) - \theta(t_i)}{t_f - t_i}$$

ALTRO NON SARÀ CHE LA DERIVATA DI $\theta(t)$ CALCOLATA RISPETTO AL TEMPO:

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

INUNQUE LA VELOCITÀ ANGOLARE È POSITIVA QUANDO L'ANGOLO SPAZZATO È POSITIVO (CIOÈ CI SI MUOVE IN SENSO ORARIO) E NEGATIVA ALTRIMENTI.

ACCELERAZIONE ANGOLARE

SIMILMENTE A QUANTO ABBIAMO FATTO PER LA VELOCITÀ DEFINIAMO L'ACCELERAZIONE ANGLE COME IL RAPPORTO FRA VARIAZIONE DI VELOCITÀ ANGOLARE E INTERVALLO DI VARIAZIONE:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

PER CALCOLARE L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA FAREMO TENDERE $t_f \rightarrow t_i$, OTTENENDO:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \lim_{t_f \rightarrow t_i} \frac{\omega(t_f) - \omega(t_i)}{t_f - t_i}$$

E QUINDI, IN CONCLUSIONE:

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \theta(t)$$

ACCELERAZIONE E VELOCITÀ TANGENZIALI

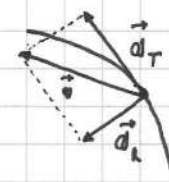
STUDIANDO IL MOTO DI UN CORPO IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME CI È GIÀ CAPITATO DI OSSERVARE CHE LA VELOCITÀ SARÀ SEMPRE TANGENTE AL PERCORSO, PER CUI SE IL NOSTRO ACCELERAZIONE AVREMO:

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \alpha$$

CONSIDERANDO ANCHE LA COMPONENTE RADIALE:

$$a_R = a_c = r \omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

AVREMO CHE IL MODULO DELL'ACCELERAZIONE RISULTANTE SARÀ:

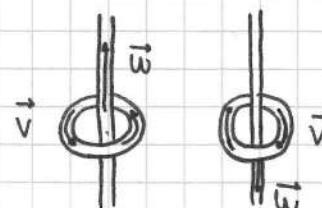


$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} = r \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

ACCELERAZIONE E VELOCITÀ ANGOLARE COME VETTORI

LA VELOCITÀ ANGOLARE, COME ABBIAMO GIÀ VISTO, PUÒ ESSERE ESPRESSA COME UN VETTORE IL CUI VERSO È DETERMINATO DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA.

L'ACCELERAZIONE ANGOLARE AVRÀ LO STESSO VERSO DELLA VELOCITÀ ANGOLARE SE QUEST'ULTIMA AUMENTERÀ, MENTRE AVRÀ VERSO OPPOSTO SE LA VELOCITÀ ANGOLARE DIMINUIRÀ.



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

CINEMATICA ROTAZIONALE

DEFINIAMO ORA LE STESSA EQUAZIONI CHE ABBIAMO DATO STUDIANDO IL MOTO LINEARE DI UN CORPO NEL CASO DI UN MOTO CIRCOLARE CON ACCELERAZIONE ANGOLARE COSTANTE:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

SI NOTI CHE I PUNTI DI UN CORPO ROTANTE HANNO STESSO MOTO ANGOLARE E DIVERSO MOTO LINEARE.

ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE

DEFINIAMO ORA L'ANALOGO ROTAZIONALE DELL'ENERGIA CINETICA.

CONSIDERIAMO UN CORPO RUOTANTE CON VELOCITÀ ANGOLARE ω , OGNI PARTICELLA DEL CORPO AVRÀ ENERGIA CINETICA:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

DOVE $v_i = \omega r_{\perp i}$ ($r_{\perp i}$ È LA DISTANZA DALL'ASSE DI ROTAZIONE), QUINDI L'ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE SARÀ LA SOMMA DI TUTTE QUESTE ENERGIE E VARrà:

$$\begin{aligned} K_R &= \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_{\perp i}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_{\perp i}^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

DOVE I È GENERALMENTE NOTO COME **MOMENTO D'INERZIA**.

POSSIAMO VEDERLO COME L'ANALOGO ROTAZIONALE DELL'ENERGIA TRASLACIONALE (MASSA).

MOMENTO DI INERZIA

ABBIAMO APPENA DEFINITO IL MOMENTO DI INERZIA COME:

$$I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$$

POSSIAMO PASSARE ALL'INTEGRALE SE CONSIDERIAMO UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI PUNTI:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 = \int r_{\perp}^2 dm$$

COME NEL CASO DEL CENTRO DI MASSA GLI INTEGRALE SPESSO SONO DIFFICILI, A MENO DI CONSIDERARE IL CORPO COME UNIFORME (DENSITÀ COSTANTE), IN TAL CASO L'INTEGRALE DI MASSA SI TRASFORMEREBBE IN UN INTEGRALE DI VOLUME CHE DI SOLITO È PIÙ SEMPLICE DA TRATTARE.

ESEMPIO:

PROVIAMO A CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA DI UN CILINDRO CAVO RISPETTO AL SUO ASSE CENTRALE



$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

È LA MASSA DI UN CILINDRO DI SPESORE INFINITESIMO (dr) + r

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot 2\pi r L \cdot dr$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R r^2 [\rho (2\pi r L) dr] = \int_0^R r^2 \cdot \frac{M}{\pi R^2 L} \cdot 2\pi r L dr \\ &= \int_0^R r^3 \cdot \frac{M 2}{R^2} dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \\ &= \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$

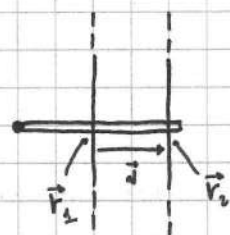
TEOREMA SUL MOMENTO D'INERZIA

IL TEOREMA Afferma che il momento di inerzia I di un corpo di massa M rispetto ad un certo asse è dato da:

$$I = I_{cm} + M d^2$$

DOVE I_{cm} è il momento di inerzia calcolato rispetto al centro di massa e I è il momento di inerzia calcolato rispetto ad un asse parallelo a quello usato per trovare il I_{cm} e distante d da esso.

PROVIAMO A DIMOSTRARE QUESTO FATTO; AIUTANDOCI CON UN DISSEGNO:



$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{d})_{\perp}^2 \\ &= \sum_i m_i r_{i\perp}^2 + \sum_i m_i d_{\perp}^2 + 2 \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{d} \end{aligned}$$

OSSERVIAMO PERÒ CHE PONENDO IL CENTRO DI MASSA SULL'ORIGINALE AVREMO:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = 0 \Rightarrow \sum m_i \vec{r}_i = 0$$

DUNQUE IL TERZO TERMINE VA A 0 E DUNQUE OTTERREMO:

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 + \sum_i m_i d_{\perp}^2 = I_{cm} + M \cdot d^2$$

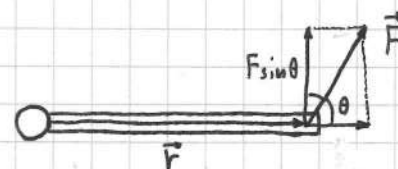
MOMENTO DI UNA FORZA

ABBIAMO VISTO CHE LA FORZA È IN GRADO DI FAR VARIARE IL MOTO DI UN CORPO, MA COSA FA VARIARE LA ROTAZIONE (PER INTENSIFICARLA O LA SUA INTENSITÀ O IL SENSO DELLA ROTAZIONE) È LA GRANDEZZA CHE INTRODUCIAMO ORA; IL **MOMENTO** DI UNA FORZA.

DEFINIAMO IL MOMENTO $\vec{\tau}$ DI UNA FORZA $\vec{F}$ COME:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

DOVE $\vec{r}$ È IL VETTORE CHE CONGIUNGE L'ORIGINALE (TIPICAMENTE SULL'ASSE DI ROTAZIONE) E IL PUNTO DOVE VIENE APPLICATA $\vec{F}$.



POSSIAMO DEFINIRE APPROSSIMATIVAMENTE IL MOMENTO COME LA TENDENZA DI UNA FORZA A FAR RUOTARE ATTORNO AD UN ASSE UN CORPO

DALLA DEFINIZIONE DI MOMENTO CAPIAMO CHE A PRODURRE MOMENTO È LA COMPONENTE DI $\vec{F}$ LUNGO LA DIREZIONE PERPENDICOLARE A $\vec{r}$, CHE VIENE CHIAMATO **BRACCIO DELLA LEVA**.

NONOSTANTE $N \cdot m$ SIA LA STESSA UNITÀ DI MISURA DEL LAVORO NON LO SI ESNUMERA MA IN JOULE.

OSSERVIAMO ANCHE CHE IL MOMENTO RESULTANTE O TOTALE AGENTE SU UN CORPO È LA SOMMA DEI VETTORI MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE:

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

NEL CASO IN CUI LA SOMMA DELLE FORZE ESTERNE ALLORA IL MOMENTO TOTALE NON DIPENDEREBBE NÉ DALL'ORIGINALE SCELTA.

SE 2 FORZE OPPOSITE E PARALLELE VENGONO APPLICATE AD UNA DISTANZA d SI PARLA DI **COPPIA DI FORZE**, ESSA HA MOMENTO $\tau_c = F \cdot d$ E NON PROVOCA ALCUNO SPOSTAMENTO DEL CENTRO DI MASSA

EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

DIVERSAMENTE DA QUANTO ABBIAMO VISTO PER IL ~~CORPO~~ PUNTO, DOVE L'UNICA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO ERA:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

ORA, PER IL CORPO RIGIDO, DOBBIAMO IMPORRE ANCHE UNA ROTAZIONE NULLA, DUNQUE LA NUOVA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO SI AVRÀ SE:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

MOMENTO ANGOLARE

ABBIAMO DETTO CHE IL MOMENTO DI UNA FORZA È L'ANALOGO ROTAZIONALE DELLA FORZA, PROCEDENDO CON QUESTE ANALOGIE DERIVIAMO L'ANALOGO ROTAZIONALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO: IL **MOMENTO ANGOLARE**.

VERRÀ COSÌ DEFINITO:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

DOVE $\vec{p} = m\vec{v}$ È LA QUANTITÀ DI MOTO DELLA PARTICELLA.

PRECEDENTEMENTE ABBIAMO DERIVATO L'ESPRESSIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER L'UNICA LA SECONDA LEGGE DI NEWTON, PROCEDIAMO ALLO STESSO MODO:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \frac{1}{m} (\vec{p} \times \vec{p}) + \vec{r} \times \vec{F} = \frac{1}{m} (p \cdot p \cdot \sin 0) + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \end{aligned}$$

DUNQUE L'ANALOGO ROTAZIONALE DELLA 2ª LEGGE DI NEWTON È, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$

DOVE $\vec{\tau}$ E $\vec{L}$ SONO CALCOLATI RISPETTO ALLA STESSA ORIGIN E ALLI STESSI ASSI.

ANALOGAMENTE A QUANTO FATTO PER LA QUANTITÀ DI MOTO AVREMO CHE IL MOMENTO ANGOLARE DI UN SISTEMA DI PARTICELLE È DATO DALLA SOMMA DEI VETTORI MOMENTO ANGOLARE DI OGNI PARTICELLA:

$$\vec{L}_{\text{TOT}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum_i \vec{L}_i$$

DIFFERENZIANDO RISPETTO AL TEMPO OTTIENIAMO:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{TOT}}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{\text{TOT}}$$

MOMENTO ANGOLARE DI UN CORPO RIGIDO

CONSIDERIAMO UN DISCO CHE RUOTA CON VELOCITÀ ω , AVREMO CHE IN QUESTO CASO IL MOMENTO ANGOLARE SARÀ:

$$\begin{aligned} L &= \sum_i L_i = \sum_i m_i v_i r_{i\perp} = \sum_i m_i \omega \cdot r_{i\perp} \cdot r_{i\perp} \\ &= \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \omega = I \cdot \omega \end{aligned}$$

CON I MOMENTO D'INERZIA DEL DISCO ATTORNO ALL'ASSE DI ROTAZIONE.

È DIMOSTRABILE CHE QUESTA RELAZIONE PUÒ ESSERE SCRITTA IN FORMA VETTORIALE:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

MA DUNQUE ABBIAMO CHE:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha}$$

ASSUNTA I COSTANTE.

CONSERVAZIONE MOMENTO ANGOLARE

COME PER LA QUANTITÀ DI MOTO, COSTANTE QUANDO LA SOMMA DELLE FORZE ESTERNE È NULLA, IL MOMENTO ANGOLARE È COSTANTE QUANDO LA SOMMA DEL MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE È NULLO.

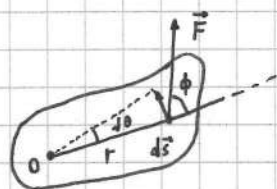
CIÒ VALE ANCHE SE DOVESSE VARIARE I O ω , INFATTI AVREMO:

$$L_{\text{cost}} = I_f \cdot \omega_f = I_i \cdot \omega_i$$

LAVORO E POTENZA NEL MOTO ROTAZIONALE

COLLOCHIAMO ORA IL LAVORO FATTO DA UNA FORZA IN UN CORPO CHE STA RUOTANDO:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \overbrace{(F \cdot \sin \theta)}^{\tau} \cdot (r \cdot d\theta) = \tau d\theta$$



COME PER IL MOTO LINEARE RIVEDIAMO IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA PER IL MOTO ROTAZIONALE:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I \alpha d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \alpha d\left(\frac{\omega}{r}\right) \\ &= \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \frac{\alpha}{r} d\omega = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega d\omega \\ &= I \left[\frac{\omega^2}{2} \right]_{\omega_i}^{\omega_f} = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = \Delta K_R \end{aligned}$$

IN PRESENZA DI MOTO ROTO-TRASLATORIO AVREMO:

$$W = \Delta K + \Delta K_R$$

DEFINIAMO INVECE LA POTENZA COME IL LAVORO FATTO PER UNITÀ DI TEMPO,

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\tau \theta)}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega$$

MOTO DI ROTOLAMENTO PURO

DEFINIAMO QUESTO NUOVO TIPO DI MOTO COME QUELLO DI UN CORPO CHE ROTOLA SENZA STRUSCIARE, IN ALTRE PAROLE IL PUNTO DI CONTATTO TRA IL CORPO E IL SUOLO DEVE AVERE VELOCITÀ NULLA (OVVIAMENTE SI PARLA DI VELOCITÀ ISTANTANEA).

SI PUÒ ANCHE PENSARE COME UN MOTO DI ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE



PASSANTE PER IL PUNTO P, O ANCORA COME UN MOTO DI TRASLAZIONE DEL CENTRO DI MASSA (A VELOCITÀ COSTANTE) E MOTO ROTATORIO DEL CORPO

A ~~VEL~~ A VELOCITÀ ANGOLARE ω ATTORNO AL CENTRO DI MASSA.

È FACILE OSSERVARE CHE, DATE QUESTE DEFINIZIONI VALGONO:

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \alpha$$

PROVIAMO ORA AD ANALIZZARE LA TRAIETTORIA DEL PUNTO P DURANTE IL MOTO:



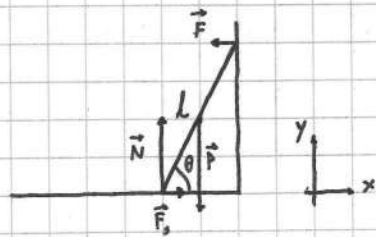
ESSA VIENE CHIAMATA CICLOIDE E HA LA CARATTERISTICA DI TENDERE AD UNA RETTA VERTICALE NEI PUNTI 0, 1, 2, 3.

CIÒ SIGNIFICA CHE SE VOLESSIMO CALCOLARE IL LAVORO SVOLTO DALLA FORZA DI ATTITO SUL CORPO (SENZA ATTITO C'È SCIVOLAMENTO) OTTERREMO 0 COME RISULTATO, QUESTO PERCHÉ LA FORZA DI ATTITO AVREBBE SUL PUNTO P E A ESSO AVREBBE

SEMPRE SPOSTAMENTO VERTICALE (IL PUNTO P CAMBIA DI CONTINUO), PARTENDO A
O IL PRODOTTO VETTORIALE TRA $\vec{F}_{\text{ATT}}$ E $d\vec{r}$

ESERCIZIO:

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE SITUAZIONE:



PER IMPOSTARE L'EQUILIBRIO DI QUESTA SCALA DOBBIAMO FAR SÌ CHE LA RISULTANTE
DEI MOMENTI E LA RISULTANTE DELLE FORZE SIANO NULLE.

$$\sum \vec{F} = \begin{cases} N - P = 0 \\ F_s - F = 0 \end{cases} = \begin{cases} N = mg \\ F_s = F \end{cases} = \begin{cases} N = mg \\ F \leq \underbrace{mg \mu_s}_{F_{s \text{ MAX}}} \end{cases}$$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{1}{2} l P \cos \theta - l F \sin \theta = 0$$

PER TROVARE L'ANGOLO MASSIMO DI EQUILIBRIO POSSIAMO PORCI NEL CASO PEGGIORE, CIOÈ
QUELLO IN CUI $F = F_{s \text{ MAX}}$:

$$\frac{1}{2} l P \cos \theta - l mg \mu_s \sin \theta = 0$$

$$\frac{1}{2} l mg \cos \theta - l mg \mu_s \sin \theta = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_s} = \tan \theta$$

$$\theta_{\text{max}} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2 \mu_s} \right)$$

MOMENTO DELLE FORZE GRAVITAZIONALI

SI NOTA SUBITO CHE IN UN CORPO RIGIDO LA FORZA DI GRAVITÀ AGISCE SU
OGNI PARTICELLA, E SE IL CORPO È IN ROTOLAMENTO (O COMUNQUE HA UN
ASSE DI ROTAZIONE) ALLORA LA FORZA DI GRAVITÀ PRODUCE UN MOMENTO.
CALCOLARLO POTREBBE SEMBRARE DIFFICILE MA OSSERVIAMO CHE:

$$\vec{\tau} = \sum_i (\vec{g} \cdot m_i) \times \vec{r}_i = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} \quad [1]$$

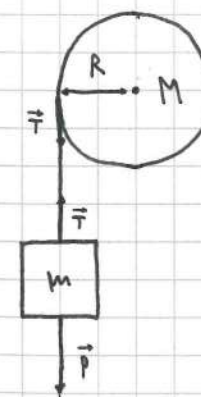
QUESTO PER DEFINIZIONE, DA QUI È SEMPLICE SFRUTTARE LA DEFINIZIONE DI CENTRO
DI MASSA PER OTTENERE:

$$\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \vec{r}_{\text{cm}} \Leftrightarrow \sum m_i \vec{r}_i = \vec{r}_{\text{cm}} \sum m_i \Leftrightarrow \sum m_i \vec{r}_i = \vec{r}_{\text{cm}} M$$

A QUESTO PUNTO, SOSTITUENDO NELLA [1] AVREMO:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{\text{cm}} \times (M \vec{g})$$

ESERCIZIO:



PROVIAMO A TROVARE IL VALORE DELLA TENSIONE T.

DAL MOMENTO TORCENTE $\tau = I \alpha = T R$ RICAVIAMO:

$$T = \frac{I \alpha}{R} \Leftrightarrow \alpha = \frac{T R^2}{I}$$

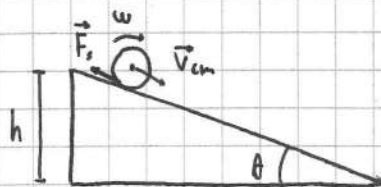
DAL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA ABBIAMO:

$$m a = P - T \Leftrightarrow a = \frac{P - T}{m} \Leftrightarrow a = \frac{mg - T}{m} = \frac{T R^2}{I}$$

È IMMEDIATO CONCLUDERE CHE $T = \frac{I m g}{m R^2 + I}$

ENERGIA CINETICA DI UN CORPO CHE ROTOLA

CONSIDERIAMO UN CILINDRO CHE ROTOLA GIÙ DA UN PIANO INCLINATO:



L'ENERGIA CINETICA FINALE SARÀ DATA DALLA SOMMA DI QUELLA ROTAZIONALE E DI QUELLA TRASLATIONALE:

$$K = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \omega^2 = \frac{7}{10} M v^2$$

ORA, SE VOLESSIMO CALCOLARE LA VELOCITÀ FINALE DOVREMO APPLICARE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA, CON L'ACCORDO DI ARRIVARE R ALL'ALTEZZA CALCOLATE PER L'ENERGIA POTENZIALE (SI CONSIDERA IL CENTRO DI MASSA):

$$U_i = K_f + U_f$$

$$M g (h + R) = \frac{7}{10} M v^2 + M g (R)$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} g h}$$

DAVE v È LA VELOCITÀ FINALE DEL CENTRO DI MASSA.

SI POSSONO CONSIDERARE ANCHE SOLO LE FORZE AGENTI SUL CORPO.

LUNGO IL PIANO AVREMO: $M a = M g \sin \theta - F_s$; PER QUANTO RIGUARDA I MOMENTI

AVREMO: $\tau = I \left(\frac{a}{R} \right) = R \cdot F_s$. DA CUI SI HA:

$$M g \sin \theta - M a = \frac{2}{5} M R \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{5}{7} g \sin \theta \quad (\text{CON QUESTA SI TROVA SUBITO } v_f)$$

ENERGIA POTENZIALE DI UN CORPO CHE ROTOLA

L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE DI UN CORPO CHE ROTOLA È LA STESSA DI QUELLA CHE CALCOLEREMMO CONSIDERANDO IL CORPO COME UNIFORME E CONCENTRATO NEL SUO CENTRO DI MASSA.

QUESTO FATTO È FACILE DA VERIFICARE:

$$\begin{aligned} U &= \sum_i m_i g h_i = g \left(\sum_i m_i h_i \right) = g \left(\frac{\sum_i m_i h_i}{\sum_i m_i} \right) \cdot \sum_i m_i \\ &= g h_{cm} \cdot \sum_i m_i = M g h_{cm} \end{aligned}$$

FLUIDI

FINO AD ORA, A PARTE QUALCHE PICCOLO ACCENNO, ABBIAMO PARLATO E ABBIAMO STUDIATO LE PROPRIETÀ DEI CORPI SOLIDI, CARATTERIZZATI DA UNA FORMA PROPRIA E (IN LINEA DI MASSIMA) NON DEFORMABILE.

IN QUESTO CAPITOLO STUDIEREMO IL MONDO DEI FLUIDI, CIOÈ SOSTANZE CHE ~~NON~~ SI ADATTANO ALLA FORMA DEL RECIPIENTE IN QUANTO INCAPACI DI OPPORRE RESISTENZA A FORZE APPLICATE TANGENZIALMENTE (BASTA CHE CI ENTRINO IN CONTATTO VIBRA) ALLA LORO SUPERFICIE.

POSSIAMO ASSUMERE CHE SIANO INCOMPRESSIBILI (NON COMPLETAMENTE IGNO).

LA DENSITÀ

INTRODUCIAMO QUESTO CONCETTO CHE CI DOVREBBE ESSERE GIÀ FAMILIARE COME:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

NELL'UNIVERSO SI POSSONO AVERE OGGETTI DI DENSITÀ $10^{-20} \frac{kg}{m^3}$ (SPAZIO INTERSTELLARE) O ANCHE $10^{19} \frac{kg}{m^3}$ (BUCHI NERI).

INDICHEREMO LA DENSITÀ CON ρ (RO).

LA PRESSIONE

LA PRESSIONE È DEFINITA COME IL RAPPORTO TRA LA FORZA E L'AREA DELLA SUPERFICIE SULLA QUALE È APPLICATA:

$$P = \frac{F}{A}$$

I FLUIDI HANNO LA CAPACITÀ DI EGALITARE LA STESSA PRESSIONE IN OGNI DIREZIONE CON LA STESSA INTENSITÀ.

LA MISUREMO IN PASCAL (Pa), LA PRESSIONE ATMOSFERICA VALE:

$$1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Vittorio Alzetta

ESERCIZIO:

PROVIAMO A CALCOLARE IL PESO DELL'ARIA CONTENUTA IN UNA STANZA DI DIMENSIONI $(3,5 \times 4,2 \times 2,4) \text{ m}$ SAPENDO CHE A 1 bar LA DENSITÀ DELL'ARIA È $1,21 \text{ kg/m}^3$:

$$P = m \cdot g = (\rho \cdot V) \cdot g = (3,5 \cdot 4,2 \cdot 2,4) \text{ m}^3 \cdot 1,21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ = 418 \text{ N}$$

COME ABBIAMO DETTO PER LA DENSITÀ, NELL'UNIVERSO CI SONO OGGETTI CON PRESSIONI NOTEVOLMENTE DIVERSE, AD ESEMPIO 10^{16} (CENTRO DEL SOLE) E 10^{-12} (MIGLIAIO VUOTO FATTO IN LABORATORIO).

TIPI DI FLUIDO E LORO CARATTERISTICHE

DI UN FLUIDO DEFINIREMO IN OGNI PUNTO LA DENSITÀ, LA PRESSIONE E LA VELOCITÀ.

SE LA DENSITÀ DOVESSE ESSERE COSTANTE PARLEREMO DI FLUIDO **OMogeneo**.

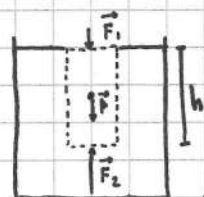
SE DOVESSE ESSERCI FORZE DISSIPATIVE (BANALMENTE L'ATTRITO) PARLEREMO DI FLUIDO **viscoso**.

MENTRE, SE NON CI DOVESSE ESSERE FORZE DISSIPATIVE E LA DENSITÀ RIMANESSE COSTANTE SI PARLEREBBE DI FLUIDO **ideale**.

PRESSIONE IDROSTATICA

SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE LA PRESSIONE A CUI SAREBBE SOTTOPOSTO UN CORPO IMMERSO IN ACQUA (O IN UN QUALUNQUE ALTRO FLUIDO) ALLA PROFONDITÀ h DAL PELO DEL FLUIDO.

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SCHEMA:



HO DISEGNATO LE FORZE CHE AGISCONO SU UN IMMAGINARIO BLOCCETTO D'ACQUA CHE HA ALTEZZA FINO ALLA PROFONDITÀ h .

ESSO È IN EQUILIBRIO, PERTANTO LA RISULTANTE DELLE FORZE DEVE ESSERE NULLA:

$$F_2 - F_1 = P$$

OSSERVIAMO CHE SE IL FLUIDO È OMogeneo $M = \rho \cdot V$ (CON ρ DENSITÀ DEL FLUIDO)

E $V = A \cdot h$, DA CUI È SEMPLICE RICAVARE:

$$P_2 \cdot A - P_1 \cdot A = \rho A h g$$

$$P_2 - P_1 = \rho h g$$

$$P_h = P_0 + \rho h g \quad [1]$$

DOVE P_h È LA PRESSIONE ALLA PROFONDITÀ h E P_0 È LA PRESSIONE AL PELO DELL'ACQUA (SOLITAMENTE PARI ALLA PRESSIONE ATMOSFERICA).

LA [1] VÁ SOTTO IL NOME DI **LEGGE DI STEVINO** E VALE QUANDO IL FLUIDO HA DENSITÀ COSTANTE.

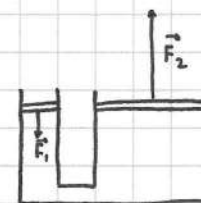
SI NOTI COME ESSA (LA PRESSIONE A PROFONDITÀ h) NON DIPENDA DALLA MASSA DELL'OGGETTO O DALLA FORMA DEL RECIPIENTE.

LEGGE DI PASCAL

LA LEGGE DI PASCAL AFFERMA CHE LA PRESSIONE ESERCITATA SU UNA SUPERFICIE DI UN FLUIDO SI TRASMETTE IN EGUAL MISURA SU QUALSIASI ALTRA SUPERFICIE A CONTATTO CON IL FLUIDO.

A PARTIRE DA QUESTA LEGGE SI PUÒ COSTRUIRE LA BOTTE DI PASCAL, DI CUI PARLERÒ MEGLIO IN FUTURO, QUANDO NE AVRÒ COSTRUITA UNA.

SEMPRE DALLA LEGGE DI PASCAL POSSIAMO CAPIRE IL FUNZIONAMENTO DEL MANGIOTTO IDRAULICO:



SE LA PRESSIONE È LA STESSA SU DUE SUPERFICIE AVREMO:

$$P_1 = P_2$$

$$F_1/A_1 = F_2/A_2$$

E SE $A_1 \ll A_2$ ALLORA $F_2 \gg F_1$

I VASI COMUNICANTI

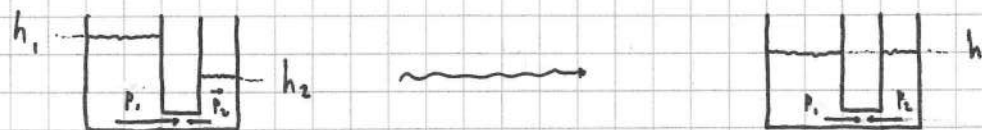
DEFINIAMO VASI COMUNICANTI DEI RECIPIENTI UNITI FRA LORO DA UN TUBO DI COMUNICAZIONE, UN ESEMPIO IN FIGURA:



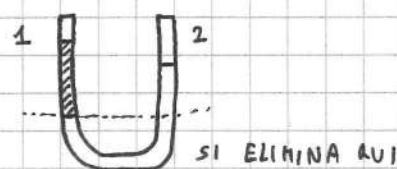
ESAMINIAMO ORA IL COMPORTAMENTO DI 2 VASI COMUNICANTI QUANDO IL

LIVELLO DEL FLUIDO NEI 2 VASI È DIVERSO.

NEL MOMENTO IN CUI DOVESSE ESSERCI UN DISLIVELLO LA PRESSIONE ALLE ESTREMITÀ DEL TUBO DI COMUNICAZIONE SAREBBE DIVERSA, CAUSANDO (PARTE DIVERSA) UN PASSAGGIO DEL LIQUIDO DAL VASO CON IL LIVELLO PIÙ ALTO A QUELLO CON IL LIVELLO PIÙ BASSO, ARRIVANDO AD UNA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO.



NEL CASO DI 2 FLUIDI DIVERSI SI RAGIONA ALLO STESSO MODO TRASCURANDO SEMPLICEMENTE IL FLUIDO CHE SI TROVA SOTTO LA SUPERFICIE DI CONTATTO TRA I FLUIDI DIVERSI:



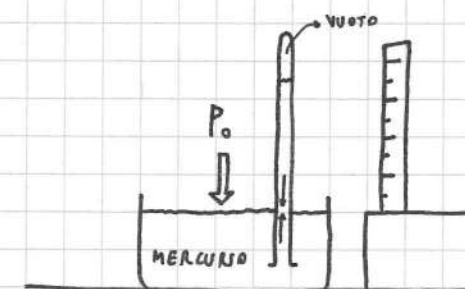
SUPPONENDO CHE I FLUIDI ABBIANO DENSITÀ ρ_1 E ρ_2 E CHE ARRIVINO ALLE ALTEZZE h_1 E h_2 AVREMO:

$$\rho_1 \gamma h_1 = \rho_2 \gamma h_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

LA PRESSIONE ATMOSFERICA

LA PRESSIONE ATMOSFERICA CONSISTE NELLA PRESSIONE ESERCITATA DALLA COLONNA D'ARIA CHE CI STA SOPRA.

EVANGELISTA TORRICELLI MISURÒ IL VALORE DI TALE PRESSIONE CON IL SEGUENTE STRUMENTO:



IN SOSTANZA MISURÒ L'ALTEZZA A CUI LA COLONNA DI MERCURIO ARRIVAVA E POTÉ CONCLUDERE CHE LA PRESSIONE ATMOSFERICA VALE:

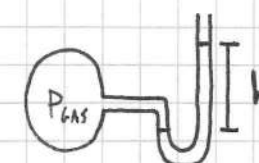
$$p_{\text{ATM}} = \rho_{\text{MERCURIO}} \cdot g \cdot h$$

DOVE $h \approx 76 \text{ cm}$ E $\rho_{\text{MERCURIO}} = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ E DUNQUE:

$$p_{\text{ATM}} \approx 10^5 \text{ Pa}$$

A LIVELLO DEL MARE (CON L'AUMENTARE DELLA QUOTA LA COLONNA D'ARIA DIMINUISCE E SI ABBASSA LA PRESSIONE).

UN ALTRO MODO DI MISURARE LA PRESSIONE ATMOSFERICA IN RELAZIONE A QUELLA DI UN ALTRO GAS CONSISTE NELL'UTILIZZO DI UN MANOMETRO A TUBO APERTO, RAPPRESENTATO DI SEGUITO:



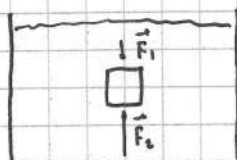
DA UNA PARTE AGISCE LA PRESSIONE DEL GAS E DALL'ALTRA ABBIAMO IL

CONTINUITÀ DELLA PRESSIONE ATMOSFERICA E QUELLO DELLA COLONNA DI LIQUIDO, PERTANTO È FACILE CONCLUDERE CHE:

$$P_{\text{Liq}} = P_{\text{Atm}} + \rho_{\text{LIQUIDO}} \cdot g \cdot h$$

LEGGE DI ARCHIMEDE

CONSIDERIAMO UN BLOCCETTO IMMESSO IN UN LIQUIDO:



RICORDANDO LA LEGGE DI STEVINO ANDIAMO A CALCOLARE LA DIFFERENZA TRA QUESTE 2 FORZE:

2 FORZE:

$$F_2 - F_1 = P_2 \cdot A - P_1 \cdot A = \rho_{\text{LIQUIDO}} \cdot g \cdot h_2 \cdot A - \rho_{\text{LIQUIDO}} \cdot g \cdot h_1 \cdot A$$

$$= \rho_{\text{LIQUIDO}} \cdot g \cdot V$$

ABBIAMO OTTENUTO CHE LA SPINTA (DETTA DI ARCHIMEDE) CON LA QUALE UN CORPO IMMESSO IN UN LIQUIDO VIENE SOLLEVATO È PAR AL PESO DEL VOLUME DI LIQUIDO SPOSTATO.

CONFRONTANDO QUESTA SPINTA CON LA FORZA PESO SI CAPIRÀ SE IL CORPO GALLEGGERÀ O NO.

IN UN LIQUIDO DEFINIAMO **PESO APPARENTE** IL RISULTATO:

$$\text{PESO APPARENTE} = \text{PESO REALE} - \text{SPINTA DI ARCHIMEDE}$$

FLUIDODINAMICA

PER STUDIARE LA DINAMICA DEI FLUIDI È NECESSARIO FARE QUALCHE ASSUNZIONE CHE SEMPLIFICHI IL MODELLO.

CONSIDEREREMO IL FLUIDO INCOMPRESSIBILE, LAMINARE O STAZIONARIO (LA VELOCITÀ IN OGNI PUNTO FISSATO NON VARIA NEL TEMPO), IRROTATIONALE (SE UN CORPO VIENE IMMESSO NEL LIQUIDO ESSO NON RUOTERÀ MAI SUL SUO ASSE CENTRALE) E NON VISCOSO (LA VISCOSITÀ TRA FLUIDI È L'EQUIVALENTE DELL'ATTRITO TRA SOLIDI, INDICA LA MISURA IN CUI UN CORPO OPPONE RESISTENZA ALLO SCORRIMENTO).

LA PORTATA

DEFINIAMO ORA QUESTA IMPORTANTE GRANDEZZA, LA PORTATA q :

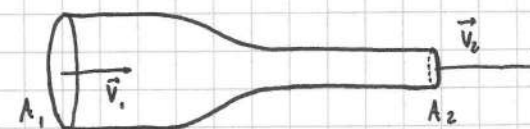
$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

METTE IN RELAZIONE IL VOLUME SPOSTATO E IL TEMPO RICHIESTO PER FARLO, SI MISURA IN m^3/s E RAPPRESENTA IL VOLUME V CHE ATTRAVERSA UNA SEZIONE IN UN INTERVALLO Δt .

CHIAMEREMO QUESTA SEZIONE, PIÙ SPECIFICAMENTE, **SEZIONE TRASVERSALE** (NON SARÀ ALTRO CHE UNA SUPERFICIE IMMAGINARIA IMMERSA NEL FLUIDO).

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SISTEMA:



VOLLIAMO TROVARE UNA RELAZIONE TRA LA VELOCITÀ DEL LIQUIDO NEI 2 ISTANTI.

ANZITUTTO OSSERVIAMO CHE SE UN VOLUME ΔV ATTRAVERSA L'AREA A_1 IN UN INTERVALLO Δt ALLORA LO STESSO VOLUME DI FLUIDO DEVE ATTRAVERSARE L'AREA

A_2 IN UN TEMPO Δt .

OSSERVATO CIÒ ED ESPRESSA LA DISTANZA x_1 E x_2 (DISTANZE PERCORSE DAL FLUIDO PRIMA E DOPO IL RESTRIIMENTO IN Δt):

$$x_1 = \Delta t \cdot v_1 \quad x_2 = \Delta t \cdot v_2$$

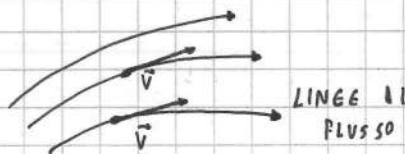
POSSIAMO CONCLUDERE:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta V_1 = \Delta V_2 = x_1 \cdot A_1 = x_2 \cdot A_2 \\ &= \Delta t \cdot v_1 \cdot A_1 = \Delta t \cdot v_2 \cdot A_2 \\ &= v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \end{aligned}$$

LINEE DI FLUSSO

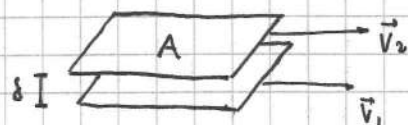
POSSIAMO IMMAGINARCI LE LINEE DI FLUSSO COME LE TRAIETTORIE DI UNA PICCOLA PARTICELLA DI LIQUIDO.

SI NOTI CHE IL VETTORE VELOCITÀ DI QUESTE PARTICELLE SARÀ SEMPRE TANGENTE ALLE LINEE DI FLUSSO.



REGIME LAMINARE

UN FLUIDO PUÒ ESSERE VISTO COME UN INSIEME DI LAMINE CHE SCORRONO LE UNE SULLE ALTRE, COME IN FIGURA:



DOVE IL MOTO È OSTACOLATO DA UNA FORZA DI ATTRITO VISCOLOSA CHE, LUNGO A

QUESTE CONSIDERAZIONI (LAMINE), PUÒ ESSERE ESPRESSA COME:

$$F_{ATT} = -\eta \cdot A \cdot \frac{\vec{v}}{\delta}$$

DOVE $\vec{v}$ È LA DIFFERENZA TRA LE VELOCITÀ DELLE LAMINE (È LA VELOCITÀ RELATIVA, CIÒ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$) E η È IL COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ. (F È LA FORZA NECESSARIA A FAR ANDARE IL FLUIDO A $\vec{v}$)

TEOREMA DI BERNOULLI

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SISTEMA:



SUPPONIAMO CHE VI SCORRA UN FLUIDO IDEALE IN REGIME STAZIONARIO (PORTATA COSTANTE), AVREMO QUINDI y , (QUOTA), v , (VELOCITÀ), p , (PRESSIONE) PER IL PUNTO 1 E ANALOGAMENTE PER IL PUNTO 2.

L'EQUAZIONE DI BERNOULLI Afferma CHE:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{costante}$$

DA CUI, SE SUPPONIAMO CHE LA QUOTA NON CAMBI OTTIENIAMO:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

GIÒ, SE IN UN TUBO AUMENTA LA VELOCITÀ DEL FLUIDO SI ABBASSA LA PRESSIONE E VICEVERSA.

QUESTO PERCHÉ, IMMAGINANDO DI AVERE UN RESTRIIMENTO, ANDREMMO L'AUMENTARE DELLA VELOCITÀ DOVE ESSEDE DOVUTO AD UN'ALTA PRESSIONE DIETRO (DOVE IL TUBO È PIÙ LARGO) CHE SPINGE IL FLUIDO. MENTRE ALL'USCITA DALLA RESTRIZIONE IL

FLUIDO VELOCE SI TROVA AVANTI AD UNA ZONA A PRESSIONE ALTA CHE RALLENTA IL FLUIDO, COME È VISTO CHE SIA.

MA ORA DIMOSTRIAMO QUESTE EQUAZIONI.

INIZIANDO RICORDIAMO COSA Afferma IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA:

$$W = \Delta K$$

ORA NON CI RESTA CHE CALCOLARE IL VALORE DI QUESTE 2 QUANTITÀ.

L'ENERGIA CINETICA È SEMPLICE DA RICAVARE:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2 \end{aligned}$$

PER IL LAVORO DOVREMO CONSIDERARE PIÙ CONTRIBUTI, INIZIANDO QUELLO GRAVITAZIONALE:

$$\begin{aligned} W_g &= -\Delta m g (y_2 - y_1) \\ &= -\rho \cdot \Delta V g (y_2 - y_1) \end{aligned}$$

POI DOBBIAMO CONSIDERARE CHE DOVRÀ ESSERE COMPILTO DEL LAVORO SUL VOLUMETTO DI LIQUIDO NEL PUNTO ① E QUESTO LAVORO SARÀ PARI A:

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot \Delta V$$

MA, ANALOGAMENTE, IL FLUIDO DOVRÀ COMPILARE DEL LAVORO SUL VOLUMETTO DI LIQUIDO NEL PUNTO ② (PER BUTTARLO FUORI) E QUESTO SARÀ PARI A:

$$W_2 = -F_2 \cdot \Delta x_2 = -p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = -p_2 \cdot \Delta V$$

ORA NON CI RESTA CHE SOMMARE QUESTE QUANTITÀ E OTTERREMO.

$$-\rho \cdot \Delta V \cdot g (y_2 - y_1) - \Delta V (p_2 - p_1) = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\rho g y_1 + p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho g y_2 + p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

SI OSSERVI CHE NEL CASO IN CUI IL FLUIDO SIA FERMO ($v_1 = v_2 = 0$) SI OTTIENE:

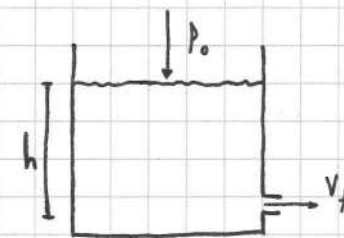
$$\rho g y_1 + p_1 = \rho g y_2 + p_2$$

$$p_1 = \rho g (y_2 - y_1) + p_2$$

CIÒ È LA LEGGE DI STEVINO.

LEGE DI TORRICELLI

CONSIDERIAMO UNA BATTENTE DI LIQUIDO A CUI VIENE APPLICATO UN FORO, COME RAPPRESENTATO:



PER RICAVARE LA VELOCITÀ DEL FLUIDO ALL'USCITA DEL FORO POSSIAMO APPLICARE IL PRINCIPIO DI BERNOULLI:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho g h$$

POICHÉ IL FORO È PICCOLO POSSIAMO ASSUMERE CHE v_0 SIA 0 (SI SVUOTA MOLTO LENTAMENTE IL SERBATOIO), INOLTRE $p_1 = p_0$:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho g h$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

CAPIAMO INCHI CHE LA VELOCITÀ DEL FLUIDO IN USCITA È LA STESSA CHE SI AVREBBE SE IL LIQUIDO CADESSE SEMPLICEMENTE DA UNA QUOTA h .

LA PORTANZA

LA FORMA DELLE ALI DEGLI AEREO PRODUCE UN RALLENTAMENTO DELL'ARIA SOTTO LE ALI E UN AUMENTO DELLA VELOCITÀ SOPRA LE ALI.

QUESTO FENOMENO INVOLGA BASSA PRESSIONE SOPRA E ALTA PRESSIONE SOTTO, SPINGENDO LE ALI VERSO L'ALTO (QUESTA FORZA È DETTA **PORTANZA**).

ATTRITO SU UN CORPO IN UN FLUIDO

COME ABBIAMO GIÀ VISTO NEL PARAGRAFO SUL REGIME LAMINARE MISURIAMO E CALCOLIAMO LA FORZA DI ATTRITO VISCOSO COME:

$$\vec{F}_A = -\eta \cdot A \cdot \frac{\vec{v}}{\delta}$$

DOVE η È IL COEFFICIENTE DI ATTRITO VISCOSO E SI MISURA IN **POISE**.

SI OSSERVA Sperimentalmente CHE LA FORZA DI ATTRITO IN UN FLUIDO AUMENTA LINEARMENTE ALL'AUMENTARE DELLA VELOCITÀ SOLO FINO A QUANDO NON SI SONO ~~FORNATI~~ FORMATI I VORTICI, CHE FANNO DIPENDERE F_{att} DAL QUADRATO DELLA VELOCITÀ:



NEL CASO DI UNA SFERA LA FORZA CHE UN FLUIDO LE OPPONE È DATA DALLA LEGGE DI STOKES:

$$F_{att} = 6\pi\eta r v$$

DOVE r È IL RAGGIO DELLA SFERA.

OSSERVIAMO CHE QUANDO UN CORPO AUMENTA LA PROPRIA VELOCITÀ ~~MINORA~~ AUMENTA ANCHE LA FORZA DI ATTRITO, AVANDO $F_p = F_{att}$, SI SARÀ RAGGIUNTA UNA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO CHE FARÀ PROGREDIRE IL CORPO A v COSTANTE.

CALCOLIAMOLA:

$$F_p = F_{att}$$

$$mg = 6\pi r \eta v$$

$$v = \frac{mg}{6\pi r \eta}$$

CHIAMEREMO QUESTA v **VELOCITÀ LIMITE**.

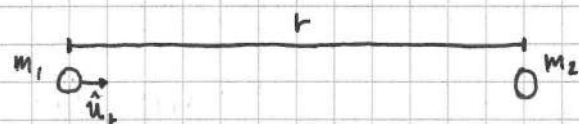
LE FORZE FONDAMENTALI

IN QUESTO BREVE CAPITOLO VEDREMO BREVEMENTE LE 4 FORZE FONDAMENTALI PRESENTI IN NATURA:

- LA FORZA **GRAVITAZIONALE**, È LA PRIMA DI CUI ABBIAMO ESPERIENZA E LA PRIMA AD ESSERE STATA STUDIATA QUANTITATIVAMENTE. È GIÀ NOTA LA FORMULA CHE CI PERMETTE DI MISURLA:

$$\vec{F}_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{u}_r$$

DOVE $\hat{u}_r$ È IL VETTORE (VETTORE UNITARIO) CHE HA DIREZIONE CORRISPONDENTE ALLA RETTA CONGIUNGENTE m_1 E m_2 , E VERSO DIRETTO DAL CORPO 1 AL CORPO 2.



OVVIAMENTE, PER IL TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA, IL CORPO 2 RISENTIRÀ DI UNA FORZA UGUALE E CONTRARIA.

- LA FORZA **ELETTROMAGNETICA**, CHE STUDIEREMO IN DETTAGLIO A BREVE.
- LA FORZA **FORTE**, CHE RAPPRESENTA CIÒ CHE TIENE UNITI I NUCLEI DEGLI ATOMI
- LA FORZA **DEBOLE**, CHE È LA RESPONSABILE DEI DECADIMENTI RADIOATTIVI

DETTO CIÒ CI POTREMMO CHIEDERE DOVE ANDREBBE MESSA LA FORZA DI ATTO STATICO, EBBENE ESSA È DOVUTA AL LEGAME ATOMICO CHE SI CREA Istantaneamente tra materiali posti in contatto e pertanto LA FORZA

DI ATTO PUÒ ESSERE VISTA COME UN'ESPRESSIONE DELLA FORZA ELETTRICA (DUNQUE FORZA ELETTROMAGNETICA), DI CUI PARLEREMO PIÙ IN DETTAGLIO ADESSO.

LA FORZA ELETTRICA

È STATA SPERIMENTATA FIN DA SUBITO DALL'UOMO, AD ESEMPIO SE STROFINIAMO I CAPELLI CON UN PALLONCINO NOTEREMO CHE I 2 CORPI INVICINANDO SI ATTRAGGONO:



SE ORA PRENDIAMO 2 PALLONCINI CHE ABBIAMO STROFINATO E LI INVICINIAMO NOTEREMO COME ESSI SI RESPINGANO:



QUESTA È UNA PRIMA CARATTERISTICA DELLA FORZA ELETTRICA DIFFERENTE DALLA FORZA GRAVITAZIONALE, CIÒ CHE PUÒ ESSERE SIA ATTRATTIVA SIA REPULSIVA.

ATTRIBUIAMO QUESTI COMPORTAMENTI ALLA **CARICA ELETTRICA**, E DICIAMO CHE NE ESISTONO DI 2 TIPI: POSITIVE E NEGATIVE.

QUELLA DI AVERE CARICA ELETTRICA È UNA PROPRIETÀ INTRINSECA DELLA MATERIA, LE CARICHE POSITIVE CORRISPONDONO AI PROTONI, QUELLE NEGATIVE ALLE ELETTRONI (IN REALTÀ NEGLI ATOMI SONO PRESENTI ANCHE I NEUTRONI CHE HANNO CARICA NEUTRA).

LA CARICA ELETTRICA SI DICE **QUANTIZZATA**, CIÒ È SE NON SI PUÒ AVERE UN VALORE DELLA CARICA ELETTRICA QUALUNQUE PERCHÉ TALE VALORE DOVREBBE ESSERE UN MULTIPLO DELLA CARICA ELEMENTARE.

LA CARICA ELEMENTARE CORRISPONDE ALLA PIÙ PICCOLA CARICA OSSERVABILE, CIOÈ QUELLA DELL'ELETTRONE. MISURANDO UNA CARICA ELETTRICA SAREMO VINCOLATI AI SEGUENTI VALORI:

$$q = \pm n \cdot e, \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

COULOMB, È L'UNITÀ DI MISURA DELLA CARICA

IN REALTÀ ESISTONO DEGLI OGGETTI CHE COMPRENDONO I PROTONI E I NEUTRONI CHIAMATI **QUARK**, ESSI POSSONO ESSERE DI TIPO "UP" E HANNO CARICA $\frac{2}{3}e$ O DI TIPO "DOWN" E HANNO CARICA $\frac{1}{3}e$. TUTTAVIA NON SONO MOLTO STABILI PRESI SINGOLARMENTE E DUNQUE LI TRASCUREREMO.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA

SI PUÒ VERIFICARE Sperimentalmente CHE IN UN SISTEMA ISOLATO (SENZA SCAMBI DI ENERGIA CON L'ESTERNO) LA CARICA ELETTRICA NON VARIA, E DUNQUE SI CONSERVA.

MASSA E CARICA ELETTRICA

NOTIAMO CHE LA CARICA ELETTRICA È STATA INTRODOTTA SENZA UNA VERA E PROPRIA DEFINIZIONE, UN PÒ COME ERA STATO FATTO CON LA MASSA INERZIALE. SE DUNQUE LA MECCANICA CLASSICA NON DEFINISCE ESATTAMENTE LA MASSA INERZIALE ALLORA L'ELETTROMAGNETISMO CLASSICO NON DEFINIRÀ PROPRAMENTE LA CARICA ELETTRICA MA PIÙ TOSTO NE DESCRIVERÀ I COMPORTAMENTI.

IN PARTICOLARE SI OSSERVA CHE GLI ATOMI SONO ELETTRICAMENTE NEUTRI, INPATTI HANNO UGUAL NUMERO DI ELETTRONI E PROTONI. SI PUÒ ANCHE OSSERVARE CHE ALCUNI MATERIALI, TRA CUI I METALLI, PERMETTONO AGLI ELETTRONI DI MUOVERSI LIBERAMENTE, MENTRE ALTRI, TRA CUI IL VETRO E LA PLASTICA, LI VINCOLANO. LI CHIAMEREMO RISPETTIVAMENTE CONDUTTORI ED ISOLANTI.

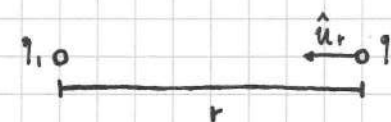
LA LEGGE DI COULOMB

Sperimentalmente SI È ARRIVATI AD ASTRARRE UN MODELLO, IN PARTICOLARE UNA LEGGE, CHE DESCRIVE IL COMPORTAMENTO DELLE CARICHE ELETTRICHE:

$$\vec{F}_q = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{u}_r$$

NOTIAMO SUBITO LA SOMILIANZA CON LA LEGGE DI GRAVITAZIONE, TUTTAVIA SI OSSERVA CHE IN QUESTO CASO IL PRODOTTO $q_1 \cdot q_2$ PUÒ ANCHE ESSERE NEGATIVO IN CASO DI CARICHE ELETTRICHE DISCORDI.

NEL SEGUENTE CASO:



LA FORZA È ATTRATTIVA, DUNQUE LE CARICHE SONO DISCORDI, INPATTI SAPPIAMO CHE:



SPESSE AVREMO A CHE FARE CON CARICHE ELETTRICHE MOLTO PICCOLE, PER QUESTO MOTIVO RICORRIAMO LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$\mu C = 10^{-6} \text{ C}$$

Dove μC È UN MICRO-COULOMB.

PER QUANTO RIGUARDA k , COME NEL CASO DELLA LEGGE DI GRAVITAZIONE, SI CALCOLA Sperimentalmente IL VALORE:

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

IL CAMPO ELETTRICO

PRIMA DI INTRODURRE QUESTA NUOVA GRANDEZZA RIVEDIAMO IN BREVE LE CARATTERISTICHE DI UN CAMPO A NOI GIÀ NOTO, QUELLO GRAVITAZIONALE.

LA TERRA, NONOSTANTE SI TROVI MOLTO DISTANTE DAI SATELLITI O DALLA LUNA, ESERCITA SU DI ESSI UNA FORZA. PER SPIEGARE QUESTO FENOMENO DICIAMO CHE LA MASSA DELLA TERRA REMPLIE LO SPAZIO CON UN CAMPO, CHE CHIAMEREMO GRAVITAZIONALE. DALLE 2 SEGUENTI ESPRESSIONI SI POTRÀ RICAVERE L'ESPRESSIONE DI QUESTO CAMPO:

$$\vec{F}_G = G \cdot \frac{M_T m}{r^2} \cdot \hat{u}_r \quad \vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$$

RI-AMMANCIANDO I TERMINI SI OTTIENE:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = G \cdot \frac{M_T}{r^2} \hat{u}_r$$

DOVE $\vec{g}$ RAPPRESENTA IL CAMPO GRAVITAZIONALE DELLA TERRA, CIOÈ LA FORZA ~~ESERCITATA DA UNA MASSA SULLA STAGIONE~~ PER UNITÀ DI MASSA CHE LA TERRA ESERCITA.

DUNQUE SE VOLESSIMO SAPERE LA FORZA ESERCITATA DALLA TERRA SULLA STAGIONE SPAZIALE INTERNAZIONALE (CUNOSITÀ: ORBITA A CIRCA 400KM DALLA SUPERFICIE TERRESTRE) CI BASTERÀ MOLTIPLICARE IL CAMPO PER LA MASSA DELLA STAGIONE:

$$\vec{F} = m_{SSI} \cdot \vec{g}$$

DUNQUE, CONOSCIUTO IL CAMPO, POTREMO RICAVERE LA FORZA CHE LA TERRA ESERCITA SU UN QUALSIASI CORPO MOLTIPLICANDO IL CAMPO $\vec{g}$ PER LA MASSA DEL CORPO.

L'UTILITÀ DI ESSERE PARTITI DA UN RIPASSO DEL CAMPO GRAVITAZIONALE SI VERRÀ ABISSO, INFATTI DEFINIAMO IL CAMPO ELETTRICO ALLO STESSO MODO.



CHIAMATE Q LA CARICA CHE GENERA IL CAMPO E q_0 LA CARICA DI PROVA (Q È L'EQUIVALENTE DELLA MASSA DELLA TERRA) DEFINIAMO IL CAMPO ELETTRICO COME:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \left[\frac{N}{C} \right]$$

CIOÈ LA FORZA CHE Q ESERCITA PER UNITÀ DI CARICA.

TUTTAVIA CI TROVIAMO ORA A DOVER DECIDERE CHE SEGNO DARE ALLA CARICA DI PROVA, INFATTI DA ESSA DIPENDERÀ POI IL ~~SENTO~~ VERSO DEL CAMPO. PER CONVENZIONE SI CONSIDERA LA CARICA DI PROVA COME POSITIVA.

COME ABBIAMO FATTO PRIMA PER LA STAGIONE SPAZIALE INTERNAZIONALE POSSIAMO FARE ORA CON LA CARICA DI PROVA, VALENDO CONOSCERE LA FORZA CHE Q ESERCITA SU DI ESSA CI BASTERÀ MOLTIPLICARE IL CAMPO ELETTRICO PER LA CARICA DI PROVA:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q_0$$

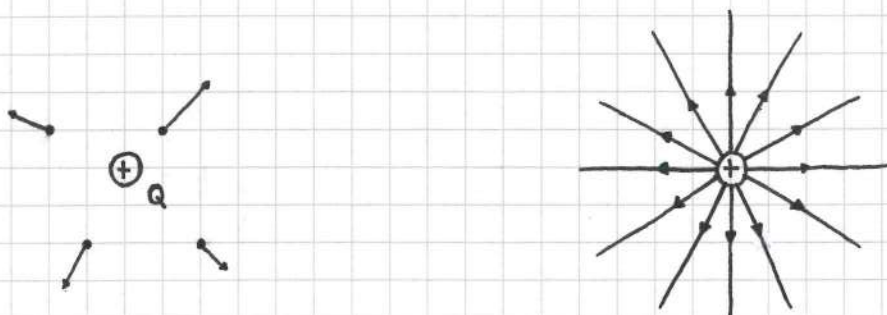
SI INTUISCE DA QUESTA FORMULA ~~DA~~ (PROBABILMENTE PIÙ DALLA PRECEDENTE) CHE POSSIAMO ASSOCIARE UN VETTORE CAMPO ELETTRICO AD OGNI PUNTO DELLO SPAZIO, INFATTI SIA CHE IN UN PUNTO ~~NON~~ ESISTA LA CARICA DI PROVA SIA CHE NON ESISTA IL CAMPO NIENTE.

IL CAMPO È DUNQUE UNA PROPRIETÀ DELLO SPAZIO.

LE LINEE DI FORZA

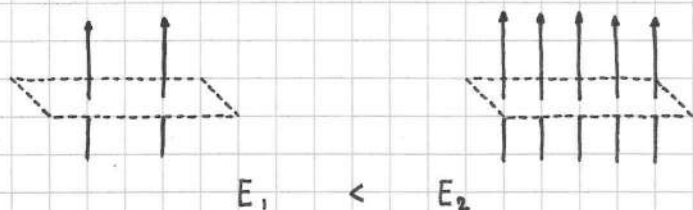
ORA CHE ABBIAMO DEFINITO IL CAMPO POTREMMO CHIEDERCI COME ANDREBBE RAPPRESENTATO. EBBENE PER FARE CIÒ INTRODUCIAMO LE **LINEE DI FORZA**, CIOÈ LINEE TANGENTI IN OGNI PUNTO AL VETTORE CAMPO ELETTRICO.

NEL SEGUENTE ESEMPIO A SINISTRA IL VETTORE CAMPO ELETTRICO IN ALCUNI PUNTI, A DESTRA LE LINEE DI FORZA:



IL VETTORE CAMPO ELETTRICO È SEMPRE DIRETTO LUNGO LA CONGIUNGENTE TRA LE 2 CARICHE (DI PROVA E GENERATRICE DEL CAMPO), IL VERSO DIPENDE DAL SEGNO DI Q E q_0 (QUESTA È POSITIVA PER CONVENZIONE). IN QUESTO CASO LE LINEE DI FORZA SONO USCENTI DALLA CARICA Q (POSITIVA).

LE LINEE DI FORZA SONO UNO STRUMENTO DESCRITTIVO DEL CAMPO, CI RENDIAMO CONTO DI CIÒ CHE FA, ABBIAMO INFORMAZIONI QUALITATIVE SUL SUO COMPORTAMENTO. AD ESEMPIO DA UNA MAGGIOR DENSITÀ DI LINEE DI FORZA (A PUNTÀ DI ALTA CONSIDERATA) INDICA UNA MAGGIOR INTENSITÀ DEL CAMPO IN QUELL'AREA:

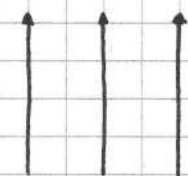


DA QUESTE OSSERVAZIONI DEFINIAMO 2 DIVERSI TIPI DI CAMPO ELETTRICO:

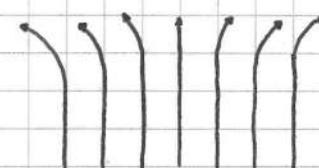
- IL CAMPO ELETTRICO **UNIFORME**, ESSO È COSTANTE IN DIREZIONE MODULO

E VERSO, DUNQUE LE SUE LINEE DI FORZA SARANNO TUTTE PARALLELE ED EQUIDISTANTI (L'INTENSITÀ NON VARIA $\Rightarrow$ LA DENSITÀ DI LINEE DI FORZA NON VARIA).

- IL CAMPO ELETTRICO **NON UNIFORME**, ESSO VARIA DIREZIONE MODULO O VERSO, DUNQUE CI SARANNO ZONE CON MAGGIOR DENSITÀ DI LINEE DI FORZA E ZONE CON MINORI DENSITÀ; INOLTRE LE LINEE DI FORZA NON SARANNO PER FORZA PARALLELE TRA LORO (INFINITI LA DIREZIONE DI $\vec{E}$ CAMBIA).



CAMPO UNIFORME



CAMPO NON UNIFORME

ESPRESSIONE DEL CAMPO ELETTRICO

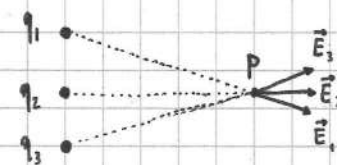
COME ABBIAMO FATTO PER IL CAMPO MAGNETICO RECAVIAMO ORA L'ESPRESSIONE DEL CAMPO ELETTRICO:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 Q}{r^2} \cdot \hat{u}_r, \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

DA CUI:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{u}_r$$

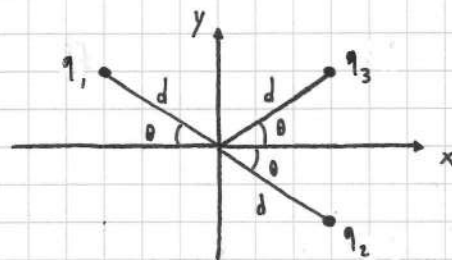
QUESTO È IL CAMPO ELETTRICO PRODOTTO DA UNA CARICA PUNTIFORME Q , IN PRESENZA DI PIÙ CARICHE AVREMO CHE VARIA IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE



$$\vec{E}_P = \sum_{i=1}^3 \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

ESERCIZIO:

SI CONSIDERI IL SEGUENTE SCHEMA E SI CALCOLI IL CAMPO ELETTRICO NELL'ORIGINE:



CON $\theta = 30^\circ$, $q_1 = 2Q$, $q_2 = -2Q$, $q_3 = -4Q$

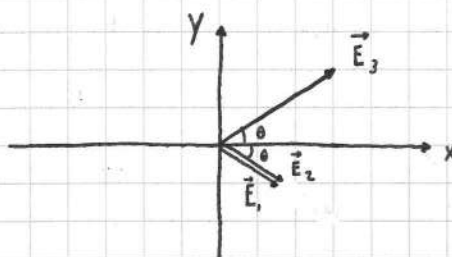
IN TUTTO CALCOLIAMO IL CAMPO ELETTRICO NELL'ORIGINE DOVUTO A q_1 , q_2 E q_3 SEPARATAMENTE:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Q}{d^2} \cdot \hat{u}_r$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-2Q}{d^2} \cdot \hat{u}_r$$

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-4Q}{d^2} \cdot \hat{u}_r$$

I VETTORI CAMPO ELETTRICO SARANNO QUINDI:



$\vec{E}_1$ È INVOLTO ALLA STESSA PARTE DI $\vec{E}_2$ PERCHÉ q_1 È POSITIVA E QUINDI RESPINGE UN EVENTUALE CARICA DI PROVA POSTA SULL'ORIGINE.

NON CI RESTA CHE SOMMARE I 3 VETTORI, INIZIAMO DA $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ PER COMODITÀ:

$$\vec{E}_{1,2} = \vec{E}_{1,0} + \vec{E}_{2,0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Q}{d^2} \cdot \hat{u}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-2Q}{d^2} \cdot \hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4Q}{d^2} \cdot \hat{u}_r$$

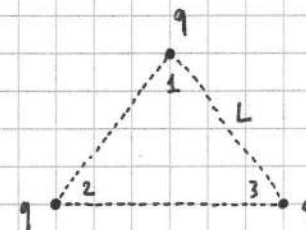
LA SOMMA VIENE FATTA IN MODULO, QUINDI LA CARICA RISULTA ESSERE $2Q + 2Q = 4Q$.

ORA ABBIAMO $\vec{E}_{1,2} + \vec{E}_3$, POSSIAMO NOTARE CHE LA COMPONENTE Y SIA NULLA DATO CHE IL MODULO DEI VETTORI È UGUALE E L'ANGOLO FORMATO CON L'ASSE X OPPOSTO. QUINDI:

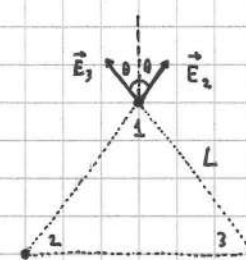
$$\vec{E}_{TOT} = 2 \vec{E}_3 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{4Q}{d^2} \hat{i} = \frac{\sqrt{3}Q}{\pi\epsilon_0 d^2} \hat{i}$$

ESERCIZIO:

SI CONSIDERINO 3 CARICHE POSITIVE UGUALI $q_1 = q_2 = q_3 = q$ POSTE AI VERTICI DI UN TRIANGOLO EQUILATERO. SI CALCOLI LA FORZA AGENTE SULLE 3 CARICHE:



ESSENDO IL PROBLEMA SIMMETRICO CI BASTERÀ CALCOLARE LA FORZA AGENTE SU UNA DELLE 3 CARICHE. CALCOLIAMOLA QUINDI IN 1:



IL VETTORE CAMPO ELETTRICO GENERATO DALLE CARICHE 2 E 3 È UGUALE E POICHÉ $\theta = 30^\circ$ IL VETTORE CAMPO ELETTRICO TOTALE AVrà COMPONENTE X NULLA. SOMMANDO $\vec{E}_3$ E $\vec{E}_2$ OTTIENIAMO:

$$\vec{E}_{2,3} = \vec{E}_3 + \vec{E}_2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{L^2} \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{L^2} \cdot \cos 30^\circ \right) \hat{j}$$

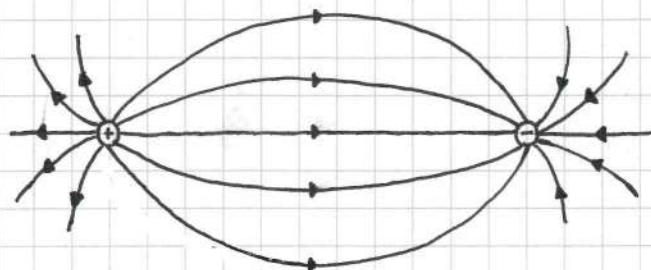
DA CUI, MOLTIPLICANDO PER LA CARICA IN 1 (CIÒ È q) OTTIENIAMO LA FORZA:

$$\vec{F}_{2,3} = \vec{E}_{2,3} \cdot q = \frac{q \cdot \cos 30^\circ}{2\pi\epsilon_0 L^2} \cdot q \hat{j} = \frac{q^2 \cdot \cos 30^\circ}{2\pi\epsilon_0 L^2} \hat{j}$$

IL DIPOLO ELETTRICO

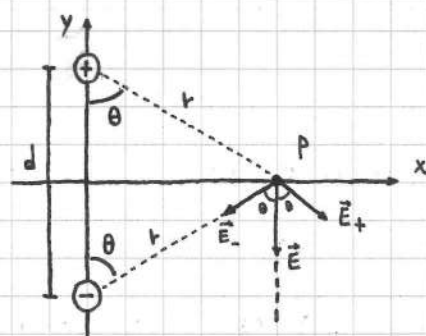
PER ADESSO ABBIAMO TRATTATO POCHI ESEMPLI DI SISTEMI CON PIÙ CARICHE, PROVIAMO A STUDIARE UN POCO PIÙ NEL DETTAGLIO IL COMPORTAMENTO DI UNA CARICA POSITIVA POSTA IN PROSSIMITÀ DI UNA CARICA NEGATIVA.

ANZITUTTO OSSERVIAMO CHE UN'IPOTETICA CARICA DI PROVA VERREBBE RESPINTA DALLA CARICA POSITIVA E ATTRATTA DALLA CARICA NEGATIVA, RENDENDO LE LINEE DI FORZA SIMILI A:



CHIAMEREMO QUESTO SISTEMA **DIPOLO ELETTRICO**, COSTITUITO DA 2 CARICHE UGUALI IN MODULO MA DI SEGNO OPPOSTO POSTE AD UNA DISTANZA FISSA.

PROVIAMO A CALCOLARE IL VETTORE CAMPO ELETTRICO SULL'ASSE DEL DIPOLO ELETTRICO:



PER RICAVARE $\vec{E}$ AVREMO BISOGNO DI CONOSCERE $\cos \theta$, QUINDI OSSERVIAMO CHE:

$$r \cdot \cos \theta = \frac{d}{2}$$

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

DA CUI:

$$\cos \theta = \frac{d}{2r} = \frac{d}{2 \cdot \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \quad [1]$$

E POICHÉ LE CARICHE SONO UGUALI IN MODULO AVREMO:

$$|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad [2]$$

DALLA [1] E [2] È POSSIBILE CALCOLARE IL MODULO DI $\vec{E}$, IL VERSO SARÀ VERSO IL BASSO:

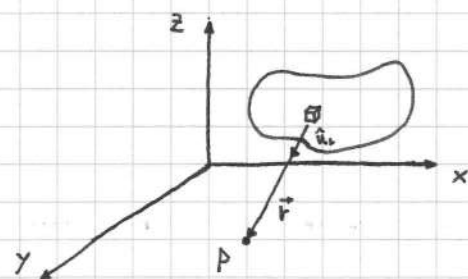
$$\begin{aligned} |\vec{E}| &= 2 \cdot |\vec{E}_+| \cdot \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot \frac{d}{2 \cdot \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qd}{\sqrt{\left(x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^3}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qd}{\sqrt{x^2 \left(1 + \left(\frac{d}{2x}\right)^2\right)^3}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qd}{x^3} \cdot \left(1 + \left(\frac{d}{2x}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

PER $x \gg d$ IL MODULO DEL VETTORE CAMPO ELETTRICO TENDE A 0, E IL TERZO FATTORE SI PUÒ SEMPLIFICARE. SI NOTI INOLTRE CHE IL MODULO DEL VETTORE CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN DIPOLO DECRESCe PIÙ RAPIDAMENTE (C'È UN x^3) CHE SE FOSSE GENERATO DA UNA CARICA SINGOLA.

CHIAMEREMO **MOMENTO DI DIPOLO** IL PRODOTTO $q \cdot d$ E LO INDICHEREMO CON p .

DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

ABBIAMO VISTO CHE LA CARICA È UNA GRANDEZZA QUANTIZZATA, CIÒ VUOL DIRE CHE SE DOVESSIMO CALCOLARE IL CAMPO GENERATO DA UN CORPO NON APPROSSIMABILE AD UN PUNTO ALLORA DOVREMMO CONSIDERARE SINGOLARMENTE TUTTE LE SUE CARICHE. QUESTA OPERAZIONE RISULTEREBBE IMPOSSIBILE, DUNQUE PER PRIMA COSA CI PONIAMO NEL CASO IN CUI LA CARICA SIA UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA SU TUTTO IL VOLUME DEL CORPO, CONSIDERIAMO POI IL SEGUENTE ESEMPIO:



ANDREMO A CONSIDERARE L'OGGETTO COME DIVISO IN TANTISSIMI VOLUMETTI dV MOLTO PICCOLI CHE SARANNO CARATTERIZZATI DA UNA CARICA dq E GENERERANNO UN CAMPO:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \hat{u}_r$$

A QUESTO PUNTO SFRUTTIAMO LA DENSITÀ CONTINUA DI CARICA SAPENDO CHE VALGONO:

$$\frac{Q}{V} = \rho \left[\frac{C}{m^3} \right] \quad \text{DENSITÀ VOLUMETRICA}$$

$$\frac{Q}{A} = \sigma \left[\frac{C}{m^2} \right] \quad \text{DENSITÀ SUPERFICIALE}$$

$$\frac{Q}{L} = \lambda \left[\frac{C}{m} \right] \quad \text{DENSITÀ LINEARE}$$

DOVE Q RAPPRESENTA LA CARICA CONTENUTA NEL VOLUME V , NELL'AREA A O NEL SEGMENTO L .

DUNQUE AVREMO:

$$dq = \rho \cdot dV \Rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \cdot \hat{u}_r$$

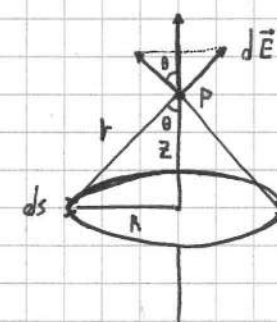
PER TROVARE IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DAL CORPO INTERO CI BASTERÀ SOMMARE, E QUINDI INTEGRARE, SU TUTTO IL VOLUME:

$$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \cdot \hat{u}_r$$

ESEMPIO ANELLO:

INIZIAMO CON IL CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN ANELLO UNIFORMEMENTE CARICO PERCHÉ RICORDA LA RAPPRESENTAZIONE SCHEMATICA DI UN CIRCUITO.

PER SEMPLICITÀ CI PONIAMO IN UN PUNTO SULL'ASSE CENTRALE DELL'ANELLO, IN MODO DA POTER SFRUTTARE LA SIMMETRIA DEL SISTEMA. DI SEGUITO UNO SCHEMA:



DATA LA DENSITÀ DI CARICA LINEARE SUPPONIAMO DI VOLEA CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO IN P. CONSIDERIAMO INIZIALMENTE IL TRATTO INFINITESIMO ds E IL SUO EFFETTO IN P, ESSO SARÀ:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot ds}{r^2} \cdot \hat{u}_r$$

A QUESTO PUNTO NON CI MANCA CHE SOMMARE TUTTI I CONTRIBUTI DEI TRATTI ds , TUTTAVIA POSSIAMO NOTARE COME DALLA PARTE OPPOSTA NASCONDO A ds

CI SIA UN TRATTO DI ANELLO INFINITESIMO CHE ANNULLA LA COMPONENTE ORIZZONTALE DI $\vec{E}$. QUESTO FATTO SI RITEENE PER TUTTI GLI TRATTI INFINITESIMI, E CI PERMETTE DI CONCLUDERE CHE IL VETTORE DEL CAMPO ELETTICO È VERTICALE E IL MODULO DEL TRATTO INFINITESIMO:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda ds \cdot \cos\theta}{r^2}$$

ESPANIAMO ORA QUESTA ESPRESSIONE IN FUNZIONE DI z OSSERVANDO CHE:

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$r^2 = R^2 + z^2$$

DA CUI:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z ds}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

L'ULTIMO PASSAGGIO CONSISTE NELL'INTEGRARE SULLA CIRCONFERENZA PER TROVARE IL VALORE DEL CAMPO ELETTICO TOTALE IN P:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{TOT} &= \int_C d\vec{E} = \int_C \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z ds}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{u}_r \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{u}_r \end{aligned}$$

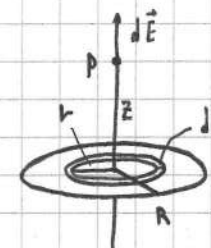
DOVE $q = 2\pi R \lambda$, SI OSSERVI INOLTRE CHE PER $z \gg R$ AL DENOMINATORE RIMANE $z^{2 \cdot \frac{3}{2}} = z^3$ E AVREMO:

$$\vec{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{z^2} \hat{u}_r$$

IL CHE NON DOVREBBE SORPRENDERCI DAL MOMENTO CHE SE P È MOLTO LONTANO DALL'ANELLO ALLORA QUEST'ULTIMO PUÒ ESSERE APPROSSIMATO A CARICA PUNTIFORME.

ESEMPIO DISCO:

CONSIDERIAMO ORA UN DISCO CON UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA E CERCHIAMO DI NUOVO DI CALCOLARE IL CAMPO ELETTICO IN UN LUNGO PUNTO P SULL'ASSE CENTRALE DEL DISCO.



SFRUTTANDO CIÒ CHE ABBIAMO APPENA DETTO SULL'ANELLO CONSIDERIAMO COME SUPERFICIE INFINITESIMA DEL DISCO PROPRIO L'ANELLO DI RAGGIO r E SPESORE ds . IL CONTRIBUTO DELL'ANELLO CHE HO DISEGNATO SARÀ QUINDI:

$$d\vec{E} = \frac{dq \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

MA DAL MOMENTO CHE POSSIAMO ESPRIMERE LA CARICA $dq = \sigma dA = 2\pi r dr \cdot \sigma$ AVREMO:

$$d\vec{E} = \frac{\sigma 2\pi r z dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

BASTA PER AVERE IL CAMPO TOTALE CI BASTA INTEGRARE TRA 0 E R:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{TOT} &= \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r z dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{\sigma \pi z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{2r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma \pi z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-2 \cdot (r^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^R \\ &= \frac{\sigma \pi z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{2}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{2}{|z|} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

ALTREMENTI NON FUNZIONA NEL SEMIASSE NEGATIVO

ANALIZZIAMO ORA 2 CASI LIMITE, NEL PRIMO z TENDERÁ A 0 E $R \gg z$,
IN SOSTANZA CI TROVEREMO MOLTO VICINI AL DISCO:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

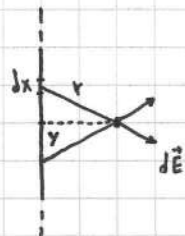
SI OSSERVA COME VIENE A
GENERATO UN CAMPO ELETTRICO
UNIFORME (CONSTANTE IN MOD., VEL., DIR.)

NEL SECONDO CASO CI PORTIAMO AD UNA DISTANZA MOLTO LUNGA RISPETTO AL DISCO,
AVREMO:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{R^2 + z^2} - |z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{R^2 + z^2 - z^2}{\sqrt{R^2 + z^2} \cdot (\sqrt{R^2 + z^2} + z)} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R^2 + z^2 - z^2}{R^2 + z^2 + z\sqrt{R^2 + z^2} \approx z} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2} = \frac{\sigma \pi R^2}{\pi} \cdot \frac{1}{4\epsilon_0 z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{z^2} \end{aligned}$$

ESEMPIO FILO

PER ESERCIZIO PROVAMO ORA A CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO GENERATO IN UN
GENERICO PUNTO P DA UN FILO RETTILINEO CON DENSITÀ DI CARICA λ .
LO SCHEMA È IL SEGUENTE:



OSSERVIAMO ANCHE IN QUESTO CASO CHE IL CAMPO ELETTRICO LUNGO X DEI PICCOLI
TRATTI dx SI ANNULLA A 2 A 2 CON IL CONTRIBUTO DEL TRATTO dx OPPOSTO
RISPETTO ALL'ORIGINE.

DUNQUE OSSERVATO CHE CONTRIBUISCE SOLO LA COMPONENTE LUNGO Y IMPOSTIAMO
LA SEGUENTE EQUAZIONE:

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \hat{u}_r \cdot \cos\theta$$

PER TROVARE IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA TUTTI I TRATTI dx DOVREMO
INTEGRARE TRA $+\infty$ E $-\infty$, IL FATTO È CHE CI RITROVEREMO CON UN INTEGRALE
MOLTO DIFFICILE DA RISOLVERE E UN'ALTRA OPZIONE PER UN CAMBIO DI VARIABILE, DA X
A θ .

CI SERVIREMO DELLE SEGUENTI RELAZIONI:

$$r \cdot \cos\theta = y \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\cos\theta}{y}$$

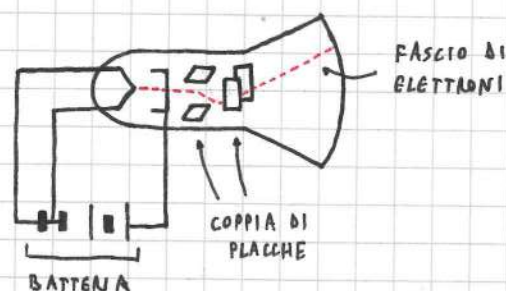
$$\frac{x}{y} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad x = y \tan\theta \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot y \cdot d\theta$$

ABBIAMO ESPRESSO X E r IN FUNZIONE DI θ E y (DOVE y È UNA COSTANTE)
QUINDI CI SIAMO RIDOTTI AD UN INTEGRALE DI UNA SOLA VARIABILE. PRIMA DI
CALCOLARE OSSERVIAMO CHE SE PUNTA GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE SONO $+\infty$ E
 $-\infty$ ADESSO SAREMMO $\frac{\pi}{2}$ E $-\frac{\pi}{2}$, PROCEDENDO:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot y \right) d\theta}{\left(\frac{y}{\cos\theta} \right)^2} \cdot \cos\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{y} \cdot \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left[\sin\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \end{aligned}$$

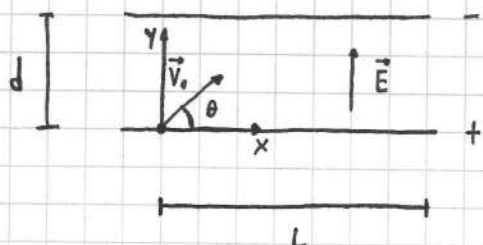
MOTO DI CARICHE IN PRESENZA DI CAMPO ELETTRICO

NEI VECCHI TELEVISORI A TUBO CATHODICO VENIVANO FORMATI DEI FASCI DI ELETTRONI IL CUI MOTO ERA CONTROLLATO DA ALCUNE PLACCHE CHE GENERAVANO UN CAMPO ELETTRICO, COME NEL SEGUENTE SCHEMA:



IL SEGUENTE ESERCIZIO CI FA COMPRENDERE MEGLIO COME UN ELETTRONE POSSA ESSERE DEVIATO DALLA PRESENZA DI UN CAMPO ELETTRICO.

CONSIDERIAMO UN e^- POSTO IN CONTATTO CON UNA PLACCA CARICATA POSITIVAMENTE CON VELOCITÀ INIZIALE v_0 IN DIREZIONE INCLINATA DI θ RISPETTO ALLA PLACCA +; DALLA PARTE OPPOSTA TROVIAMO UNA PLACCA CARICATA NEGATIVAMENTE:



DATI $\theta = 45^\circ$, $d = 0,02 \text{ m}$, $L = 0,10 \text{ m}$, $|\vec{v}_0| = 6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $|\vec{E}| = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$

CI CHIEDIAMO SE L'ELETTRONE COLPISCA O NO LA PLACCA NEGATIVA.

DI FATTO QUELLO DELL' e^- È UN MOTO PARABOLICO E ANCHE OSSERVATO CHE:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q = m_e \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{E} \cdot (-e)}{m_e} = -3,5 \cdot 10^{24} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

POSSIAMO IMPOSTARE IL SEGUENTE SISTEMA

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0 \sin 45^\circ t + \frac{1}{2} a t^2 & [1] \\ x(t) = x_0 + v_0 \cos 45^\circ t & [2] \end{cases}$$

DALLA [1] RICEVIAMO LA VERTICALE E L'ALTEZZA MASSIMA RAGGIUNTA:

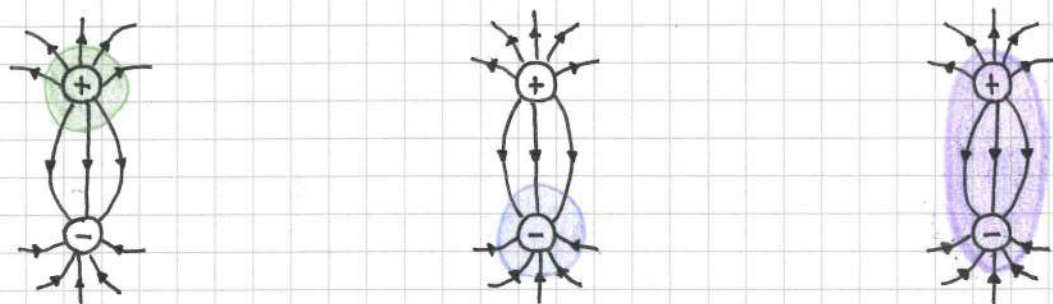
$$h_{\max} = \frac{(v_0 \cdot \sin 45^\circ)^2}{2a} = 2,57 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$L = \frac{2 v_0^2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ)}{g} = 1,029 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

L INDICA LA DISTANZA DAL PUNTO DI PARTENZA ALLA QUALE L'ELETTRONE COLPISCE IL PIATTO POSITIVO.

LA LEGGE DI GAUSS

PER INTRODURRE QUESTO ARGOMENTO CONSIDERIAMO UN DIPOLO ELETTRICO E ALCUNE ZONE DELLO SPAZIO CHE LO CIRCONDANO:

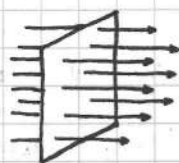


SENZA INTRODURRE ANCORA NUOVE VARIABILI, RIMANENDO A LIVELLO INTUITIVO, VEDREMO CHE NELLA ZONA VERDE, A CAUSA DELLA CARICA POSITIVA, LE LINEE DI FORZA ESCONO E BASTA.

NELLA ZONA BLU INVECE, A CAUSA DELLA CARICA NEGATIVA, LE LINEE DI FORZA ENTRANO E BASTA; MENTRE NELLA ZONA VIOLA CI VERREBBE DA DIRE CHE TANTE LINEE DI FORZA ENTRANO QUANTE NE ESCONO, E NON SAREBBE STUPEFACENTE COLLEGARE QUESTO FATTO A QUELLO CHE LA CARICA TOTALE DELLA ZONA VIOLA È ZERO.

IL CONCETTO CHE ABBIAMO APPENA DESCRITTO A PAROLE, PER ESSERE FORMALIZZATO, HA BISOGNO DELLA VARIABILE CHE DEFINIAMO ORA: IL FLUSSO.

IMMAGINIAMOCI UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME E PRENDIAMO UNA SUPERFICIE A PERPENDICOLARE ALLE LINEE DI FORZA E RETTANGOLARE, DEFINIREMO IL FLUSSO COME IL PRODOTTO SCALARE DI $\vec{E}$ E $\vec{A}$:

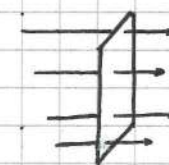


$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

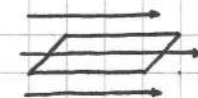
DOVE A HA MODULO PAR ALL'AREA A E VERSO PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE. DI FATTO, DALLA DEFINIZIONE DI PRODOTTO SCALARE, POSSIAMO ESPRIMERE IL FLUSSO COME SEGUË:

$$\Phi = E \cdot A \cdot \cos \theta$$

DOVE θ RAPPRESENTA L'ANGOLO TRA IL VETTORE AREA E IL VETTORE CAMPO ELETTRICO, SI POSSONO ANCHE FARE LE SEGUENTI CONSIDERAZIONI:



$$\Phi = \text{MAX}$$



$$\Phi = 0$$

FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

PER ADESSO ABBIAMO DEFINITO IL FLUSSO SOLO ATTRAVERSO UN SEMPLICE RETTANGOLO, SE VOLESSIMO CALCOLARLO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE PIÙ COMPLESSA DOVREMO FARE QUALCHE CONSIDERAZIONE IN PIÙ.

DIVIDIAMO LA NOSTRA SUPERFICIE IN PICCOLI PEZZI dA TALI DA PERMETTERCI DI ASSUMERE COSTANTE IL CAMPO ELETTRICO CHE LI ATTRAVERSA, AVREMO:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \hat{u}_1$$

PER RICAVALRE IL FLUSSO TOTALE ATTRAVERSO LA SUPERFICIE A BASTA INTEGRARE, OTTENENDO:

$$\Phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{A}_i \quad \longrightarrow \quad \Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot \hat{u}_1 \cdot dA$$

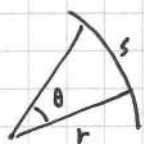
TORNANDO ALLA LEGGE DI GAUSS CONSIDERIAMO IL FLUSSO DI $\vec{E}$ ATTRAVERSO UNA QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA (CIOÈ UNA SUPERFICIE QUALSIASI CHE RACCHIUDE UN VOLUME). PER CONVENZIONE ASSUMIAMO COME VERSO POSITIVO DEL VETTORE AREA QUELLO USCENTE DALLA SUPERFICIE.

LA LEGGE ENUNCIA CHE IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA È UGUALE ALLA SOMMA ALGEBRAICA DELLE CARICHE CONTENUTE ENTRO LA SUPERFICIE DIVISA PER ϵ_0 , IN FORMULE:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_1 \cdot dA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

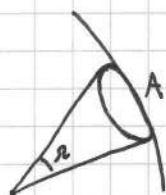
DIMOSTRAZIONE:

PER DIMOSTRARE LA FORMULA OCCORRE INTRODURRE LA DEFINIZIONE DI ANGOLO SOLIDO, CHE SIMILMENTE A QUANTO AVEVAMO DETTO PER L'ANGOLO PIANO:



$$\theta = \frac{s}{r}$$

VENIRÀ DEFINITO COME:

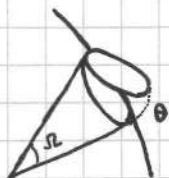


$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

ED ESIMEREMO IN STERADIANTI. SI OSSERVI CHE SE IN MEDIANTE L'ANGOLO PIÙ VALE 2π IN STERADIANTI SI AVrà:

$$\Omega_{tutto} = \frac{A}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

SE VOLESSIMO ESSERE ANCORA PIÙ GENERALI NELLA DEFINIZIONE DI ANGOLO SOLIDO DOVREMMO CONSIDERARE IL FATTO CHE A POTREBBE AVERE DIVERSE ORIENTAZIONI E DUNQUE DOVREMMO INTRODURRE LA SEGUENTE FORMULA:



$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \cdot \cos \theta$$

PERTANTO IL FLUSSO GENERATO DA UNA CARICA q SARÀ:

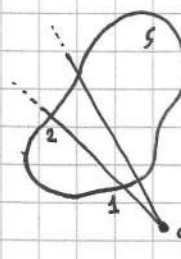
$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint E \cdot dA \cdot \cos \theta = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{d\Omega r^2}{\cos \theta} \cdot \cos \theta \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

TUTTAVIA QUESTO È VALIDO NEL CASO DI UNA CARICA, SE INVECE LE CARICHE SONO PIÙ D'UNA APPLICHEREMO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:

$$\begin{aligned} \Phi_{TOT} &= \oint \vec{E}_{TOT} \cdot d\vec{A} = \oint \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

NEL CASO IN CUI NON DOVESSERO ESSERCI CARICHE INTERNE ALLA SUPERFICIE DA UNA PARTE AVREMO IL FLUSSO CON UN SEGNO NEGATIVO (ENTRANTE O USCENTE A SECONDA DEL VERSO DI $\vec{E}$ E QUINDI DELLA CARICA CHE LO GENERA) E DALL'ALTRA IL FLUSSO CON UN SEGNO POSITIVO.

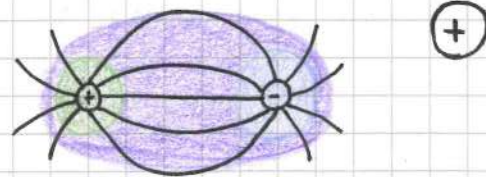
NOTIAMO ANCHE CHE MENTRE NEL PUNTO 1 IL CAMPO ELETTRICO È ALTO MA



LA SUPERFICIE ADOTTA NEL PUNTO 2 SI HA UNA SITUAZIONE CONTRARIA, IL CAMPO ELETTRICO È BASSO E LA SUPERFICIE INTERESSATA VASTA. POICHÉ SIA IL CAMPO ELETTRICO SIA L'AREA SONO PROPORZIONALI AD r^2 SI PUÒ INTUIRE CHE QUESTE VARIAZIONI SI COMPENSINO

PERMETTENDOCI DI VERIFICARE LA VALIDITÀ DELLA LEGGE DI GAUSS. NESSUNA CARICA INTERNA IMPLICA FLUSSO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE S NULLO, E COSÌ ABBIAMO CONCLUSO A LIVELLO INTUITIVO.

ESEMPIO



IL FLUSSO NELLE 3 ZONE VALE:

- VERDE : q_+ / ϵ_0
- BLU : q_- / ϵ_0
- VIOLA : NULLO

L'ENORME CARICA POSITIVA POSTA ALL'ESTERNO DELLE 3 ZONE COLORATE NON INCIDE SUL VALORE DEL FLUSSO.

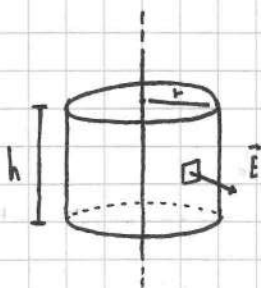
APPLICAZIONI LEGGE DI GAUSS

PROVIAMO A VEDERE ORA SE ESISTE UN MODO PIÙ SEMPLICE PER CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO SFRUTTANDO QUANTO DETTO SULLA LEGGE DI GAUSS.

CASO FILO

CONSIDERIAMO ORA UN FILO DI LUNGHEZZA INFINITA CON DENSITÀ DI CARICA LINEARE λ . IN QUESTO CASO NON SAPIAMO QUANTO VALGA $\vec{E}$ AD UNA GENERICA DISTANZA r DAL FILO, PERÒ SAPIAMO CHE IL VERSO DEL CAMPO ELETTRICO SARÀ SEMPRE PERPENDICOLARE AL FILO.

PER POTER APPLICARE LA LEGGE DI GAUSS ABBIAMO BISOGNO DI UNA SUPERFICIE CHIUSA SULLA QUALE LAVORARE, EBBENE SCEGLIAMOLA COME INDICATO QUI SOTTO:



A QUESTO PUNTO PROVIAMO A CALCOLARE IL FLUSSO CHE ATTRAVERSA LA SUPERFICIE GAUSSIANA, DALLA DEFINIZIONE:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

DIVIDIAMO IL CILINDRO IN PEZZI PER POTER CALCOLARE PIÙ AGEVOLMENTE QUESTO INTEGRALE. NELLO SPECIFICO CONSIDEREREMO AREA SUPERIORE, INFERIORE E LATERALE:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \Phi_{\text{SUP}} + \Phi_{\text{INF}} + \Phi_{\text{LAT}} = 2 \oint E \cdot dA \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \oint E \cdot dA \cdot \cos 0 \\ &= 0 + E \cdot 2\pi r \cdot h \end{aligned}$$

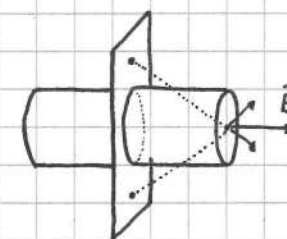
MA PER LA LEGGE DI GAUSS SAPIAMO CHE:

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

COME POSSIAMO OSSERVARE LA LEGGE DI GAUSS CI HA PORTATI AL RISULTATO MOLTO PIÙ IN FRETTA DI PRIMA.

CASO PIANO INDEFINITO

CONSIDERIAMO ORA UN PIANO CARICO INDEFINITO E COSTRUIAMO UNA SUPERFICIE CHIUSA SU CUI LAVORARE:



ANCHE IN QUESTO CASO OSSERVIAMO CHE IL CAMPO ELETTRICO È IN OGNI PUNTO PERPENDICOLARE AL PIANO, IL CHE CI PERMETTE DI ESCLUDERE DALL'INTEGRALE DELL'AREA PER CALCOLARE IL FLUSSO LA SUPERFICIE LATERALE DEL CILINDRO (LÌ INFATTI IL VETTORE

AREA E CAMPO ELETTRICO FORMANO UN ANGOLO DI 90° PORTANDO QUINDI IL FLUSSO A 0).

CALCOLIAMO IL FLUSSO DOPO QUESTA OSSERVAZIONE:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA \cdot \cos 0 = 2\pi r^2 \cdot E$$

SPUNTANDO NUOVAMENTE LA LEGGE DI GAUSS OTTENIAMO:

$$\frac{\Phi_E}{\epsilon_0} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2\pi r^2 E = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow 2\pi r^2 E = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$$

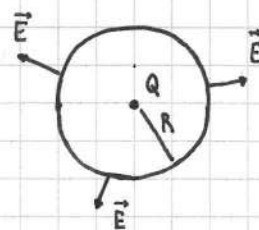
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

DA CUI SI CAPISCE CHE IL CAMPO ELETTRICO NON VARIA AL VARIARE DELLA POSIZIONE DEL PUNTO CONSIDERATO.

CASO ESTERNO SFERA

IN QUESTO ESEMPIO CONSIDERIAMO UN PUNTO LENERICO ESTERNO AD UNA SUPERFICIE

SPERICA CARICA, COME NEL SEGUENTE SCHEMA:



OVVIAMENTE ANCHE QUI IL VERSO DEL CAMPO ELETTRICO È RADIALE E IL FLUSSO PUÒ ESSERE SEMPLICEMENTE CALCOLATO COME:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi r^2$$

DA CUI, USANDO LA LEGGE DI GAUSS, SI OTTIENE:

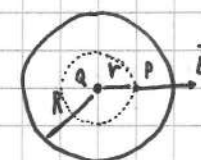
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

CHE DI FATTO È L'ESPRESSIONE DEL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME.

CASO INTERNO SFERA

ANCHE QUI CONSIDERIAMO UNA SFERA CARICA CON DENSITÀ DI CARICA VOLUMETRICA ρ .

PONIAMO LA NOSTRA SUPERFICIE CHIUSA ALL'INTERNO DELLA SFERA, COME IN FIGURA:



SAPENDO CHE $r < R$ CALCOLIAMO IL FLUSSO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE GAUSSIANA:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi r^2$$

APPLICANDO LA LEGGE DI GAUSS OTTENIAMO:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{\epsilon_0}$$

OSSERVATO CHE $\rho = \frac{q_{tot}}{V_{tot}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ AVREMO:

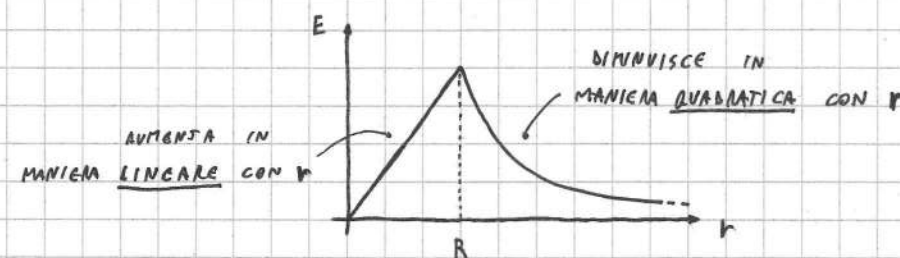
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{r^3 Q}{R^3 \cdot \epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{rQ}{R^3} \hat{u}_r$$

VERSO RADIALE

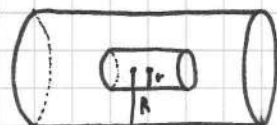
AL VARIARE DI r L'ANDAMENTO DEL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA Q

AVRÀ LA SEGUENTE FORMA:



CASO INTERNO CILINDRO

CONSIDERIAMO UNA UN CILINDRO PIENO CON DENSITA' DI CARICA VOLUMETRICA ρ
E PROVIAMO A DETERMINARE IL CAMPO ELETTRICO GENERATO ALL'INTERNO.



IL CAMPO ELETTRICO SARÀ RADIALE RISPETTO ALLA SUPERFICIE LATERALE DELLA NOSTRA
SUPERFICIE GAUSSIANA, DUNQUE POSSIAMO SCRIVERE:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2\pi r \cdot L \cdot E$$

DA CUI, APPLICANDO LA LEGGE DI GAUSS:

$$2\pi r \cdot L \cdot E = \frac{\rho \cdot \pi r^2 \cdot L}{\epsilon_0}$$

QUI VIENE ESPRESSA LA CARICA INTERNA
ALLA NOSTRA SUPERFICIE QUANTO IL VOLUME SARA' QUELLO
RACCHIUSO DALLA SUPERFICIE GAUSSIANA

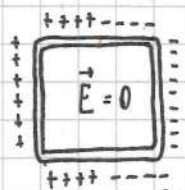
$$E = \frac{\rho \pi r^2 L}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

I CONDUTTORI

I CONDUTTORI SONO MATERIALI CON CARICHE (CIOE' ELETTRONI) LIBERE DI MUOVERSI
AL SUO INTERNO. IL CONDUTTORE PUO' ESSERE CARICO O NO E IN CASO ALTERNATIVO
LE CARICHE VANNO A POSIZIONARSI ESTERNAMENTE SULLA SUA SUPERFICIE. ~~NON~~
IN TAL CASO SI DICE CHE IL CONDUTTORE E' IN **EQUILIBRIO ELETTROSTATICO** E QUINDI
LE CARICHE SONO FERME.

INOLTRE IL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ ALL'INTERNO DI UN CONDUTTORE IN EQUILIBRIO
ELETTROSTATICO E' NULLO, INFATTI QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA PRENANNO INTERNO AL CONDUTTORE

LA CARICA INTERNA SARÀ NULLA (E QUINDI IL FLUSSO E UGUALE IL CAMPO
ELETTRICO) DAL MOMENTO CHE E' TUTTA CONCENTRATA SULLA SUPERFICIE
ESTERNA.



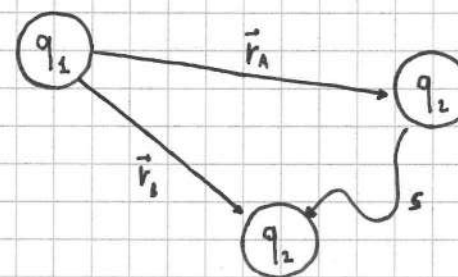
CAVITA' DI
FARADAY

IL MOTIVO PER IL QUALE SI CONCENTRANO LE CARICHE E' PERCHE' LE CARICHE
IN ECCESSO SI RESPINNO TRA DI LORO (GLI ELETTRONI SI RESPINNO) E ANCHE SI
ALLONTANANO FINCHE' NON POSSONO PIU' FARLO, CIOE' UNA VOLTA RAGGIUNTA LA SUPERFICIE
ESTERNA DEL CONDUTTORE.

FORZA ELETTROSTATICA E FORZA CONSERVATIVA

PRIMA DI INTRODURRE IL PROSSIMO ARGOMENTO CHIEDIAMOCI SE ABBIAMO SENSO
PARLARE DI FORZA ELETTRICA IN TERMINI DI FORZA CONSERVATIVA.

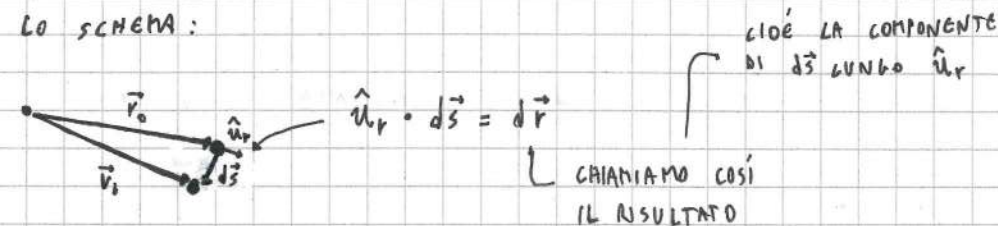
PER RISPONDERE A QUESTO QUESTIONE DOBBIAMO ^{VEDERE} SE IL LAVORO DIPENDE O NO DAL
PERCORSO FATTO, CONSIDERIAMO QUINDI IL SEGUENTE SCHEMA:



PER CALCOLARE IL LAVORO DOVREMO SOMMARE IL PRODOTTO TRA FORZA E PICCOLO
INTERVALLO DI SPAZIO $d\vec{s}$, IN MODO TALE CHE LA SOMMA DI QUESTI INTERVALLI
CI DIA $\vec{s}$:

$$L_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \hat{u}_r \cdot d\vec{s}$$

A QUESTO PUNTO OCCORRE SOFFERMARSI UN ATTIMO SUL SIGNIFICATO DI $\hat{u}_r \cdot d\vec{s}$,
CARIAMOLO CONSIDERANDO LO SCHEMA:



IL CHE CI PERMETTE DI SCRIVERE:

$$\begin{aligned}
 L_{ab} &= \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_a^b \frac{1}{r^2} dr \\
 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_a} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_b}
 \end{aligned}$$

MA QUINDI SE L_{ab} PUÒ ESSERE ESPRESSO IN FUNZIONE DI r_a E r_b ESSO NON DIPENDE DAL PERCORSO FATTO E LA FORZA ELETTROSTATICA È CONSERVATIVA.

DEFINIAMO IL RISULTATO OTTENUTO **ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA** E SCRIVEREMO:

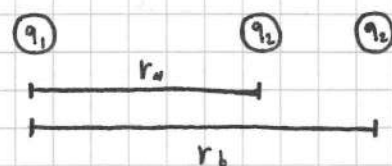
$$L_{ab} = U_a - U_b = -\Delta U$$

POICHÉ PARLAMO DI ENERGIA ESPRIMEREMO QUESTA NUOVA GRANDEZZA IN JOULE, INOLTRE COME ABBIAMO FATTO PER L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE DEFINIAMO ANCHE IN QUESTO CASO UNO ZERO.

PER CONVENZIONE LO ZERO È POSTO PER $r \rightarrow +\infty$, DOVE L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA TENDE A ZERO. (QUESTO IN CASO DI $q_1 \cdot q_2 > 0$)

ESEMPIO

SI CONSIDERA LO SCHEMA:



NEL CASO IN CUI q_2 SI ALLONTANI AVREMO CHE:

$$q_1 \cdot q_2 > 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{È STATA TOLTA ENERGIA POT. E AVV. CINET.} \\ L_{ab} > 0 \text{ (LA F.E.C. HA)} \end{array} \right)$$

$$q_1 \cdot q_2 < 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{È STATA AUMENTATA EN. POTENZIALE, È UN PÒ COME} \\ \text{SE FOSSEMO DUE MASSE} \end{array} \right) \quad L_{ab} < 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{LA FORZA ELETTROSTATICA} \\ \text{HA TOLTO ENERGIA E NE HA AUMENTATA DI POTENZIALE} \end{array} \right)$$

NEL CASO IN CUI q_2 SI AVVICINI AVREMO CHE:

$$q_1 \cdot q_2 > 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{AUMENTA L'ENERGIA POTENZIALE} \\ L_{ab} < 0 \text{ (LA FORZA ELETTROSTATICA HA TOLTO ENERGIA A } q_2 \text{ E} \\ \text{NE HA AUMENTATA DI POTENZIALE)} \end{array} \right)$$

$$q_1 \cdot q_2 < 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{PENSALE COME 2 MASSE} \\ L_{ab} > 0 \text{ (LA FORZA ELETTROSTATICA HA TOLTO ENERGIA POTENZIALE} \\ \text{E NE HA AUMENTATA DI CINETICA A } q_2 \text{).} \end{array} \right)$$

ESEMPIO PIÙ CARICHE

ORA POTREMO CHIEDERCI COSA SUCCEDERÀ NEL CASO IN CUI SIANO PRESENTI PIÙ CARICHE NEL NOSTRO SISTEMA:

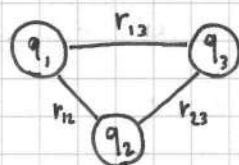
- 1 CARICA: PER POSIZIONARE QUI LA CARICA q_1 LA FORZA ELETTROSTATICA AVRÀ COMPIUTO UN LAVORO NULLO E L'ENERGIA POTENZIALE DI q_1 SARÀ 0.

$$\textcircled{q_1} \quad U = 0$$

- 2 CARICHE: PER SPOSTARE LA PRIMA CARICA (q_1) LA FORZA ELETTROSTATICA NON AVRÀ SVOLTO LAVORO MA PER SPOSTARE LA SECONDA SÌ, QUESTO DARÀ UN'ENERGIA POTENZIALE AL SISTEMA PARIA:

$$\textcircled{q_1} \xrightarrow{r_{12}} \textcircled{q_2} \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

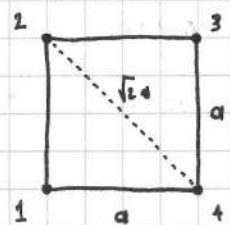
- 3 CARICHE: PER POSIZIONARE LA PRIMA CARICA NON SARÀ STATO SVOLTO LAVORO, MA PER POSIZIONARE LA SECONDA SI (A CAUSA DELLA PRIMA) MENTRE PER LA TERZA ANCHE (A CAUSA DELLE PRIME DUE)



$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} \right]$$

Esercizio:

SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE IL LAVORO SVOLTO PER POSIZIONARE 4 CARICHE (1) POSITIVE AI VERTICI DI UN QUADRATO DI LATO a :



$$U_1 = 0 \quad U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a}$$

$$U_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{\sqrt{2}a} \right] \quad U_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[2 \cdot \frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{\sqrt{2}a} \right]$$

SI OSSERVI CHE SE ANCHÉ INSENTE LE CARICHE NELL'ORDINE 1-2-3-4 LE AVESSI INSENTE IN ORDINE DIVERSO IL LAVORO TOTALE NON SAREBBE CAMBIATO, SAREBBE RIMASTO:

$$L_{TOT} = - \sum_{i=2}^4 U_i = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

HO MESSO IL MINUS PERCHÉ ABBIAMO DEFINITO IL LAVORO COME $-\Delta U = U_i - U_f$ E POICHÉ $U_i = 0$ IL LAVORO SARÀ $-U_f$.

LA DIFFERENZA DI POTENZIALE

IN PRECEDENZA ABBIAMO DEFINITO IL CAMPO ELETTRICO COME LA FORZA ESERCITATA DA UNA CARICA (L'ENERGIA DEL CAMPO) SULL'UNITÀ DI CARICA, LOÈ $1C$ (POSITIVA PER CONVENZIONE). IN QUEL CASO LA FORZA CAMBIAVA IN MODULO E VERSO SE SI CONSIDERAVANO PUNTI DIVERSI DELLO SPAZIO E DUNQUE CAMBIAVA IL CAMPO ELETTRICO.

IN QUESTO CASO FACCIAMO UNA COSA SIMILE, IMMAGINIAMO DI PRENDERE L'UNITÀ DI CARICA E POSIZIONARLA NELLO SPAZIO, ESSA SE DOVESSE ESSERCI ALTRE CARICHE NEL SISTEMA, PER ESSERE STATA POSIZIONATA IN QUEL PUNTO ACQUISIREBBE UNA CERTA ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA, CHE VAREBBE AL VARIARE DELLA POSIZIONE DELLE CARICHE NEL SISTEMA.

CHIAMEREMO **DIFFERENZA DI POTENZIALE** IL RAPPORTO FRA LA DIFFERENZA DI ENERGIA POTENZIALE DELLA CARICA, CHE DIREMO DI PROVA, E IL VALORE DI TALE CARICA DI PROVA:

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q_0} = \frac{-\Delta L_{ab}}{q_0} \left[\frac{J}{C} \right] [VOLT]$$

INTRODUCIAMO ORA UN ALTRO MODO DI MISURARE L'ENERGIA, CHE ANCHÉ ESPRIMERE IN JOULE, ESPRIMEREMO IN **ELETTRONVOLT** (UNITÀ DI MISURA SPESSO USATA A LIVELLO SUBATOMICO). È IMMEDIATO NOTARE LA RELAZIONE:

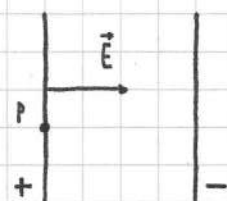
$$1V = \frac{1J}{1C} \quad \Rightarrow \quad 1V \cdot 1C = 1J$$

PERANTO L'ELETTRONVOLT VARIA:

$$1eV = 1V \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} C = 1,6 \cdot 10^{-19} J$$

ESERCIZIO:

SUPPONIAMO DI AVERE 2 PLACCHE CARICHE TRA LE QUALI C'È UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE DI $|\Delta V_{+-}| = 100 \text{ V}$ (QUESTO SIGNIFICA CHE SE PRENDIAMO UNA CARICA DA UN COULOMB E LA CALCOLIAMO L'ENERGIA POTENZIALE QUANDO SI TROVA SU UNA PLACCA E POI SULL'ALTRA PLACCA E POI DIVIDIAMO LA DIFFERENZA ~~DELLA~~ DI QUESTI DUE VALORI PER 1 C OTTIENIAMO 100 V) COME IN FIGURA:



IN P VIENE POSTO UN PROTONE CON ENERGIA CINETICA INIZIALE APPROSSIMABILE A 0 J. VOLENDO TROVARE LA VELOCITÀ DEL PROTONE AL RAGGIUNGIMENTO DELLA PLACCA - POSSIAMO APPLICARE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$K_f = U_i - U_f = \frac{-\Delta U}{q} \cdot q = -\Delta V_{ab} \cdot q$$

NON CI INTERESSIAMO AL SEGNO IN QUESTO CASO

DA CUI AVREMO:

$$V_f = \sqrt{\frac{2 \Delta V_{ab} \cdot q}{m_p}} = 1,38 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

IL POTENZIALE ELETTRICO

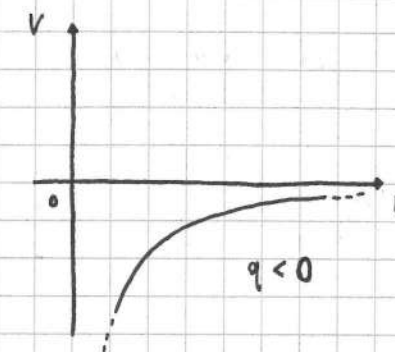
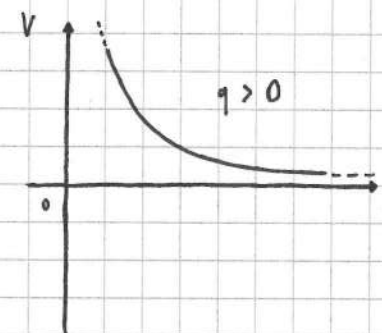
SUPPONIAMO DI AVERE UNA CARICA q IN UN SISTEMA, PRENDIAMO ORA q_0 (UNA CARICA UNITARIA POSITIVA) E SPOSTIAMOLA NELLO SPAZIO CALCOLANDO DI VOLTA IN VOLTA LA SUA ENERGIA DI POTENZIALE. EBBENE DEFINIAMO IL **POTENZIALE ELETTRICO** (DI UNA CARICA PUNTIFORME) COME IL RAPPORTO TRA L'ENERGIA POTENZIALE E IL VALORE DELLA

CARICA q_0 :

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

L'ENERGIA POTENZIALE DIPENDE DALLA POSIZIONE DELLA CARICA

VA DI CONSERVARE CHE L'ANDAMENTO DEL POTENZIALE ELETTRICO AL VARIARE DI r SARÀ:

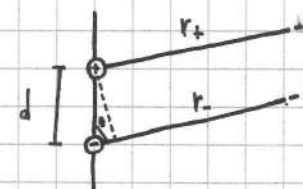


SI OSSERVI INOLTRE CHE IL POTENZIALE DOVUTO A PIÙ CARICHE PUNTIFORMI PRESENTI A GENERARE IL CAMPO ELETTRICO SARÀ LA SEMPLICE SOMMA DEI CONTRIBUTI DI OGNI SINGOLA CARICA q_i :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

POTENZIALE DI UN DIPOLO

SUPPONIAMO DI AVERE UN DIPOLO ELETTRICO E, PER SEMPLICITÀ, DI TROVARGI AD UNA DISTANZA r DAL DIPOLO MOLTO MAGGIORE RISPETTO A d (LA DISTANZA CHE SEPARA LE 2 CARICHE DEL DIPOLO):



QUESTA SEMPLIFICAZIONE CI PERMETTE DI RISCUOVERE L'ESPRESSIONE DEL POTENZIALE DOVUTO AL DIPOLO:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

NELLA FORMA PIÙ COMPATTA:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{d \cdot \cos\theta}{r^2} \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}$$

MOMENTO DEL DIPOLO

IL POTENZIALE DI UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA

DOPO AVER VISTO L'ESPRESSIONE DEL POTENZIALE ELETTRICO DI UNA CARICA q DI UN INSIEME DI CARICHE ANALIZZIAMO COSA SUCCEDA AD UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA.

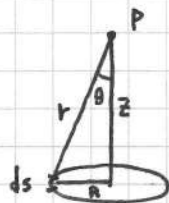
COME AL SOLITO CONSIDEREREMO INIZIALMENTE UN PICCOLO VOLUMETTO DEL CORPO CARICO ED ESPRIMEREMO IL POTENZIALE ELETTRICO DI TALE BLOCCETTO, POI INTEGREREMO IL RISULTATO PER OTTENERE IL RISULTATO POTENZIALE ELETTRICO DEL CORPO INTERO:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} \Rightarrow V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{r}$$

VEDREMO ORA IL CALCOLO DEL POTENZIALE ELETTRICO IN ALCUNI CASI GIÀ STUDIATI IN PRECEDENZA.

CASO ANELLO CARICO

CONSIDERIAMO UN ANELLO CARICO E UN PUNTO P SUL SUO ASSE CENTRALE:



E CHIEDIAMOCI QUANTO VALGA IL POTENZIALE ELETTRICO NEL PUNTO P . PER PRIMA COSA TROVIAMO IL POTENZIALE ELETTRICO IN P DOVUTO AL TRATTO ds :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda ds}{r}$$

CARICA DEL TRATTO ds

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda ds}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

A QUESTO PUNTO NON CI RESTA CHE INTEGRARE LUNGO TUTTA LA CIRCONFERENZA PER AVERE IL POTENZIALE ELETTRICO DELL'ANELLO:

$$V(z) = \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda ds}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 \cdot \sqrt{R^2 + z^2}}$$

QUESTA È LA CARICA TOTALE q DEL CORPO

SI OSSERVI L'IMPORTANTE UGUAGLIANZA TRA E_z E DERIVATA PARZIALE RISPETTO A z DI $V(z)$:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{z} \right) \cdot \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$= -E_z$

COMPONENTE LUNGO z DEL CAMPO ELETTRICO

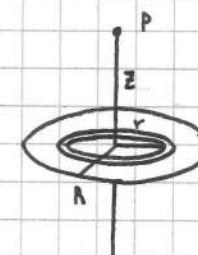
SI NOTI INOLTRE CHE NEL CASO LIMITE $z \gg R$ OTTENIAMO:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{z}$$

OVVERO IL POTENZIALE DI UNA CARICA PUNTIFORME.

CASO DISCO CARICO:

NEL CASO DI UN DISCO CARICO LO SCHEMA SARÀ IL SEGUENTE:



SFRUTTANDO QUANTO APPENA DETTO SULL'ANELLO CARICO PROVIAMO A CALCOLARE IL POTENZIALE ELETTRICO DI QUESTO DISCO CARICO:

$$V(z) = \int_0^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \int_0^R \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}}$$

SAREBBE $d(r^2)$

ABBIAMO MESSO r NELLO dr

SVOLGENDO I CALCOLI OTTENIAMO:

$$V(z) = \frac{\sigma \pi}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr = \frac{\sigma \pi}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \left[2 \sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right)$$

ANCHE IN QUESTO CASO, DERIVANDO $V(z)$ RISPETTO A z , OTTENIAMO IL VALORE DELLA COMPONENTE LUNGO z DEL CAMPO ELETTRICO:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{2 \sqrt{R^2 + z^2}} \cdot 2z - 1 \right) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right)$$

$$= -E_z$$

RELAZIONE FRA CAMPO E POTENZIALE ELETTRICI

IN QUESTO BREVE PARAGRAFO VEDREMO PIÙ IN DETTAGLIO IL MOTIVO PER IL QUALE DERIVANDO IL POTENZIALE ELETTRICO ABBIAMO TROVATO UNA COMPONENTE DEL CAMPO ELETTRICO. DALLA DEFINIZIONE DEL POTENZIALE ELETTRICO ABBIAMO:

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q_0} = \frac{-L_{ab}}{q_0} = \frac{-F \cdot \Delta s}{q_0} = \frac{-E \cdot q_0 \cdot \Delta s}{q_0} = -E \cdot \Delta s$$

DA CUI SI OTTIENE:

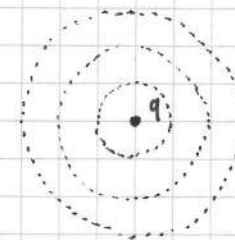
$$E = - \frac{\Delta V_{ab}}{\Delta s} \stackrel{\text{INSTANTANEO LIMITE}}{\rightarrow} - \frac{dV_{ab}}{ds}$$

E POICHÉ SI STA PARLANDO DI FUNZIONI VETTORIALI (VEDI ANALISI 2) QUELLO CHE ABBIAMO SCRITTO VALE SINGOLARMENTE PER OGNI COMPONENTE DI E E PER FUNZIONE COMPONENTE DI V_{ab} , DUNQUE:

$$\vec{E} = \left(-\frac{\partial V_{ab}}{\partial x}, -\frac{\partial V_{ab}}{\partial y}, -\frac{\partial V_{ab}}{\partial z} \right) = -\vec{\nabla} V_{ab}$$

LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

COME SI INTUISCE DAL NOME DEFINIAMO SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE UNA SUPERFICIE ENTRO LA QUALE IL POTENZIALE NON VARIA. NEL CASO DI UNA CARICA PUNTIFORME LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI SONO LE SFERE CONCENTRICHE CON CENTRO COINCIDENTE CON LA CARICA.



D'ALTROVE SI HA CHE:

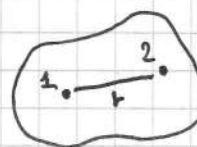
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} = \text{cost} \Leftrightarrow r = \text{cost}$$

UN'INTERESSANTE PROPRIETÀ DELLE LINEE DI FORZA È CHE SONO SEMPRE PERPENDICOLARI ALLE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI.

QUESTE ULTIME SONO UN POCO COME DEI INSERNI DI LIVELLO E DA QUESTA OSSERVAZIONE SEMPLICE ABBIAMO CAPITO IL PERCHÉ DELLA PERPENDICOLARITÀ (IL CAMPO ELETTRICO È SEMPRE DIRETTO VERSO LA DIREZIONE DOVE IL POTENZIALE ELETTRICO AUMENTA PIÙ VELOCEMENTE).

POTENZIALE ELETTRICO E CONDUTTORE CARICO

CONSIDERIAMO UN CONDUTTORE IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO (DUNQUE LE CARICHE SONO FERME), IL CONDUTTORE SI TROVERÀ TUTTO ALLO STESSO POTENZIALE ALTRIMENTI SI VERIFICHEREBBE CIÒ:

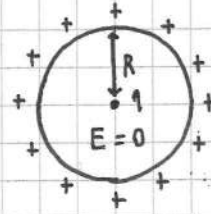


$V_1 \neq V_2$, PER ESEMPIO $V_1 > V_2$ DA CUI

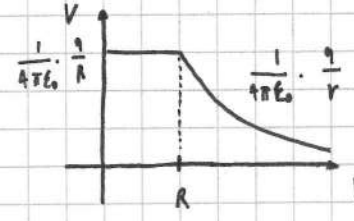
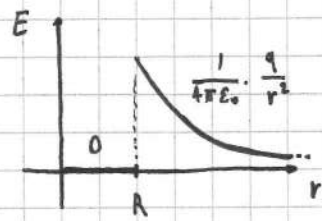
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r} > \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r} \Leftrightarrow q_1 > q_2 \text{ E VINCENDO}$$

LE CARICHE 1 E 2 INIZIEREBBERO A MUOVERSI

CONSIDERIAMO ORA UN CONDUTTORE SFERICO CARICO:

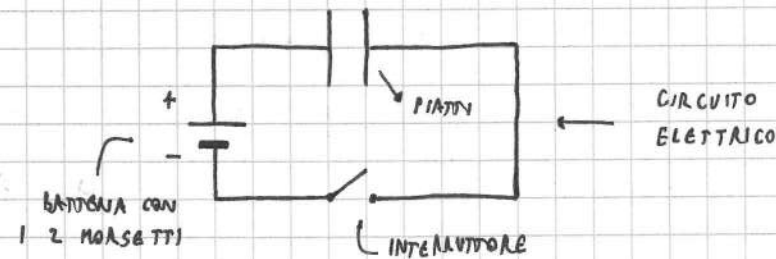


E PROVIAMO A COSTRUIRE IL GRAFICO DELL'ANDAMENTO DEL CAMPO ELETTRICO E QUELLO DEL POTENZIALE ELETTRICO AL VARIARE DI r (DISTANZA DAL CENTRO).



LA CAPACITÀ

INTRODUCIAMO QUESTA NUOVA GRANDEZZA A PARTIRE DA CIÒ CHE ABBIAMO DEFINITO FINO AD ORA. IL NOSTRO OBIETTIVO È QUELLO DI IMMAGAZIONARE DELLA CARICA IN UN SISTEMA PER FARLA USCIRE IN MANIERA CONTROLLATA, PER FARLO PORTARE VICINI 2 CONDUTTORI E GAZIE AD UNA BATTERIA (CHE TRASPORTA ENERGIA CHIMICA IN ENERGIA ELETTRICA) ACCUMULIAMO CARICHE OPPOSITE SUI PIATTI:



IL COMPITO DELLA BATTERIA È QUELLO DI MANTENERE COSTANTE LA DIFFERENZA DI POTENZIALE NEL CIRCUITO. L'OGGETTO COMPOSTO DAI 2 PIATTI VERRÀ CHIAMATO **CONDENSATORE** E I PIATTI SARANNO DETTI ARMATURE DEL CONDENSATORE.

NOTIAMO CHE SE LA BATTERIA CONTINUA AD ACCUMULARE SULLE ARMATURE DEL CONDENSATORE CARICHE POSITIVE DA UNA PARTE E CARICHE NEGATIVE DALL'ALTRA

IL CAMPO ELETTRICO CHE SI GENERA NEL MEZZO AUMENTA, E AUMENTA ANCHE LA DIFFERENZA DI POTENZIALE (IN REALTÀ BASTA CHE LE CARICHE AUMENTINO PER CONCLUDERE DALLA DEFINIZIONE DI ΔV CHE QUEST'ULTIMA AUMENTA).

IL FATTO CHE ALL'AUMENTARE DI q AUMENTI ΔV È OSSERVABILE Sperimentalmente E CI PERMETTE DI DARE LA SEGUENTE DEFINIZIONE DI **CAPACITÀ**:

$$q \propto \Delta V$$

$$C = \frac{q}{|\Delta V|}$$

QUESTA GRANDEZZA VERRÀ ESPRESSA IN **FARAD** (= COULOMB/VOLT) E SPESSO CI INCONTREREMO A LAVORARE CON SUOI SOTTOMULTIPLI, AD ESEMPIO $\mu F = 10^{-6} F$, $nF = 10^{-9} F$ o $pF = 10^{-12} F$.

COME OSSERVEREMO FRA POCO CON DEGLI ESEMPLI LA CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE NON DIPENDE NÉ DALLA CARICA ACCUMULATA NÉ DALLA DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA LE ARMATURE MA PIÙ TOSTO DALLA GEOMETRIA DI QUESTE ULTIME E DA CIÒ CHE VI STA IN MEZZO (ES. ARIA, VUOTO, ...).

CONDENSATORE PIANO

ESPRIMIAMO LA CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE PIANO CARICO. SAPPIAMO PER

UN ESERCIZIO GIÀ SVOLTO CHE NEL CASO DI UNA CAPINNA PIANA

IL CAMPO ELETTRICO GENERATO È: σ / ϵ_0 . SUPPLEMENTO

CHE IL CONDENSATORE ABBA UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA

UNIFORME POSSIAMO SCRIVERE:

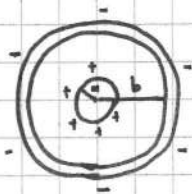
$$\Delta V = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \cdot q}{\sigma \cdot d} = \frac{\epsilon_0 \cdot A \cdot \sigma}{\sigma \cdot d} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$$

DA CUI SI CONCLUDE CHE C DIPENDE DALLA GEOMETRIA DELLE ARMATURE (A, d) e DAL CONTENUTO (ϵ_0).

CONDENSATORE SFERICO

CONSIDERATO OIA UN CONDENSATORE SFERICO (CIOÉ FORMATO DA UNA SFERA INTERNA E UN GUSCIO SFERICO ESTERNO) CARICO. DOBBIAMO OIA ESPRIMERE IL VALORE

DEL CAMPO ELETTRICO INTERNO AL CONDENSATORE (È MOLTO SEMPLICE):



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

A QUESTO PUNTO NON CI RESTA CHE INTEGRARE TRA a E b PER TROVARE LA DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA a E b :

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right]$$

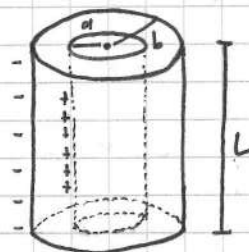
DA CUI OIA SARÀ SEMPLICISSIMO TROVARE LA CAPACITÀ DEL CONDENSATORE SFERICO:

$$C = \frac{q}{|\Delta V|} = \frac{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]}{4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{ab}{b-a}}$$

$\nearrow$ CON q SI INTENDE LA CARICA SULLE 2 ARMATURE (CHE È IDENTICA IN MOD. MA OPPOSTA IN SEGNO)
 $\nwarrow$ HO CAMBIATO IL SEGNO PER IL VALORE ASSOLUTO ($b > a$)

CONDENSATORE CILINDRICO

UN ALTRO CONDENSATORE SPESSE UTILIZZATO È QUELLO CILINDRICO. È FORMATO DA UN CILINDRO CENTRALE E UN GUSCIO CILINDRICO ESTERNO, COME IN FIGURA:



PER PRIMA COSA DOBBIAMO ESPRIMERE IL CAMPO ELETTRICO IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE ALL'INTERNO DEL CONDENSATORE (DI FATTO TRA a E b).
 COME ABBIAMO GIÀ OSSERVATO IN PRECEDENZA IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME È LO STESSO GENERATO DA UNA DISTRIBUZIONE SFERICA DI CARICA, IN QUESTO CASO SI TRATTA COME IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN CILINDRO PIENO (CARICA UNIFORMEMENTE) SIA LO STESSO DEL FILO RETTILINEO PASTO SUL SUO ASSE. PERTANTO:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$$

DA CUI SI TROVA LA DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA LE ARMATURE DEL CONDENSATORE COME:

$$\Delta V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$\nearrow$ $\vec{r}$ E $\vec{E}$ SONO $\perp$

$$= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln b - \ln a) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

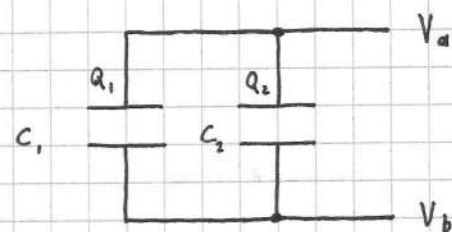
DA CUI OIA È IMMEDIATO TROVARE LA CAPACITÀ DEL CONDENSATORE:

$$C = \frac{q}{|\Delta V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot q}{\lambda \cdot \ln \frac{b}{a}} \stackrel{q = \lambda L}{=} 2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{L}{\ln \frac{b}{a}}$$

CONDENSATORI IN PARALLELO E IN SERIE

POTREBBE CAPITARE CHE IN UN CIRCUITO ELETTRICO COMPARIANO PIÙ DI UN CONDENSATORE, IN TAL CASO POTREBBE ESSERE UTILE SAPER CALCOLARE LA CAPACITÀ DEL SINGOLO CONDENSATORE CHE, SOSTITUITO AL POSTO DI TUTTI GLI ALTRI (NEL SENSO CHE TOLCIAMO TUTTO E INSERIAMO SOLO QUESTO UNO), NON FACCIANO VARARE LE PROPRIETÀ DEL CIRCUITO. ANALIZZEREMO 2 CASI IN CUI I CONDENSATORI ASSUMONO PARTICOLARI CONFIGURAZIONI.

DIREMO CHE 2 CONDENSATORI SONO IN **PARALLELO** QUANDO LA DIFFERENZA DI POTENZIALE AI LORO CAPI È LA STESSA, COME IN FIGURA:



CHIAMEREMO INVECE **CAPACITÀ EQUIVALENTE** LA CAPACITÀ DEL CONDENSATORE CHE HA LO STESSO EFFETTO DEI 2 CHE HO RAPPRESENTATO.

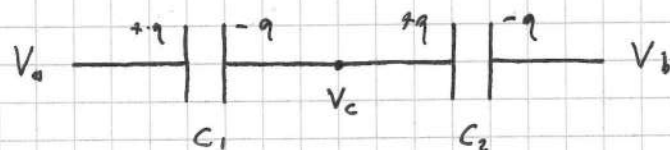
SAPENDO CHE:

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 \quad Q_{TOT} = Q_1 + Q_2$$

SI OTTIENE:

$$C_{Eq} = \frac{Q_{TOT}}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

DIREMO INVECE CHE 2 CONDENSATORI SONO IN **SERIE** SE LA CARICA AI CAPI DEI CONDENSATORI È LA STESSA, CIÒ È:



E SAPENDO CHE:

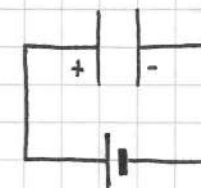
$$Q = Q_1 = Q_2 \quad \Delta V_{ab} = \Delta V_{c1} + \Delta V_{c2}$$

SI OTTIENE:

$$\Delta V_{ab} = \Delta V_{c1} + \Delta V_{c2} \quad \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \Rightarrow C_{Eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

ACCUMULO DI ENERGIA IN UN CAMPO ELETTRICO

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE CIRCUITO ELETTRICO:



PER SPOSTARE LE CARICHE SULLE ARMATURE DEL CONDENSATORE LA BATTERIA AVRÀ SVOLTO DEL LAVORO, IL VALORE PRECISO DI QUESTO LAVORO È CALCOLABILE COME:

$$dL = dU = \Delta V \cdot dq \\ = \frac{q}{C} \cdot dq$$

DA CUI, INTEGRANDO TRA 0 (SUPPONIAMO CHE IL CONDENSATORE SIA INIZIALMENTE SCARICO) E q_f (LA CARICA FINALE ACCUMULATA SULLE ARMATURE) TROVEREMO IL LAVORO TOTALE SVOLTO:

$$L_{TOT} = \int_0^{q_f} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^{q_f} q dq = \frac{1}{C} \left[\frac{q^2}{2} \right]_0^{q_f} = \frac{1}{2} \frac{q_f^2}{C}$$

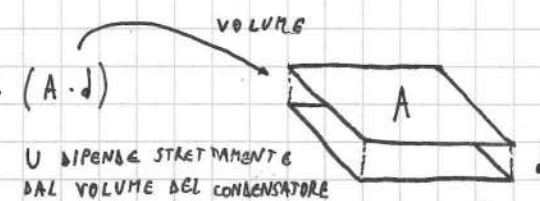
IN ALTERNATIVA POSSIAMO ESPRIMERE IL RISULTATO COME:

$$L_{TOT} = \frac{1}{2} \frac{q_f^2}{C} = \frac{1}{2} q_f \cdot \Delta V = \frac{1}{2} C \cdot \Delta V^2$$

$\uparrow$ CON $C = \frac{q_f}{\Delta V}$ $\uparrow$ CON $q_f = \Delta V \cdot C$

DA QUEST'ULTIMO MODO DI ESPRIMERE IL LAVORO E DUNQUE L'ENERGIA IMMAGAZINATA NEL CONDENSATORE, POSSIAMO, NEL CASO DI UN CONDENSATORE PIANO, DIRE QUANTO SORVE:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{C}{d} \frac{\Delta V^2}{\epsilon_0 \cdot A} \left(\frac{\Delta V \cdot d}{\epsilon_0 \cdot A} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (A \cdot d)$$

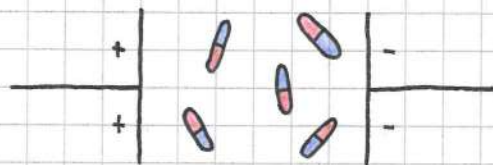


IL DIELETTICO

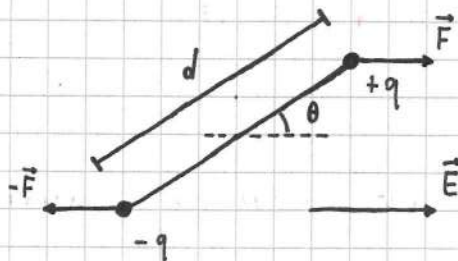
PER CREARE UN CONDENSATORE BISOLVA SEPARARE LE 2 ARMATURE CON QUALCOSA.
FARE IL VUOTO RISULTEREBBE TROPPO COMPLICATO PERTANTO VIENE SEMPRE INSERITA QUALCHE
SOSTANZA, VERAMENTE CHIAMATA **DIELETTICO**.

QUESTO È UN MATERIALE ISOLANTE I CUI ELETTRONI SONO QUINDI SALDAMENTE LEGATI AL
NUCLEO (NON SONO LIBERI DI MUOVERSI COME NEI CONDUTTORI).

ANALIZZIAMO ORA COSA SUCCEDE ALLE MOLECOLE DEL DIELETTICO QUANDO INIZIANO AD
ACCUMULARSI DELLE CARICHE SULLE ARMATURE DEL CONDENSATORE:



CON IL TEMPO SI ACCUMULANO SEMPRE PIÙ CARICHE, ESSE GENERANO QUINDI UN
CAMPO ELETTRICO E LE MOLECOLE DEL DIELETTICO TENDONO A **POLARIZZARSI** (CIOÈ
ORIENTARSI) NELLA DIREZIONE DI TALE CAMPO, COME MOSTRATO DI SEGUITO:



LA "LONA" POSITIVA DELLA MOLECOLA E LA "LONA" NEGATIVA RICEVONO DI FORZE OPPOSITE
IN VERSO E QUESTO GENERERÀ UN MOMENTO CHE FARMÀ RUOTARE LA MOLECOLA FINENDO
IN DIREZIONE $\vec{E}$. IN PARTICOLARE AVREMO:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{2} \overbrace{q E \sin \theta}^{\text{LE DUE FORZE SONO CONGRUE}} + \frac{d}{2} q E \sin \theta = dq E \sin \theta$$

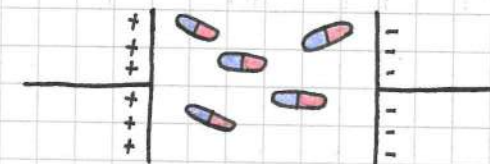
CHIAMO ORA UNA LANCETTA CHE AVEVAMO DEFINITO IN PRECEDENZA PARLANDO
DI DIPOLO ELETTRICO, IL MOMENTO DI DIPOLO: $p = d \cdot q$.
POICHÉ $\vec{\tau}$ È UN VETTORE DOBBIAMO ASSEGNARE UNA DIREZIONE E UN VERSO ALLA
QUANTITÀ:

$$\vec{\tau} = dq E \sin \theta = \vec{p} E \sin \theta$$

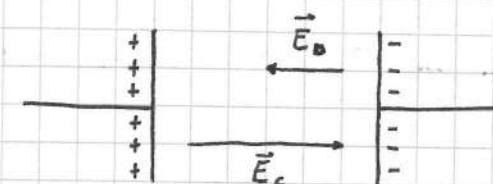
PER CONVENZIONE ASSUMIAMO COME VERSO POSITIVO DI $\vec{p}$ QUELLO CHE VA DALLA
CARICA NEGATIVA ALLA CARICA POSITIVA:



INQUE TORNIAMO AL NOSTRO CONDENSATORE AVREMO CHE QUANDO SI SARANNO
ACCUMULATE SUFFICIENTI CARICHE SULLE ARMATURE DA CREARE UN DISCRETO CAMPO
ELETTRICO ALLORA LE MOLECOLE SI POLARIZZERANNO:



IL FATTO È CHE ORIENTANDOSI IN QUESTA MANIERA GENERANO UN SECONDO
CAMPO ELETTRICO PIÙ DEBOLE DEL PRIMO (QUELLO GENERATO DAL CONDENSATORE)
ED OPPOSTO IN VERSO:



DOVE CON $\vec{E}_c$ HO INDICATO IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DAL CONDENSATORE E CON $\vec{E}_d$ QUELLO
GENERATO DAL DIELETTICO.

LA RISULTANTE DI QUESTI VETTORI SARÀ NELLA STESSA DIREZIONE (E NELLO STESSO VERSO) DI $\vec{E}_0$ MA MINORE IN MODULO. IN SOSTANZA:

$$E_R = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

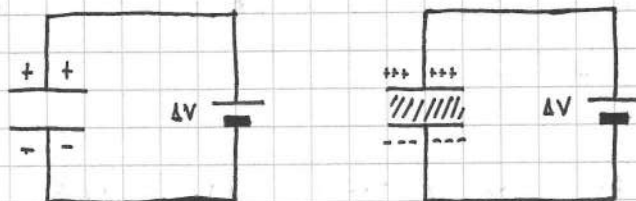
DOVE ϵ_r È DETTA **COSTANTE DIELETTICA RELATIVA** E ASSUME VALORI MAGGIORI DI 1. PER DEFINIZIONE NEL VUOTO (IN ASSENZA DI DIELETTICO) $\epsilon_r = 1$. IN SECONDO ALCUNI VALORI:

DIELETTICO	COSTANTE
AIR	1,0001
PORCELLANA	6,5
SILICIO	12
ACQUA	80

SI VERIFICA SPERIMENTALMENTE CHE LA CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE CARICATO DI UN MATERIALE DIELETTICO AUMENTA DI UN FATTORE ϵ_r :

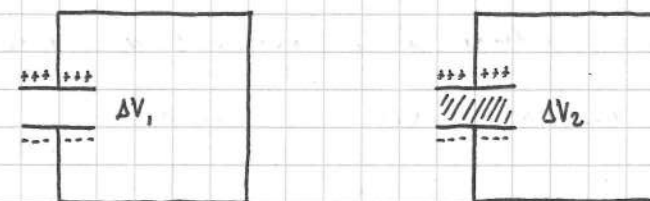
$$C' = C \cdot \epsilon_r$$

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI UN CONDENSATORE INIZIALMENTE SENZA DIELETTICO CARICATO DA UNA BATTENA CON ΔV COSTANTE VENIA IMPOSTO A UN DIELETTICO:



SE ΔV RIMANE INVARIATA E LA CAPACITÀ AUMENTA PER FORZA LA CARICA SULLE ARMATURE DEL CONDENSATORE

SE INVECE CI TROVIAMO IN UN CIRCUITO CHIUSO CON UN CONDENSATORE CARICO IN UN DIELETTICO E NE PORTIAMO UNO AL SUO INTERNO OTTIENIAMO:



MENTRE LA CARICA RIMANE COSTANTE (IL CIRCUITO È CHIUSO) LA CAPACITÀ AUMENTA (ABBIAMO INSERITO IL DIELETTICO) E QUINDI LA DIFFERENZA DI POTENZIALE DIMINUISCE ($\Delta V_1 > \Delta V_2$)

DIELETTICO IN CONDENSATORE SCOLLEGATO

VEDIAMO ORA COME VARIANO IN TERMINI QUANTITATIVI E NON SOLO DESCRITTIVI ALCUNE GRANDEZZE FONDAMENTALI ALL'INSERIMENTO DI UN DIELETTICO IN UN CONDENSATORE SCOLLEGATO DA UNA BATTENA E QUINDI CARICO:



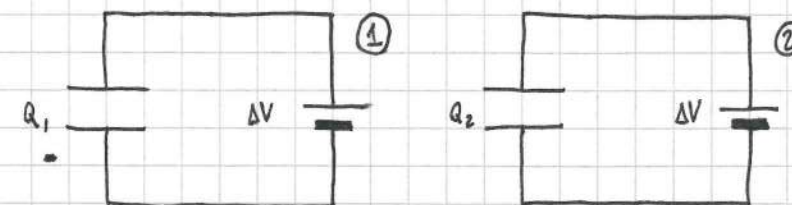
$$q_1 = q_2 \quad C_2 = C_1 \cdot \epsilon_r \quad E_2 = \frac{E_1}{\epsilon_r} \quad \Delta V_2 = E_2 \cdot d = \frac{E_1 \cdot d}{\epsilon_r} = \frac{\Delta V_1}{\epsilon_r}$$

$$U_2 = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{2C_1 \epsilon_r} = \frac{U_1}{\epsilon_r}$$

IN GENERALE SONO DIMINuite TUTTE LE GRANDEZZE ECCETTO LA CAPACITÀ E LA CARICA (CHE È RIMASTA COSTANTE).

DIELETTICO IN CONDENSATORE COLLEGATO ALLA BATTENA

LA SITUAZIONE SAREBBE LA SEGUENTE:



IN QUESTO CASO, POICHÉ A RIMANERE COSTANTE È LA DIFFERENZA DI POTENZIALE, UNA VOLTA CHE AVREMO INSETO IL DIELETTICO AVREMO:

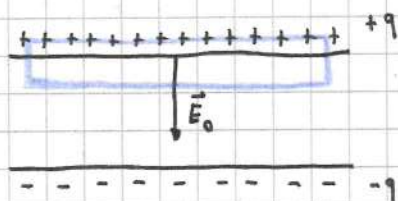
$$C_2 = \epsilon_r \cdot C_1 \quad \Delta V_1 = \Delta V_2 \quad E_2 = \frac{E_1}{\epsilon_r} \quad Q_2 = \Delta V_2 \cdot C_2 = \Delta V_1 \cdot C_1 \cdot \epsilon_r = q_1 \cdot \epsilon_r$$

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r C_1 \Delta V_1^2 = \epsilon_r U_1$$

LE GRANDI SONO TUTTE AUMENTATE ECCETTO OVVIAMENTE AL CAMPO (CHE DIMINUISCE) E ALLA CAPACITÀ ΔV (CHE ORA È COSTANTE).

LEGGE DI GAUSS CON DIELETTICO

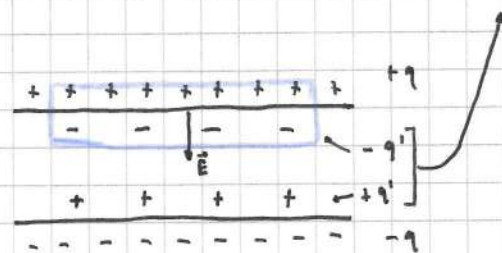
PROVIAMO A CALCOLARE IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA IN PRESENZA DI MATERIALE DIELETTICO.



IN ASSENZA DI DIELETTICO IL FLUSSO CHE PASSA ATTRAVERSO LA SUPERFICIE CHIUSA BLU VALE:

$$\Phi_{E_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = E_0 \cdot A \Leftrightarrow E_0 = \frac{q}{A \epsilon_0}$$

UNA VOLTA INTRODOTTO UN DIELETTICO ACCABBIAMO CHE AL PIATTO POSITIVO E A QUELLO NEGATIVO SI AVVICINERANNO CARICHE DI SEGNO OPPOSTO DEL DIELETTICO:



A QUESTO PUNTO LA CARICA PRESENTE NELLA STESSA SUPERFICIE CHIUSA BLU SARÀ CAMBIATA, E CON ESSA ANCHE IL CAMPO ELETTRICO. PIÙ PRECISAMENTE PER IL CAMPO ELETTRICO AVREMO:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{q}{A \epsilon_0 \epsilon_r} \quad [1]$$

MENTRE PER IL FLUSSO:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q - q'}{\epsilon_0} = E \cdot A \Leftrightarrow E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A} \quad [2]$$

USANDO LA [1] E LA [2] OTTIENIAMO:

$$E = \frac{q}{A \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A} \Leftrightarrow \frac{q}{\epsilon_r} = q - q' \Leftrightarrow q' = q \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

PER CUI, TORNANDO ALLA [2] È FACILE OTTENERE IL VALORE DEL FLUSSO GENERATO DAL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q - q'}{\epsilon_0} = \frac{q - q \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)}{\epsilon_0} = \frac{q - q + q/\epsilon_r}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

ECCO QUINDI CHE ANCHE PER LA LEGGE DI GAUSS VALE LA SOSTITUZIONE $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$ IN PRESENZA DI MATERIALE DIELETTICO.

LA CORRENTE ELETTRICA

QUANDO COLLEGHIAMO UNA BATTERIA AD UN CIRCUITO AVVENGONO AL SUO INTERNO DELLE REAZIONI CHIMICHE TALI PER CUI GLI ELETTRONI INIZIANO A FLUIRE ATTRAVERSO IL CIRCUITO. QUELLO CHE FAREMO ORA SARÀ DEFINIRE UNA GRANDEZZA CHE LEI LA QUANTITÀ DI CARICA PASSATA ATTRAVERSO UNA SEZIONE DEL CONDUTTORE NELL'UNITÀ DI TEMPO:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \left[\text{AMPERE} = \frac{C}{s} \right]$$

LA CHIAMEREMO **CORRENTE ELETTRICA**. POICHÉ LE CARICHE SI MUOVONO IN UN VERSO ABBIAMO BISOGNO DI DEFINIRNE UNO POSITIVO E UNO NEGATIVO, PER CONVENZIONE SI ASSUME COME VERSO POSITIVO QUELLO PERCORSO DALLE CARICHE POSITIVE (IN REALTÀ SAPPIAMO CHE SONO GLI e^- A MUOVERSI, MA QUESTA È UNA SEMPLICE CONVENZIONE):



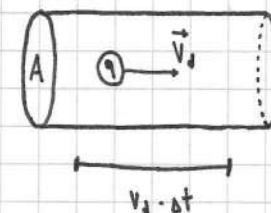
PARLEREMO MOLTO DI **CORRENTE CONTINUA** QUANDO LA CORRENTE ELETTRICA NON VARIERÀ IL VERSO.

QUANDO PENSIAMO ALLE CARICHE CHE SI MUOVONO NON DOBBIAMO IMMAGINARE UNA SINGOLA VELOCITÀ ASSOCIATA AD OGNI SINGOLA CARICA MA PIUTTOSTO BISOGNA PENSARE AD UNA NUVOLE DI CARICHE (PASSANO ESSENCI ANCHE 10^{20} O PIÙ ELETTRONI) IN MOVIMENTO LUNGO TUTTO IL CIRCUITO A VELOCITÀ MOLTO BASSA, DETTA **VELOCITÀ DI DERIVA**, RISPETTO A QUELLA DI ANTAGIONE TERMINA DELLE SINGOLE PARTICELLE.

IL MOTIVO PER IL QUALE LE LAMPADINE SI ACCENDONO SUBITO È PERCHÉ IL LENTO MOVIMENTO DELLA NUVOLE DI e^- GENERA COMunque UN $\vec{E}$ CHE SI PROPAGA ALLA VELOCITÀ DELLA LUCE METTENDO IN MOVIMENTO SUBITO GLI e^- DEL CONDUTTORE.

LA VELOCITÀ DI DERIVA

GRAZIE A QUESTA GRANDEZZA È POSSIBILE ESPRIMERE LA CORRENTE IN ALTRI TERMINI, MA INNA CALCOLIAMO LA QUANTITÀ DI CARICA ΔQ CHE ATTRAVERSA UN CONDUTTORE DI SEZIONE A IN UN TEMPO Δt AD UNA VELOCITÀ DI DERIVA V_d SAPENDO CHE n È IL NUMERO DI CARICHE PER UNITÀ DI VOLUME E q È IL VALORE DI TALI CARICHE:



$$\Delta Q = \underbrace{\left(\frac{C}{m^3} \right)}_{nq} \cdot \underbrace{\left(\frac{m^3}{m} \right)}_{V_d \cdot \Delta t \cdot A}$$

A QUESTO PUNTO POSSIAMO ESPRIMERE LA CORRENTE ELETTRICA COME:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nq V_d \cdot A$$

SI PUÒ DEFINIRE UNA GRANDEZZA DETTA **DENSITÀ DI CORRENTE** DIVIDENDO LA CORRENTE PER LA SEZIONE DEL CONDUTTORE A :

$$\vec{j} = nq \vec{V}_d$$

$$j = \frac{i}{A}$$

MA NON LA USEREMO SPESSO IN FUTURO.

LA RESISTIVITÀ

SI PUÒ VERIFICARE CHE LA DENSITÀ DI CORRENTE DIPENDE DALLE CARATTERISTICHE DEL MATERIALE (λ) E DAL CAMPO ELETTRICO (i), PER QUESTO DECIDIAMO DI INTRODURRE UNA GRANDEZZA ρ CHE DIREMO **RESISTIVITÀ** E DIPENDERÀ DALLE CARATTERISTICHE DEL MATERIALE:

$$\frac{E}{j} = \rho$$

IN REALTÀ NON È SEMPRE COSTANTE, MA AI FINI DEL NOSTRO STUDIO PUÒ ESSERE ASSUNTA COSTANTE.

L'UNITÀ DI MISURA SARÀ:

$$\underbrace{\frac{V}{m}}_{\text{CAMPO ELETTRICO}} \cdot \underbrace{\frac{m^2}{A}}_{\text{DENSITÀ DI CORRENTE}} = \underbrace{\frac{V}{A}}_{\text{OHM}} \cdot m = \underbrace{\Omega \cdot m}_{\text{OHM}}$$

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO UN FILO CONDUTTORE DI LUNGHEZZA L E SEZIONE A ATTRAVERSO CUI PASSA UNA CORRENTE i MM CON UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE ΔV :

$$\Delta V = E \cdot L \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{L} \Rightarrow j = \frac{E}{\rho} = \frac{\Delta V}{L} \cdot \frac{A}{i}$$

LA RESISTENZA

SI PUÒ OSSERVARE Sperimentalmente COME IN VENGONO IL RAPPORTO TRA DIFFERENZA DI POTENZIALE E CORRENTE ELETTRICA RIMANGA COSTANTE, PERTANTO SI DEFINISCE LA **RESISTENZA** COME:

$$R = \frac{\Delta V}{i} \quad [\text{OHM}, \Omega]$$

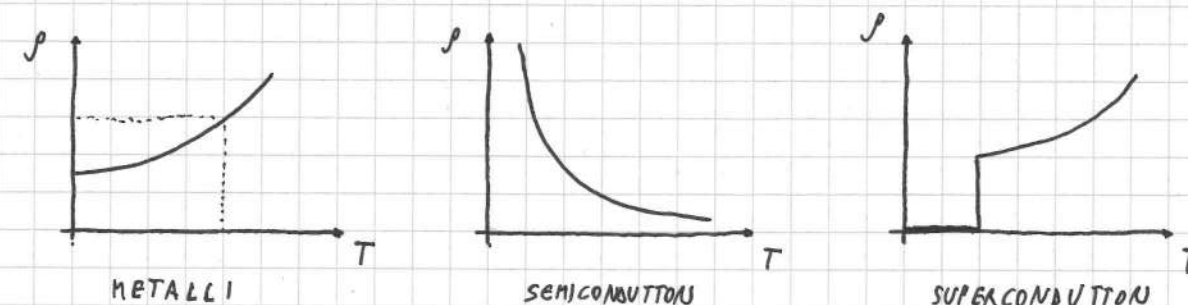
NEL PRECEDENTE ESEMPIO SI NOTA SUBITO COME LA RESISTENZA DIPENDE SOLO DALLE DIMENSIONI E DAL MATERIALE UTILIZZATO:

$$R = \frac{\Delta V}{i} = \rho \cdot \frac{L}{A} \quad (\text{CASO FILO CONDUTTORE})$$

CHIAMEREMO **CONDUCIBILITÀ** IL RECIPROCO DELLA RESISTIVITÀ.

RESISTIVITÀ E TEMPERATURA

NEI SEGUENTI GRAFICI È DESCRITTO L'ANDAMENTO DELLA RESISTIVITÀ IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA:



INTERESSANTE È OSSERVARE COME I SUPERCONDUTTORI OFFRANO RESISTENZA PRESSOCHÉ NULLA SOTTO CERTA TEMPERATURA.

LA FORZA ELETTRIMOTRICE

QUESTA LEGGE HA IL NOME DI MATERIALI **OHMICI** A TUTTI QUELLI CHE MANTENGONO COSTANTE IL RAPPORTO $\Delta V/i$, DUNQUE R . I SEMICONDUCTORI, UTILIZZATI NEI CIRCUITI ELETTRONICI, COME POSSIAMO VEDERE DAL GRAFICO CENTRALE DEL PARAGRAFO PRECEDENTE NON SONO OHMICI.

LA FORZA ELETTRIMOTRICE

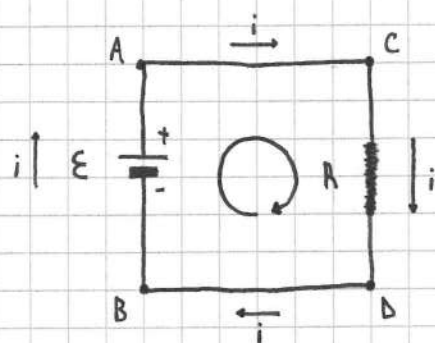
IN QUESTO PARAGRAFO NON INTRODUCIAMO NESSUNA NUOVA GRANDEZZA MA DAIAMO UN ALTRO NOME ALLA DIFFERENZA DI POTENZIALE. CHIAMEREMO INVECE **FORZA ELETTRIMOTRICE** LA ΔV GENERATA AI CAPI DI UNA BATTERIA, PIÙ PRECISAMENTE LA **F.E.M.** È DEFINITA COME IL LAVORO COMPIUTO PER SPOSTARE LE CARICHE SULLA CARICA STESSA:

$$f.e.m. = E = \frac{L}{\Delta q} = \frac{-\Delta U}{\Delta q} = \Delta V = V_2 - V_1$$

DUNQUE NONOSTANTE SI CHIAMI "FORZA" VERAMENTE ESPRESSA IN VOLT, SARÀ ANCHE CHIAMATA **TENSIONE**.

ANALISI DEL CIRCUITO

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE CIRCUITO ELETTRICO:



ASSUMENDO CHE I FILI NON OPPONGANO RESISTENZA POSSIAMO AFFERMARE CHE:

$$V_A = V_B$$

$$V_C = V_D$$

INOLTRE SIAMO ANCHE IN GRADO DI ESPRIMERE QUESTE RELAZIONI COME:

$$\begin{cases} V_A - V_B = E \\ V_C - V_D = iR \end{cases} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \searrow \ominus \end{matrix} \quad \begin{matrix} V_A - V_C - V_D + V_B = E - iR \\ \downarrow \\ 0 = E - iR \\ \downarrow \\ E = iR \end{matrix}$$

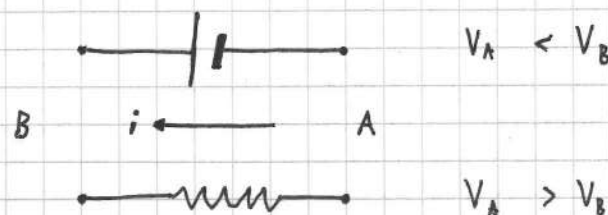
QUI C'È UNA
CAVITÀ DI
POTENZIALE

$R = \frac{\Delta V}{i}$

ABBIAMO VISTO CON QUESTO SEMPLICE CALCOLO CHE LA SOMMA ALGEBRAICA DELLE DIFFERENZE DI POTENZIALE NEL CIRCUITO È ZERO

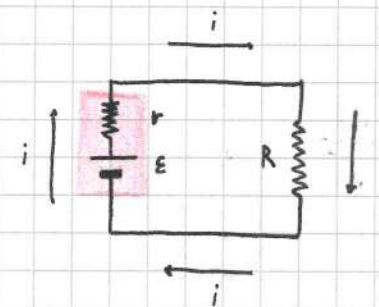
II LEGGE DI KIRCHHOFF (DELLE MAGLIE)

LA SECONDA LEGGE DI KIRCHHOFF AFFERMA CHE LA SOMMA ALGEBRAICA DELLE D.D.P. ALL'INTERNO DI UN CIRCUITO CHIUSO O **MAGLIA** È ZERO. ASSUNTO PER CONVENZIONE CHE:



PROVIAMO ORA A STUDIARE IL CASO IN CUI LA BATTENA OPPONGA UNA

RESISTENZA INTERNA:



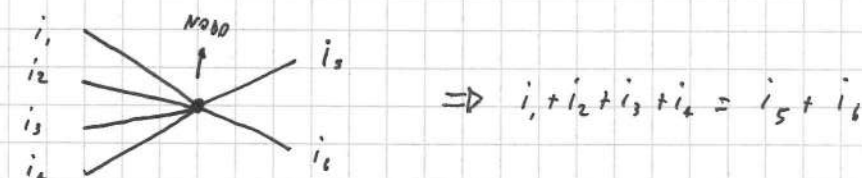
LA BATTENA CORRISPONDE ALLA ZONA CHE HO EVIDENZIATO IN ROSSO, ORA LA D.D.P. AI SUOI POCHI NON SARÀ LA F.E.M. MA SARÀ MINORE:

$$E - ir - iR = 0 \quad \Rightarrow \quad i(-r - R) = -E \quad \Rightarrow \quad i = \frac{E}{r + R}$$

IN QUESTO CASO POICHÉ LA CORRENTE È DIVERSA DA ZERO ANCHE L'ENERGIA ASSOCIATA ALLE PARTICELLE. QUEST'ULTIMA SI DISPENDE SOTTO FORMA DI CALORE O LUCE DAL COMPONENTE CHE HA OPPOSTO RESISTENZA.

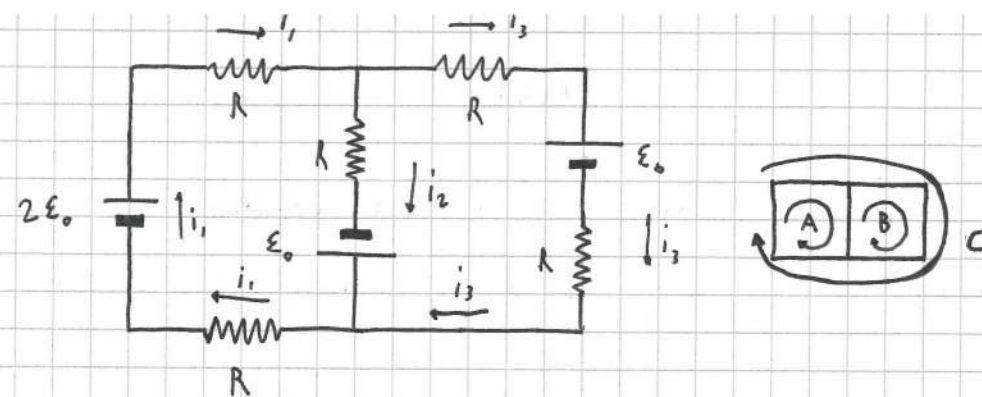
I LEGGE DI KIRCHHOFF (DEI NODI)

LA PRIMA LEGGE DI KIRCHHOFF AFFERMA CHE LA SOMMA DELLE CORRENTI CHE ENTRANO IN UN NODO DEVE ESSERE PARIA ALLA SOMMA DELLE CORRENTI CHE ESCONO DA TALE NODO:



ESEMPIO:

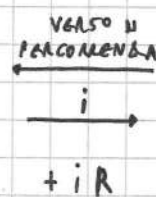
NELLA SEGUENTE PRIMA SCHEMATIZZAZIONE UN CIRCUITO COMPOSTO DA 3 MAGLIE E IN CUI SARANNO PRESENTI 2 NODI:



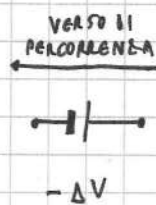
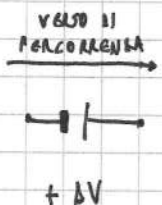
IMPOSTANDO IL SISTEMA DI EQUAZIONI AVREMO:

$$\begin{aligned} \text{LEGGI DEI NODI} \Rightarrow & \begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ A \Rightarrow 2E_0 - i_1 R - i_2 R + E_0 - i_1 R \\ B \Rightarrow -i_3 R - E_0 - i_3 R + E_0 + i_2 R \end{cases} \end{aligned}$$

REGOLA 1:



REGOLA 2:



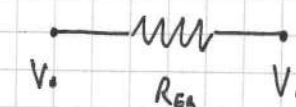
IL SISTEMA SI RISOLVE OTTENENDO:

$$i_1 = \frac{7}{8} \frac{E_0}{R} \quad i_2 = \frac{5}{4} \frac{E_0}{R} \quad i_3 = -\frac{3}{8} \frac{E_0}{R}$$

IL FATTO CHE i_3 SIA NEGATIVA VUOL DIRE CHE FLUIRÀ NEL VERSO CONTRARIO A QUELLO CHE ABBIAMO IPOTIZZATO.

RESISTORI IN SERIE E PARALLELO

SIMILMENTE A QUANTO DETTO PER I CONDENSATORI ANALIZZIAMO COSA SUGGERE COLLEGANDO IN SERIE E IN PARALLELO 2 RESISTORI. COMINCIANDO CON I RESISTORI IN SERIE:

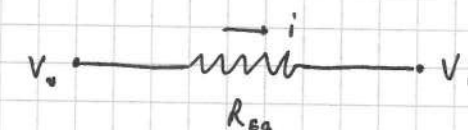
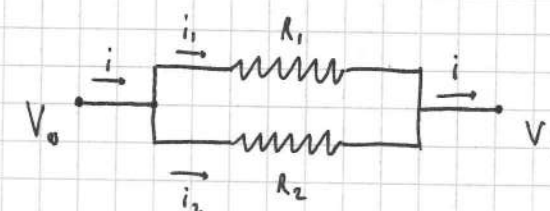


SAPENDO CHE $\Delta V_{ac} = \Delta V_{ab} + \Delta V_{bc}$ OTTENIAMO:

$$\Delta V_{ac} = \Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_{ac}}{i} = (R_1 + R_2) = R_{eq}$$

CONSIDERANDO INVECE DUE RESISTORI IN PARALLELO AVREMO:



PER RITROVARE IL VALORE DI R_{eq} BASTA OSSERVARE CHE LA d.d.p. ai capi di R_1 e R_2 È UGUALE:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{\Delta V_{ab}}{R_1} + \frac{\Delta V_{ab}}{R_2} \Rightarrow \frac{i}{\Delta V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

POTENZA NEI CIRCUITI ELETTRICI

SUPPONIAMO DI AVERE UN CIRCUITO CON BATTENA E RESISTENZA, DALLA DEFINIZIONE DI POTENZA POSSIAMO SCRIVERE:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{-\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta V \cdot \Delta q}{\Delta t} = i \cdot \Delta V = \overset{\text{QUANTITÀ DI CARICA SPORATA}}{e \cdot i}$$

SIMILMENTE NELLA RESISTENZA VERRÀ DISSIPATA ALCA POTENZA, L'UNICA DIFFERENZA SARÀ CHE ΔV SARÀ DIVERSO DA E PERCHÉ VARRÀ:

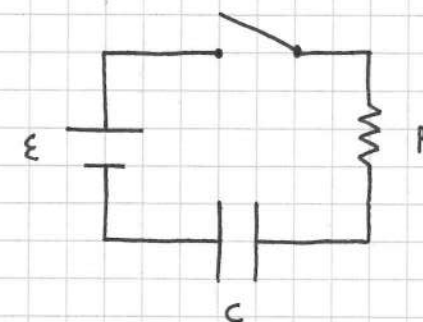
$$P = i \Delta V_R = \overset{\text{CADUTA DI POTENZIALE
GENERATA NELLA RESISTENZA}}{i \cdot i \cdot R} = i^2 R = \frac{\Delta V_R^2}{R}$$

ABBIAMO QUINDI VISTO COME L'ESPRESSIONE $P = i \cdot \Delta V$ SI TRASFORMA DIVERSAMENTE NEL CASO DI RESISTORI E BATTENE.

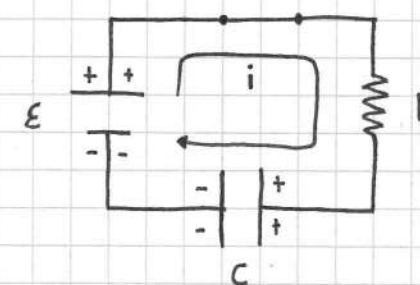
L'UNITÀ DI MISURA DI QUESTA POTENZA SARÀ IL **WATT**, W.

CIRCUITI RC (CANCA)

PER ADESSO ABBIAMO INTRODOTTO 2 COMPONENTI ELETTRONICI: LE RESISTENZE E I CONDENSATORI. METTENDOLI INSIEME NELLO STESSO CIRCUITO OTTENIAMO:



ALLA CHIUSURA DELL'INTERUTTORE LA BATTENA INIZIA A FAR SCORRERE DELLE CARICHE LUNGO IL CIRCUITO, GENERANDO DELLA CORRENTE:



MANO A MANO CHE PASSA IL TEMPO IL NOSTRO CONDENSATORE INIZIA A CARICARSI E AD AGIRE COME UNA BATTENA CHE SI OPPONE AL MOVIMENTO DELLE CARICHE IMPOSTO DALLA VERA BATTENA DEL CIRCUITO. DALLA LEGGE DELLE TACCE SARIAMO CHE DEVE VALERE L'EQUAZIONE:

$$E - iR - \frac{Q}{C} = 0$$

POICHÉ Q , E QUINDI i VARIANO NEL TEMPO VUOLIAMO STUDIARNE L'ANDAMENTO. PER PRIMA COSA RICORDIAMO CHE:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\text{PASSANDO AL LIMITE}} i = \frac{dQ}{dt}$$

QUELLA CHE OTTENIAMO È QUINDI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

$$\varepsilon - \frac{dq}{dt} R - \frac{q}{C} = 0$$

EFFETTUANDO QUALCHE SEMPLICE PASSAGGIO ALGEBRAICO:

$$\frac{dq}{dt} R = \varepsilon - \frac{q}{C} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{CR} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon C - q}{CR}$$

$$CR dq = (\varepsilon C - q) dt \quad \frac{dq}{\varepsilon C - q} = \frac{dt}{CR}$$

$$\int \frac{dq}{\varepsilon C - q} = \int \frac{dt}{CR} \quad -\ln(\varepsilon C - q) = \frac{t}{CR} + \text{cost.}$$

SCRIVENDO I 2 TERMINI COME ESPONENZIALI DI CUI LI PRENDIAMO DEL LOGARITMO:

$$e^{\ln(\varepsilon C - q)} = e^{-\frac{t}{RC} + \text{cost}} \quad \varepsilon C - q = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{\text{cost}} \quad q(t) = \varepsilon C - A e^{-\frac{t}{RC}}$$

CI MANCA ANCORA A , PER CALCOLARLA CI BASTA IMPORRE UNA CONDIZIONE INIZIALE, CIOÈ AL TEMPO $t=0$ LA CARICA DEVE ESSERE 0 IN QUANTO NON C'È STATO IL TEMPO N ACCUMULARE SUI PIATTI DEL CONDENSATORE:

$$q(t=0) = 0 = \varepsilon C - A \cdot e^{-\frac{0}{RC}} \Rightarrow \varepsilon C - A = 0$$

$$A = \varepsilon C$$

RISCRIVIAMO QUINDI L'ESPRESSIONE DELLA CARICA IN FUNZIONE DEL TEMPO

$$q(t) = \varepsilon C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Vittorio Alzetta

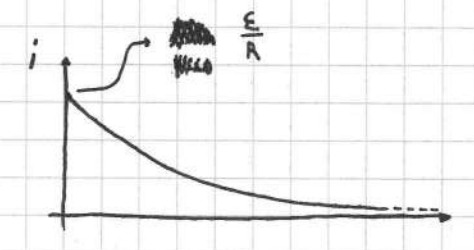
PER TERMINARE LO STUDIO DI QUESTA FUNZIONE VEDIAMONE IL GRAFICO:



SE INVECE VOLESSIMO L'ESPRESSIONE DELLA CORRENTE IN FUNZIONE DEL TEMPO CI BASTA DERIVARE $q(t)$:

$$i(t) = q'(t) = \varepsilon C \left(-e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC} \right) \right) = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

IL CUI GRAFICO SARÀ:



POSSIAMO ORA CHIEDERCI QUANDO LA CORRENTE SI ANNULLA.

INVECE VA OSSERVATO CHE L'UNITÀ DI MISURA DI $R \cdot C$ È:

$$\Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{s}} = s$$

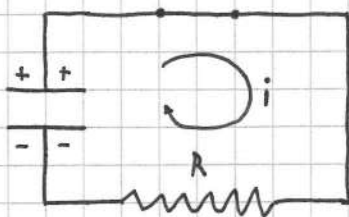
QUINDI POSSIAMO PRENDERE RC COME UNITÀ DI MISURA DEL TEMPO CHE

CHIAMEREMO COSTANTE DI TEMPO τ . A LIVELLO PRATICO SI OSSERVA CHE DOPO

5 τ LA CORRENTE RAGGIUNGE IL PROPRIO VALORE ASINTOTICO

(SCARICA)

IMMAGINIAMO ORA DI TOLLIERE LA BATTERIA DAL CIRCUITO APPENA STUDIATO, IL CONDENSATORE SARÀ COMPLETAMENTE CARICO.



IN QUESTO CASO $i = - \frac{dq}{dt}$ (IMMAGINO PER IL SEMPLICE FATTO CHE LA CORRENTE DEVE PER FORZA ESSERE UNA QUANTITÀ POSITIVA).

PER CUI APPLICANDO LA LEGGE DELLE MAGLIE AVREMO:

$$\frac{Q}{C} + R \cdot i = 0 \quad \frac{q}{C} + R \cdot \frac{dq}{dt} = 0 \quad \frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}$$

$$\int \frac{dq}{q} = - \int \frac{dt}{RC} \quad \ln q = -\frac{t}{RC} + \text{cost} \quad q = e^{-\frac{t}{RC} + \text{cost}}$$

$$q(t) = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

LA CONDIZIONE INIZIALE DA IMPORRE IN QUESTO CASO DERIVA DAL FATTO CHE LA CARICA ALL'INIZIO È MASSIMA, CIÒ È VALE CE :

$$q(t=0) = CE = A \cdot 1 \Rightarrow A = CE$$

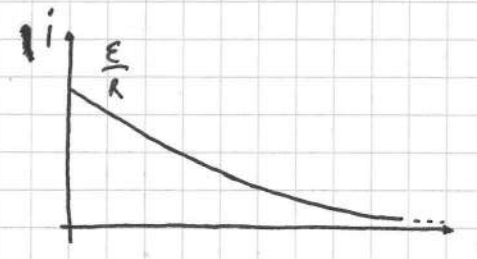
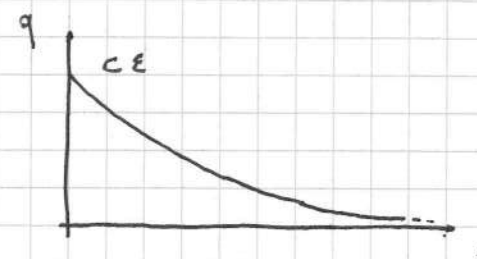
DUNQUE LA CARICA NEL TEMPO VARIA:

$$q(t) = CE \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

LA CORRENTE POTRÀ ESSERE RAPPRESENTATA COME DERIVATA DELLA CARICA (NEGATA):

$$i(t) = - \frac{dq}{dt} = - \left(CE e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) \right) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

I GRAFICI DI QUESTE FUNZIONI SARANNO:



ENERGIA DISSIPATA SU R

DURANTE IL PROCESSO DI SCARICA ABBIAMO VISTO CHE LA CORRENTE DIMINUISCE. PROVIAMO ORA AD ESPANERE LA POTENZA DISSIPATA IN FUNZIONE DEL TEMPO:

$$P_R(t) = i^2 R = \frac{E^2}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$$

D'ALTRO CANTO SE SOMMIAMO TUTTA LA POTENZA DISSIPATA DALL'ISTANTE INIZIALE ALL'ISTANTE FINALE ($t \rightarrow +\infty$) TROVEREMO L'ENERGIA TOTALE DISSIPATA SU R:

$$E_R = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} dt = -\frac{RC}{2} \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{CE^2}{2} \left[e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^{+\infty}$$

$= \frac{CE^2}{2}$ (1/2) $\frac{E^2}{R}$ (1/2) $\frac{E^2}{R}$

E QUELLO CHE ABBIAMO TROVATO È PROPRIO IL VALORE DELL'ENERGIA IMMAGAZINATA NEL CONDENSATORE CARICO ALL'INIZIO.

A QUESTO PUNTO CI POTREMO CHIEDERE QUALE SIA IL VALORE DELL'ENERGIA TOTALE FORNITA DAL GENERATORE (BATTERIA) NEL PROCESSO DI CARICA.

IL CALCOLO È BANALE, D'ALTRO LADDE CONOSCIAMO L'ESPRESSIONE DELLA CORRENTE DURANTE IL PROCESSO DI CARICA:

$$E_f = \int_0^{+\infty} E \cdot i(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} C e^{-\frac{t}{RC}} dt = \frac{E^2}{R} \cdot (-RC) \cdot \int_0^{+\infty} -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} dt$$

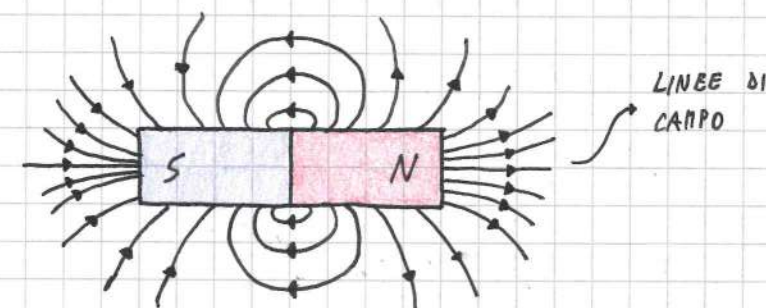
$$= -E^2 C \cdot \left[e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^{+\infty} = -E^2 C \cdot (-1) = E^2 C$$

ABBIAMO OTTENUTO UN VALORE DOPIO RISPETTO ALL'ENERGIA CHE POI, TERMINATO IL PROCESSO DI CARICA, È IMMAGAZINATA NEL CONDENSATORE. QUESTO CI FA CONCLUDERE CHE IL RESISTORE ABBIÀ ASSORBITO E RIVINCULATO LA METÀ DELL'ENERGIA FORNITA DAL GENERATORE.

CAMPO MAGNETICO

FIN DALL'ANTICHITÀ È NOTO CHE ALCUNI MATERIALI SONO IN GRADO DI ATTRARRE O RESPINGERE ALTRI MATERIALI (NON SI STA FACENDO RIFERIMENTO ALL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE, È TROPPO DEBOLE PER ESSERE PERCEPITA). IN PARTICOLARE SE PRENDIAMO DELLA LIMATURA DI FERRO E UN MATERIALE CON QUESTA CAPACITÀ DI ATTRARRE E RESPINGERE CHE CHIAMEREMO **MAGNETE** NOTEREMO CHE SI DISPORRANNO NELLO SPAZIO ADDENSANDOSI MAGGIORMENTE ALLE ESTREMITÀ DEL MAGNETE.

VOLENDO STUDIARE L'EFFETTO CHE UN MAGNETE HA SULLO SPAZIO CIRCOSTANTE ABBIAMO BISOGNO DI UN OGGETTO CHE SVOLGA LO STESSO LAVORO CHE LA CARICA DI PIÙ HA SVOLTO PER IL CAMPO ELETTRICO. PRENDEREMO QUINDI IL CARATTERISTICO **ALC MAGNETICO** IL QUALE CI INDICHERÀ IN OGNI PUNTO QUALE SIA LA DIREZIONE DEL CAMPO, OTTENENDO IL SEGUENTE RISULTATO:



APPURATO CHE I MAGNETI POSTI NELLO SPAZIO RISENTONO DI UNA FORZA ~~attrattiva~~ CHIAMEREMO **CAMPO MAGNETICO** L'OGGETTO CHE GENERA TALE FORZA. CHIAMEREMO INOLTRE LE 2 ESTREMITÀ DEL MAGNETE **POLI**.

A QUESTO PUNTO CI POTREMO CHIEDERE COSA COMPONGA UN MAGNETE, NEL CASO DI UN CORPO CARICO ABBIAMO PARLATO DI CARICHE ELEMENTARI (CIOÈ ELETTRONI), NEL CASO DI UN MATERIALE MAGNETICO ~~non~~ NON POSSIAMO FARE LA STESSA COSA. SI OSSERVA CHE IVA DIVIDENDO UN MAGNETE ANCHE A LIVELLO ATOMICO CI INTROVEREMO SEMPRE CON UN POLO NORD E UN POLO

SUB, CHIAMEREMO QUESTA COPPIA **DIPLO MAGNETICO**.

QUANDO SI INIZIÒ A STUDIARE IN DETTAGLIO QUESTA GRANDEZZA (FORZA GENERATA DA UN CAMPO MAGNETICO) LA SOMMIGLIANZA CON LA FORZA ELETTRICA ERA COSÌ EVIDENTE (DIMINUISCE CON LA DISTANZA, PUÒ ESSERE REPULSIVA E ATTRATTIVA) DA FAR SUPPORRE CHE A GENEMMA FOSSE L'ECCESSE DI CARICA.

SI VERIFICÒ POI CHE IN REALTÀ I 2 FENOMENI NON SONO RELATIVI.

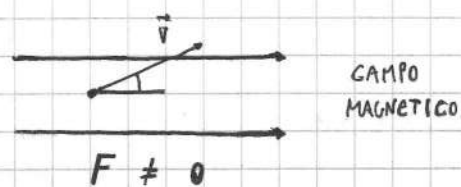
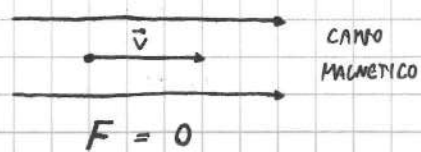
NEL 1820 SI SCOPRÌ CHE I 2 SEGUENTI OGGETTI ERANO ENTRAMBI IN GRADO DI ATTRARRE UN AGO MAGNETICO:

- MAGNETE (OVIAMENTE)
- FILO PERCORSO DA CORRENTE (NUOVA SCOPERTA)

VICEVERSA SI OSSERVÒ ANCHE CHE I CORPI MAGNETIZZATI ESERCITAVANO UNA FORZA SUI FILI PERCORSI DA CORRENTE.

SI VERIFICÒ SPERIMENTALMENTE CHE LA FORZA ESERCITATA DA UN CAMPO MAGNETICO SU UNA CARICA q IN MOVIMENTO A VELOCITÀ $\vec{v}$ HA LE SEGUENTI CARATTERISTICHE:

- LA FORZA È PERPENDICOLARE A $\vec{v}$
- STABILITO QUALE SIA IL CAMPO MAGNETICO ESISTE UNA PARTICOLARE DIREZIONE DI $\vec{v}$ PER CUI LA FORZA SI ANNULLA, IN PARTICOLARE È MASSIMA QUANDO $\vec{v}$ È PERPENDICOLARE A TALE DIREZIONE. NEL RESTO DEI CASI LA FORZA È PROPORZIONALE AL SENO DI α , DOVE α È L'ANGOLO COMPRESO TRA $\vec{v}$ E IL CAMPO ~~DE~~ MAGNETICO IN QUEL PUNTO.
- LA FORZA È PROPORZIONALE A $|\vec{v}|$ E q . ($\Rightarrow F$ DIPENDE DALLA CARICA IN MOVIMENTO)



LA FORZA DI LORENTZ

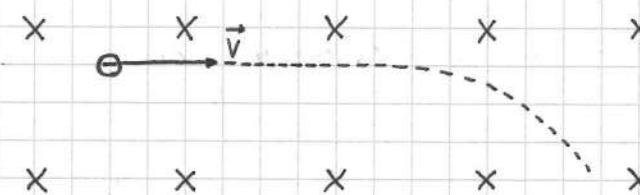
DOVENDO VALERE LE CARATTERISTICHE APPENA ELENATE SI OSSERVA CHE UN MODO COMPATTO DI RASSUMERLE IN FORMULE È:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

DOVE $\vec{B}$ RAPPRESENTA IL CAMPO MAGNETICO ED È DEFINITO A PARTIRE DALLA FORZA GENERATA E HA LO STESSO VERSO DI $\vec{v}$ QUANDO LA FORZA È NULLA. L'INTENSITÀ DI $\vec{B}$ SI DETERMINA IN CORRISPONDENZA DELLA MASSIMA FORZA, CIÒÈ QUANDO $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/2$:

$$B = \frac{F_{\max}}{|q| v}$$

AVENDO NELLA DEFINIZIONE UN PRODOTTO VETTORIALE INDIVIDUEREMO IL VERSO E LA DIREZIONE DI $\vec{F}$ CON LA REGOLA DELLA MANO DESTRA. AD ESEMPIO NEL SEGUENTE CASO $\vec{B}$ È $\perp$ AL FOGLIO ED ENTRANTE, LA TRAIETTORIA SEGUITA DALLA CARICA q SARÀ:



NONOSTANTE LA REGOLA DELLA MANO DESTRA DICA COME VERSO DELLA FORZA QUELLO INVECE VERSO L'ALTO DOBBIAMO TENERE CONTO DEL FATTO CHE LA CARICA È NEGATIVA E QUINDI INVERTE IL VERSO TROVATO.

AVENDO INTRODOTTO UNA NUOVA GRANDEZZA, IL CAMPO MAGNETICO, NE PRESENTIAMO ANCHE L'UNITÀ DI MISURA, IL **TESLA**:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$$

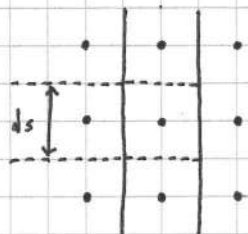
PER FISSARE MEGLIO LE IDEE RIPRODO UN SCENCO DEGLI ORDINI DI GRANDEZZA DEI CAMPI MAGNETICI PIÙ COMUNI:

- CAMPO MAGNETICO TERRESTRE $0,5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$
- MAGNETI DI LABORATORIO 2 T
- MAGNETI SUPERCONDUZIONE 10 T
- STELLA DI NEUTRONI 10^8 T

ALLUNGO SOLAMENTE CHE PUÒ CAPITARE DI RIFERIRSI A 10^{-4} T COME UN GAUSS.

FORZA MAGNETICA SU FILO CONDUTTORE

CERCHIAMO DI ESTIMARE QUALE SIA LA FORZA MAGNETICA ESERCITATA SU DI UN FILO CONDUTTORE ATTRAVERATO DA CORRENTE. IN QUESTO CASO, INRATTI, NON POSSIAMO UTILIZZARE DIRETTAMENTE LA FORMULA CHE ABBIAMO APPENA VISTO, MA SIAMO IN PRESENZA DI TANTISSIME CARICHE, NON POSSIAMO ISOLARLE TUTTE.



CONSIGLIAMO COME AL SOLITO UN PICCOLO TRATTO ds IN CUI PASSA UNA CARICA dq PER UN ISTANTE dt ALLA VELOCITÀ $\vec{v}$, ESTIMANDO LA FORZA ESERCITATA DAL CAMPO:

$$d\vec{F} = dq \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

DA CUI, SAPENDO CHE $dq = i \cdot dt$ AVREMO:

$$d\vec{F} = i \cdot dt \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

A QUESTO PUNTO VA RACCONTO CHE $dt \cdot \vec{v}$ CORRISPONDE A $d\vec{s}$ E DIRETTORE:

$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

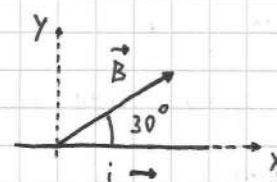
NON PERTANTO VOLENDO CONOSCERE IN TUTTO IL FILO LA FORZA ESERCITATA SU TUTTO IL FILO DI LUNGHEZZA L AVREMO L'INTEGRALE DA 0 A L IN $d\vec{s}$:

$$\vec{F} = \int_0^L i d\vec{s} \times \vec{B} = i \cdot \vec{L} \times \vec{B}$$

DOVE $\vec{L}$ È IL VETTORE DI MODULO L E VERSO QUELLO DELLA CORRENTE i .

ESEMPIO:

ABBIAMO UN FILO CONDUTTORE POSTO SULL'ASSE x PERCORSO DA CORRENTE $i = 3 \text{ A}$ E IMMERSO IN UN CAMPO MAGNETICO $B = 0,02 \text{ T}$. SAPENDO CHE IL FILO È LUNGO $L = 0,003 \text{ m}$ DETERMINARE LA FORZA DI CUI USCENTE:



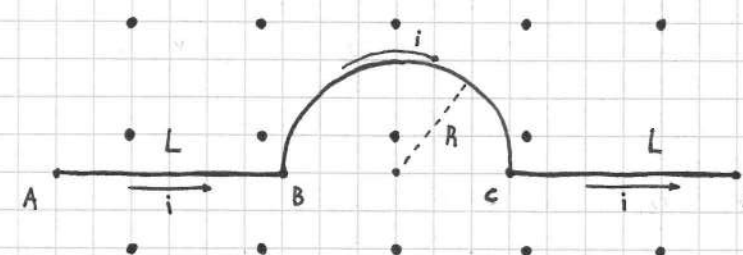
$$|\vec{F}| = i \cdot \vec{L} \times \vec{B} = i \cdot L \cdot B \cdot \sin(30^\circ) \hat{k}$$

$$= 9 \cdot 10^{-5} \hat{k} \text{ N}$$

È USCENTE RISPETTO AL PIANO xy

ESERCIZIO IMPORTANTE:

IL SEGUENTE UNICO MOSTRA UN FILO NON RETTILINEO PERCORSO DA CORRENTE IMMERSO IN UN CAMPO MAGNETICO:



LA CORRENTE VALE $i = 0,5 \text{ A}$, IL CAMPO MAGNETICO USCENTE $B = 0,4 \text{ T}$ MENTRE $L = R = 0,10 \text{ m}$. CI VIENE CHIESTO DI TROVARE LA FORZA CHE AGISCE SUL FILO.

PER RISPONDERE ALLA DOMANDA DIVIDIAMO IL FILO CONDUTTORE IN 3 PARTI:

$$\vec{F}_{\text{TOT}} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CB}$$

NEL PRIMO E NELL'ULTIMO TRATTO ABBIAMO UN FILO RETTILINEO PERCORSO DA CORRENTE
PERTANTO:

$$\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{CB} = -iLB \hat{j} \quad \sim \text{È DIRETTA VERSO IL BASSO}$$

IL TRATTO CURVILINEO È DIVERSO, NON HA INPRATI UNA DIREZIONE FISSA MA
LA FORZA. CONSIDERIAMO QUINDI UN TRATTO INFINITESIMO ds CHE HA LA STESSA

DIREZIONE DELLA TANGENTE IN QUEL PUNTO. SI PUÒ FACILMENTE
OSSERVARE CHE LA FORZA $d\vec{F}$ SUBITA DAL TRATTO ds SIA
DIRETTA VERSO IL CENTRO. ESSENDO L'UNICO ESERCIZIO CHE
FACCIAMO SULLE SINUSOIDE CI ACCORLIAMO SUBITO CHE

DALL'ALTRA PARTE DI ds CI SARÀ ds' CHE SUBIRÀ UNA FORZA SENPRE DIRETTA VERSO
IL CENTRO TALE CHE LE COMPONENTI X DI $d\vec{F}$ E $d\vec{F}'$ SI ANNULLANO. VOLENDO
ESIMPLE QUINDI LA ~~COMPONENTE~~ COMPONENTE Y (L'UNICA CHE RIMANE) AVREMO:

$$d\vec{F}_y = -i \cdot ds \cdot B \cdot \sin \theta \hat{j}$$

OSSERVATO INOLTRE CHE ds PUÒ ESSERE ESPRESSO COME $R \cdot d\theta$ POSSIAMO INTEGRARE
FRA 0 E π PER OTTENERE LA FORZA TOTALE ESERCITATA SUL FILO CURVILINEO:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi dF_y &= - \int_0^\pi i ds B \sin \theta = - \int_0^\pi i R B \sin \theta d\theta = iRB [\cos \theta]_0^\pi \\ &= -iRB - iRB = -2iRB \end{aligned}$$

POICHÉ $R=L$ AVREMO CHE LA FORZA TOTALE ESERCITATA SUL FILO CURVILINEO SARÀ:

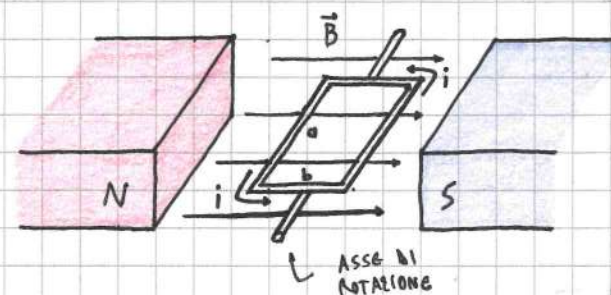
$$\vec{F}_{\text{TOT}} = -iRB \hat{j} - 2iRB \hat{j} - iRB \hat{j} = -4iRB \hat{j} = -0,08 \hat{j} \text{ N}$$

SI OSSERVI IN ULTIMO CHE LA FORZA ESERCITATA SULLA SEMICIRCONFERENZA AB
È IDENTICA A QUELLA ESERCITATA SUL FILO RETTILINEO CHE ANDREBBE DA A A B.
IL FATTO CHE LA FORZA ESERCITATA SU UN QUALUNQUE PERCORSO CURVILINEO DA A
A B SIA LA STESSA ESERCITATA SUL FILO RETTILINEO CONGIUNENTE A E B
B È GENERALIZZABILE.

AZIONI MECCANICHE SU CIRCUITI

DA CIÒ CHE ABBIAMO APPENA DETTO CONSEGUO CHE SE IL NOSTRO
FILO FORMA UN CIRCUITO CHIUSO LA FORZA GENERATA DAL CAMPO MAGNETICO
AGENTE SU DI ESSO SARÀ NULLA.

CONSIDERIAMO QUINDI IL SEGUENTE SISTEMA:

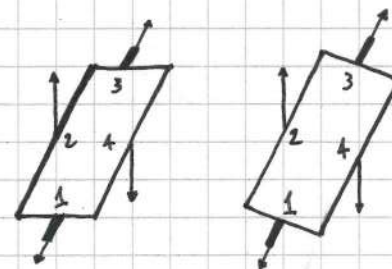


SIAMO DI FRONTE AD UN CIRCUITO SU CUI PASSA DELLA CORRENTE IMMERSO IN
UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME. DA QUI IN POI NON RIPORTERÒ TUTTI I
DETTAGLI MA SOLTANTO QUELLI ESSENZIALI. IN PRIMO LUOGO STABILIAMO IL

VERSO DELLA FORZA NEI 4 SEGMENTI CHE
COMPANLONO DA IL CIRCUITO.

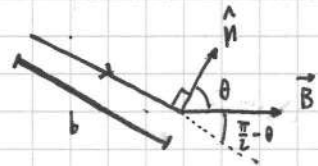
NEL LATO 1 E NEL LATO 3 LE 2 FORZE
SI OLVALLIANO ANNULLANDOSI A VICENDA (SONO
UGUALI IN MODULO E OPPOSTE IN VERSO), AL

CONTINUO, NEI LATI 2 E 4 SI GENERANO 2 FORZE CHE CREANO
NEL MOMENTO ATTORNO ALL'ASSE DI ROTAZIONE ~~MA~~ A CUI IL CIRCUITO
È IMPIGNATO.



È CHIAMA QUINDI CHE LE FORZE AGENTI SUI LATI LUNGI ABDA **SPIRA**
(CIRCUITO CHIUSO) METTAMO IN ROTAZIONE IL SISTEMA.

IN FORMULE CALCOLIAMO LE 4 FORZE COME:



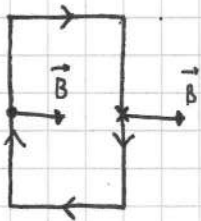
$$F_1 = i \cdot b \cdot B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$



$$F_3 = i \cdot b \cdot B \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

POICHÉ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ E $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ RAPPRESENTANO LO STESSO VALORE POSSIAMO
AFFERMARE CHE F_1 E F_3 SONO UGUALI.

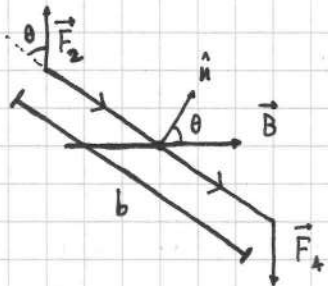
PER WANTO RIMANEA F_2 E F_4 :



$$F_2 = i \cdot a \cdot B \cdot \sin\frac{\pi}{2} = i \cdot a \cdot B$$

$$F_4 = i \cdot a \cdot B \cdot \sin\frac{\pi}{2} = i \cdot a \cdot B$$

A QUESTO PUNTO NON CI RESTA CHE ANALIZZARE IL MOMENTO GENERATO DA
 F_2 E F_4 :



$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_4 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 \\ &= \frac{b}{2} \cdot F_2 \cdot \sin(\pi - \theta) + \frac{b}{2} \cdot F_4 \cdot \sin(\pi - \theta) \\ &= \frac{b}{2} \cdot i \cdot a \cdot B \cdot \sin \theta + \frac{b}{2} \cdot i \cdot a \cdot B \cdot \sin \theta \\ &= i (ab) \sin \theta B = i A \sin \theta B\end{aligned}$$

DOVE A È L'AREA INTERNA AL CIRCUITO CHIUSO PIANO. A QUESTO PUNTO
CONSIGNA MO IL VETTORE SUPERFICIE A, CHE HA PER MODULO L'AREA IN

IL VERSO SI TROVA CON
LA REGOLA DELLA MANO DX

CHÉ HO APPENA DESCRITTO E PER VERSO $\hat{n}$:

$$\vec{\tau} = i \vec{A} \times \vec{B}$$

CI È STATO POSSIBILE CONDENSARE $A \cdot B \cdot \sin \theta$ CON IL PRODOTTO VETTORIALE.
CHIAMEREMO **MOMENTO MAGNETICO** IL PRODOTTO:

$$\vec{\mu} = i \vec{A} \quad (\cdot N, \text{ CON } N \text{ NUMERO DI SPIRE})$$

PER CUI L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO DIVENTA:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

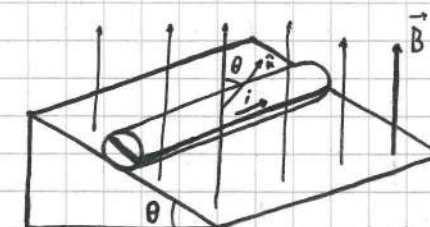
SI OSSERVI LA SOMIGLIANZA CON LA FORZA LENEMATA DA UN DIPOLO ELETTRICO
 $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ CON $\vec{p}$ MOMENTO DI DIPOLO.

IN GENERE QUANDO AVREMO UN CIRCUITO PIANO PIANO ESSO TENDERÀ A
RUOTARE ORIENTANDOSI NEL VERSO DEL CAMPO MAGNETICO, NEL SENSO CHE $\hat{n}$
SARÀ PARALLELO A $\vec{B}$.

QUESTA TENDENZA È SFRUTTATA DAI MACCHINARI PER RISONANZE MAGNETICHE
CHE PERTURBANO CON RADIOFREQUENZE LE PARTICELLE DI UN TESSUTO (QUESTE
PARTICELLE POSSONO ESSERE VISTE COME PICCOLI DIPOLI MAGNETICI) CHE POI, QUANDO
SI RIPOSIZIONANO A CAUSA DEL CAMPO MAGNETICO, RIVELANO LA PROPRIA POSIZIONE.
IN PARTICOLARE VENGONO ALEVATI IN I TESSUTI MOLLI RICCHI DI IDROGENO.

ESERCIZIO:

PRENDIAMO IL SEGUENTE PIANO INCLINATO, IMMERSO IN UN CAMPO MAGNETICO,
SUL QUALE È POSTA UNA SERIE DI SPIRE:



$$L = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$$

$$N = 10 \quad m = 0,250 \text{ kg}$$

$$B = 0,5 \text{ T}$$

APPINCHÉ IL CILINDRO SIA IN EQUILIBRIO BISOGNA PORRE LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO TRA I MOMENTI:

$$|\vec{T}_y| = R m g \sin \theta \quad |\vec{T}_M| = i \cdot \overbrace{(L \cdot 2R)}^A \cdot B \cdot \sin \theta \cdot N$$

PER $\vec{T}_y$ SI È SCELTO COME ASSE DI ROTAZIONE QUELLO PASSANTE PER IL PUNTO DI CONTATTO TRA CILINDRO E SPIRA E NIANO INCLINATO.

UGUAGLIANDO I 2 MOMENTI POSSIAMO RICAVARE LA CORRENTE i :

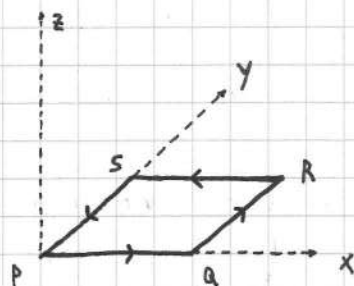
$$R m g \sin \theta = i L 2 R B \sin \theta N$$

$$m g = i L 2 B N$$

$$i = \frac{m g}{L 2 B N} = 2,45 \text{ A}$$

ESERCIZIO:

PRENDIAMO UNA SPIRA QUADRATA DI LATO $a = 0,20 \text{ m}$ DISPOSTA COME POI SI VEDRÀ E PERCORSA DA UNA CORRENTE $i = 5 \text{ A}$. INTRODUCIAMO ORA UNA NOVITÀ, UN CAMPO MAGNETICO NON UNIFORME MA PARI A $\vec{B} = \alpha x \hat{k}$ CON $\alpha = 0,2 \text{ T/m}$:

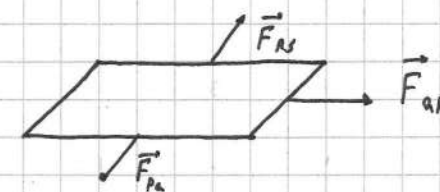


A QUESTO PUNTO NON POSSIAMO USARE LA FORMULA $\vec{F} = i \vec{L} \times \vec{B}$ POICHÉ PER RICAVARLA AVEVAMO SUPPOSTO CHE $\vec{B}$ POSSA COSTANTE (UNIFORME). LA FORZA TOTALE SARÀ:

$$\vec{F} = \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{QR} + \vec{F}_{RS} + \vec{F}_{SP}$$

LUNGO $\overline{SP}$ LA FORZA È NULLA, IL CAMPO MAGNETICO IN QUEL PUNTO È ZERO INDETTI.

LUNGO $\overline{PQ}$ E $\overline{SR}$ LA CORRENTE È UGUALE E IL MODULO DEL CAMPO MAGNETICO AUMENTA CON x ALLO STESSO MODO. SE CONSIDERIAMO I VETTORI CI ACCORIAMO CHE $\vec{F}_{RS}$ E $\vec{F}_{PQ}$ SONO OPPOSITE E DOVE SI ANNULLANO A VICENDA:



INFINO DA CALCOLARE IL MODULO DI $\vec{F}_{QR}$ CHE TROVANDOSI NUNQUE IN $x = a = 0,20 \text{ m}$ È FACILMENTE CALCOLABILE CON LA SOLITA FORMULA:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{\text{TOT}}| &= |\vec{F}_{QR}| = i \cdot a \cdot B(a) \\ &= i \cdot a \cdot \alpha \cdot a = 0,4 \text{ N} \end{aligned}$$

LA DIREZIONE È STATA INDICATA NELLO SCHEMA PRECEDENTE.

A QUESTO PUNTO PROViamo A CALCOLARE SINGOLARMENTE LA FORZA ESERCITATA SUI LATI $\overline{PQ}$ E $\overline{RS}$.

POICHÉ IL CAMPO MAGNETICO VARIA CONSIDERIAMO UN TRATTO $d\vec{s}$ INFINITESIMALE TALE PER CUI IL CAMPO MAGNETICO PUÒ ESSERE ASSUNTO COSTANTE (UNIFORME); IN QUESTO TRATTO LA FORZA ESERCITATA SARÀ:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= i \cdot d\vec{x} \times \vec{B}(x) \\ &= i \cdot d\vec{x} \cdot (\alpha x) \cdot \hat{j} \end{aligned}$$

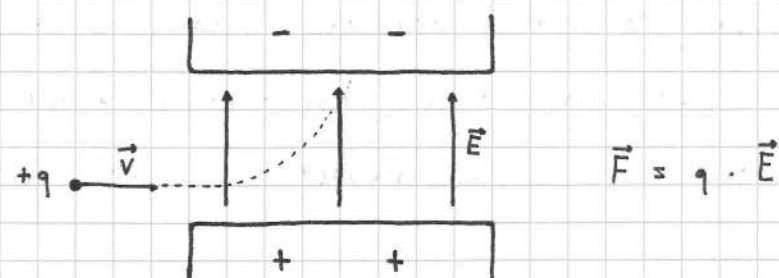
NON CI RESTA CHE INTEGRARE TRA P E Q PER AVERE IL RISULTATO:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{PQ} &= \int_P^Q d\vec{F} = \int_P^Q -i \alpha x \hat{j} dx = -i \alpha \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = -i \alpha \frac{a^2}{2} \hat{j} = \\ &= -0,02 \hat{j} \text{ N} = -F_{RS} \end{aligned}$$

MOTO DI CARICHE IN PRESENZA DI CAMPI MAGNETICI ED ELETTRICI

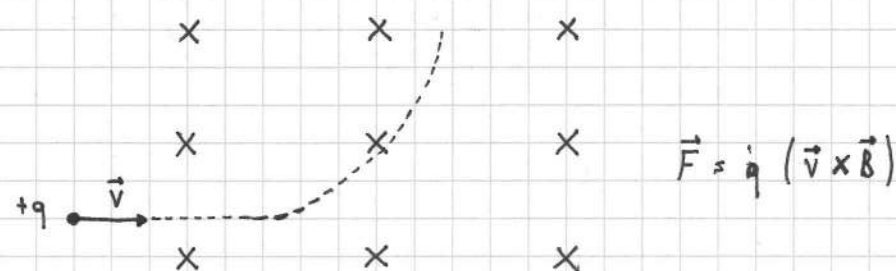
IN QUESTO CAPITOLO VEDREMO COME I CAMPI MAGNETICI ED ELETTRICI SONO IN GRADO DI INFLUENZARE IL MOTO DI PARTICELLE CARICHE.

PER ESEMPIO IN QUESTO CASO:



LA FORZA ELETTRICA ALLISCE LUNGO UNA COMPONENTE DELLO SPOSTAMENTO E PERTANTO COMPIE DEL LAVORO FINENDO PER AUMENTARE L'ENERGIA CINETICA DELLA CARICA.

AL CONTINUO IN QUEST'ALTRO CASO:



LA FORZA MAGNETICA È SEMPRE DIRETTA PERPENDICOLARMENTE RISPETTO AL VETTORE SPOSTAMENTO ($\vec{v}$), PERTANTO IL LAVORO COMPIUTO ~~DA~~ ~~SULLA~~ SULLA CARICA SARÀ NULLO E NON CI SARÀ AUMENTO DI VELOCITÀ.

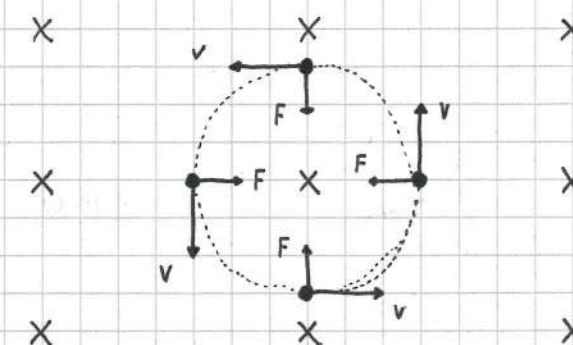
NELLA FORMA PIÙ GENERALE ~~DI~~ DELLA FORZA DI LORENTE SI SOMMANO I CONTRIBUTI DELLA FORZA ELETTRICA E DI QUELLA MAGNETICA:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

NEL SEGUITO VEDREMO COME I 2 CAMPI CHE ABBIAMO INTRODOTTO POSSANO ESSERE UTILIZZATI PER SVANATI DISPOSITIVI.

MOTO CIRCOLARE E MOTO ELICOIDALE

IMMAGINIAMO DI INIETTARE UNA CARICA q CON VELOCITÀ v IN UNA REGIONE CON CAMPO MAGNETICO UNIFORME E COSTANTE $\vec{B}$. DI FATTO QUESTA CARICA NON POTRÀ AUMENTARE LA PROPRIA VELOCITÀ (DATO CHE $\vec{B}$ NON COMPIE LAVORO) MA POTRÀ VARARE LA PROPRIA DIREZIONE:



SI OSSERVI COME LA FORZA LENATA DAL CAMPO MAGNETICO SIA SEMPRE $\perp$ A $\vec{v}$ E QUINDI PUNTI VERSO UN IMAGINARIO CENTRO DI UNA CIRCONFERENZA. OTTENIAMO QUINDI UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE CHE PUÒ ESSERE DESCRITTA CON GLI STRUMENTI DELLA CINEMATICA:

$$F_M = q \cdot v \cdot B$$

$$F_c = m a_c$$

UGUAGLIANDO QUESTE DUE FORZE SAREMO IN GRADO DI ESPRIMERE IL RAGGIO DELLA TRAIETTORIA DELLA CARICA:

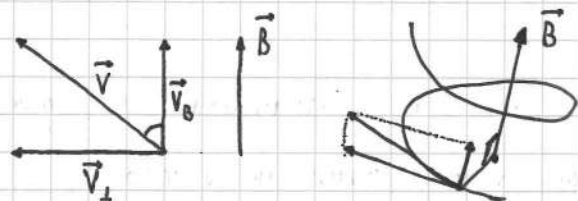
$$q v B = m a_c \Leftrightarrow q v B = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow r = \frac{m v}{q B}$$

PROVIAMO ORA A CALCOLARE IL PERIODO DI PERCORRENZA DI QUESTA CIRCONFERENZA:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

SI OSSERVI IMMEDIATAMENTE CHE IL PERIODO NON DIPENDE NÉ DAL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA NÉ DALLA VELOCITÀ A CUI SI MUOVE LA CARICA.

NEL CASO PIÙ GENERALE, PERÒ, LA CARICA PUÒ NON MUOVERSI LUNGO LA PERPENDICOLARE RISPETTO AL CAMPO MAGNETICO. IN TAL CASO IL VETTORE VELOCITÀ POTRÀ ESSERE SCONPOSTO IN UNA COMPONENTE $\perp$ AL CAMPO MAGNETICO E IN UNA $\parallel$ AL CAMPO MAGNETICO, COME SI SEGUE:

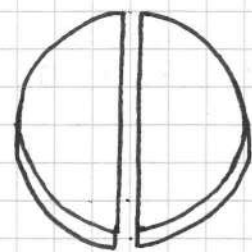


(MI VERGOLNO DI QUESTO MOTTO ELICOIDALE)

IN PARTICOLARE QUESTO MOTTO PRENDERÀ IL NOME DI **MOTO ELICOIDALE** UNIFORME.

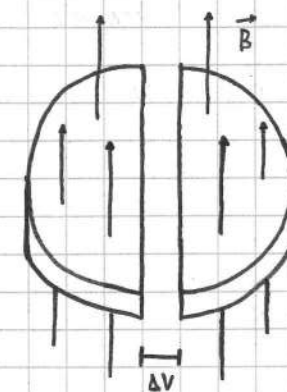
IL CICLOTRONE

DOPO LA DOVEROSA PREMESSA SUL MOTTO CIRCOLARE ED ELICOIDALE INTRODUGO IL PRIMO SCOPO APPLICATIVO DEI CONCETTI VISTI: LA COSTRUZIONE DEI **CICLOTRONI**. IMMAGINIAMO DI AVERE UN CILINDRO RITTO DIVISO IN 2 ZONE COME IN FIGURA:



ORA IMMAGINIAMO DI PORRE AL CENTRO UN MATERIALE CHE A CAUSA DI UN DECADIMENTO RADIOATTIVO SPONTANEO RILASCI ALCUNI IONI (SI PUÒ ASSUMERE CHE QUESTI IONI ABBIANO ENERGIA CINETICA INIZIALE NULLA).

A QUESTO PUNTO ALGIUNGO CHE I 2 SEMI-CILINDRI SONO IMBASTI IN UN CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$ MENTRE TRA DI ESSI È PRESENTE UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE ΔV :



SUGGERE CHE LO IONE APPENA RILASCIATO AL CENTRO RISENTA DEL CAMPO ELETTICO LEGGERATO DALLA DIFFERENZA DI POTENZIALE E INIZI A MUOVERSI ACCELERANDO VERSO UNA DELLE 2 Δ (SONO CHIAMATI COSÌ I 2 SEMICILINDRI). UNA VOLTA GIUNTO LÌ CON VELOCITÀ $\vec{v}$ RISENTIRÀ DEL CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$, CHE, COME ABBIAMO VISTO, FARRÀ COMPIERE ALLO IONE UNA SEMICIRCONFERENZA SENZA AUMENTARNE LA VELOCITÀ. UNA VOLTA TORNATO NELL'INTERCAPACITÀ TRA LE 2 Δ INVERTIAMO IL VERSO DEL CAMPO ELETTICO (È SEMPLICE SAPERE QUANDO FARLO, LA FORMULA DEL PERIODO DIPENDE DA PARAMETRI FISICI) ALTAMENTE LO IONE VERREBBE FERMATO O COMUNQUE FRENATO. SUBITO UN'ALTRA ACCELERAZIONE LO IONE PROSEGUE IL SUO PERCORSO A SPIRALE FINO A UNGUANDO NON RAGGIUNGE IL BORDO DEL CICLOTRONE DOVE VERrà EIETTATO. ~~MA~~ DI FATTO AD OGNI PASSAGGIO L'ENERGIA AUMENTERÀ DI:

$$\Delta E_n = q \Delta V$$

UN RISULTATO IMPRONONIBILE CON UN ACCELERATORE LINEARE, SERVIREBBERO DIFFERENZE DI POTENZIALE TROPPO ALTE E SPAZI TROPPO VASTI.

SI RICORDI CHE UN CICLOTRONE PUÒ TRANQUILLAMENTE STARE IN UN TAVOLO.

ESEMPIO:

SUPPONIAMO DI AVERE UN CICLOTRONE DI RAGGIO $R = 0,5 \text{ m}$ CHE OPERA CON $f = 12 \text{ MHz}$. IMMETTIAMO AL SUO INTERNO DEI DEUTONI, CIOÈ NUCLEI DI DEUTERIO CHE È UN ISOTOPO DELL'IDROGENO DELLA MASSA DI $m_d = 3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. VOGLIAMO TROVARE IL VALORE DI B PER ACCELERARE I DEUTONI (DEVE ESSERE INTENSO ABBASTANZA DA RIMBETTERE LE CARICHE NELL'INTERCARRICINE QUANDO IL CAMPO ELETTICO ~~si~~ VIENE INVERTITO.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \Rightarrow B = \frac{2\pi m f}{q} = 1,57 \text{ T}$$

VOGLIAMO ORA CALCOLARE L'ENERGIA MASSIMA POSSESSUTA DAI DEUTONI, DI FATTO SI STA FACENDO AUMENTARE AL MOMENTO IN CUI LE PARTICELLE SI TROVANO SUL BORDO:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{(r q B)^2}{m^2} = 0,236 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

PER CONVERTIRE DA J IN eV BASTA DIVIDERE PER LA CARICA DI UN E:

$$E_{\max} = 14,7 \text{ MeV}$$

SUPPONENDO CHE $|\Delta V| = 1,4 \cdot 10^4 \text{ V}$ VOGLIAMO STABILIRE QUANTI WU COMPIE LO IONE IN UN CICLO DI ACCELERAZIONE E QUANTO CI METTE A COMPIERE QUESTI WU; PER STABILIRE IL NUMERO N DI WU BASTA DIVIDERE L'ENERGIA MASSIMA ACCUMULATA PER L'ENERGIA ASSORBITA IN OGNI WU:

$$N = \frac{E_{\max}}{\Delta E_{\text{giro}}} = \frac{\frac{(r q B)^2}{2 m}}{2 q \Delta V} = 525$$

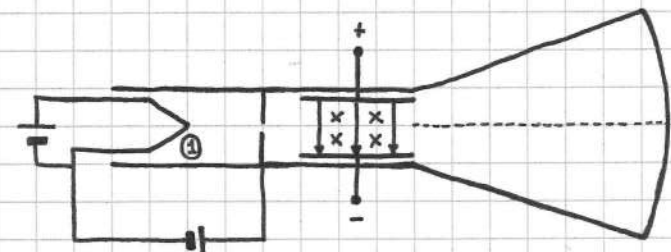
↳ CI SONO 2 PASSAGGI PER WU

PER TROVARE INVECE IL TEMPO IMPIEGATO PER UN CICLO FACCIAMO:

$$\Delta t = N \cdot T = N \cdot \frac{1}{f} = 0,438 \cdot 10^{-4} \text{ s} \\ = 43,75 \text{ } \mu\text{s}$$

IL SELETTORE DI VELOCITÀ

IL SEGUENTE APPARECCHIO PERMETTE DI SELEZIONARE IN UN FASCIO DI e^- QUELLI CHE SI MUOVONO AD UNA SPECIFICA VELOCITÀ FACENDO PROSEGUIRE SOLO ESSI IN LINEA RETTA.



NEL PUNTO ① VIENE GENERATO UN FASCIO DI ELETTRONI, QUESTO VIENE POI COLLIMATO FINA A TRAVERSARE I 2 CAMPI. AFFINCHÉ UNA PARTICELLA PROSEGUA LUNGO LA RETTA CHE HO TRACCIATO LA RISULTANTE AGENTE SU DI ESSA MENTRE ATTRAVERSA I CAMPI DEVE ESSERE NULLA:

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \Leftrightarrow v = \frac{E}{B}$$

SE LA PARTICELLA DOVESSE AVERE VELOCITÀ DIVERSA IL SUO MOTO VERREBBE IN QUALCHE MODO INFLUENZATO IMPEDENDOLE DI PROSEGUIRE LUNGO LA LINEA RETTA.

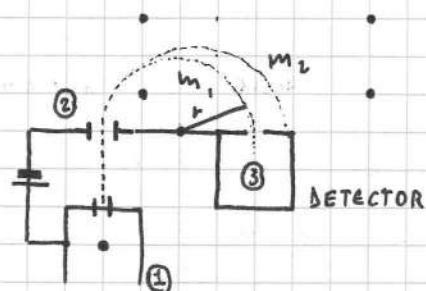
ESEMPIO:

SE DA UN SELETTORE DI VELOCITÀ CHE OPERA CON $E = 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ E $B = 0,5 \text{ T}$ ESCE UN FASCIO DI e^- COLLIMATI LA LORO VELOCITÀ SARÀ:

$$v = \frac{E}{B} = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

LO SPETTROMETRO DI MASSA

IL SEGUENTE STRUMENTO SERVE A SELEZIONARE, TRAMITE L'INTENSITÀ DI UN CAMPO MAGNETICO, SPECIFICHE MASSE. LA STRUTTURA SARA':



INIZIALMENTE VIENE POSTA UNA MASSA DI UNA MATERIALE CON DECAIMENTI SPONTANEI IN (1), QUESTA GENERERÀ IONI CON MASSE DIVERGENTI CHE ATTRAVERSANDO (2) VERRANNO ACCELERATI (A CAUSA DELLA ΔV). SAPENDO CHE IL RAGGIO DELLA TRAIETTORIA CIRCOLARE È:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

E CHE LA VELOCITÀ DELLE PARTICELLE, DOPO AVER ATTRAVERSDATO UNA ZONA CON DIFFERENZA DI POTENZIALE ΔV , È:

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

CI BASTA ISOLARE NELLA PRIMA LA MASSA E SOSTITUIRVI LA VELOCITÀ CHE ABBIAMO CALCOLOATO CON LA SECONDA:

$$m = \frac{q r B}{v} = \frac{q r B}{\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}} \Rightarrow m = \left(\frac{q r^2}{2\Delta V} \right) B^2$$

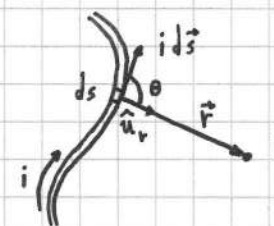
DUNQUE A PARTIRE DA UN DATO r POSSIAMO SELEZIONARE IL VALORE DELLA MASSA CHE VOGLIAMO ~~selezionare~~ FINISCA DENTRO IL DECODER ~~proprio~~ INTENSIFICANDO OPPORTUNAMENTE IL CAMPO MAGNETICO.

SORGENTI DEL CAMPO MAGNETICO

QUANDO ABBIAMO INTRODOTTO LA FORZA DI COULOMB E IL CAMPO ELETTICO ABBIAMO DETTO CHE UNA CARICA ELETTRICA ERA IN GRADO DI GENERARLO ED ESSO ERA IN GRADO DI ESERCITARE UNA FORZA SU ALTRE CARICHE ELETTRICHE. PER OMA ABBIAMO VISTO COME IL CAMPO MAGNETICO SIA IN GRADO DI ESERCITARE UNA FORZA SU DELLE CARICHE IN MOVIMENTO, MA QUINDI QUESTE ULTIME SONO IN GRADO DI GENERARE UN CAMPO MAGNETICO?

LA RISPOSTA È AFFERMATIVA, E IN QUESTO CAPITOLO CI PROPONIAMO DI ESPRIMERE QUANTITATIVAMENTE CON UNA LEGGE IL CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UNA CORRENTE.

FACCIAMO QUALCHE CONSIDERAZIONE SUL SEGUENTE SISTEMA:



INTUITIVAMENTE DICIAMO CHE PIÙ LA CORRENTE È INTENSA E PIÙ IL CAMPO MAGNETICO IN P SARÀ FORTE, IN FORMULE:

$$dB \propto i$$

SEMPRE A LIVELLO INTUITIVO DIREMMO CHE ALL'AUMENTARE DELLA DISTANZA DAL FILO IL CAMPO DIMINUISCE, SI MOSTRA Sperimentalmente CHE VALE LA RELAZIONE:

$$dB \propto \frac{1}{r^2}$$

POTREMMO QUINDI ESPRIMERE IL CAMPO MAGNETICO DOVUTO AL TRATTO ds IN P
COME :

$$dB = \mu_m \cdot \frac{i}{r^2}$$

DOVE μ_m È UNA COSTANTE MAGNETICA. TUTTAVIA IL CAMPO MAGNETICO È UNA
GRANDEZZA VETTORIALE E PERTANTO HA BISOGNO DI UN VERSO, LUI VERAMENTE ASSERIMATO
IL SEGUENTE:

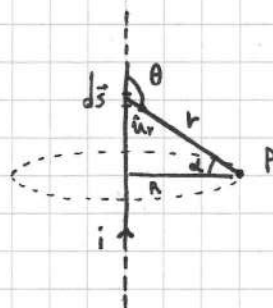
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot d\vec{s} \times \hat{u}_r$$

MA QUESTA LEGGE È DETTA DI **BIOT-SAVART** E μ_0 È LA COSTANTE DI
PERMEABILITÀ MAGNETICA (L'EQUIVALENTE DI ϵ_0 NEL CAMPO ELETTRICO) NEL VUOTO E
VALE 10^{-7} Tm/A .

PROVIAMO, OIA CHE ABBIAMO DERIVATO QUANTITATIVAMENTE IL CAMPO MAGNETICO GENERATO
DA UN FILO PERCORSO DA CORRENTE, AD ESAMINARE I SOLITI CASI PARTICOLARI.

CASO FILO RETTILINEO

LO SCHEMA SARÀ IL SEGUENTE:



IL CAMPO MAGNETICO DOVUTO A ds IN P SARÀ:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot d\vec{s} \times \hat{u}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot ds \sin\theta \hat{u}_\perp$$

IL VERSORE $\hat{u}_\perp$ INDICA CHE IL CAMPO MAGNETICO HA VERSO ENTRANTE.

A QUESTO PUNTO NON CI RESTA CHE INTEGRARE TRA $-\infty$ E $+\infty$, TUTTA VIA
AL VARIARE DI r VAREMBBE ANCHE θ , PERTANTO È PREFERIBILE
RICORRERE AD UN INTEGRALE SINGOLO E NON DOPPIO. PER OTTENERE CIÒ
ESPRIMIAMO TUTTO IN FUNZIONE DI α :

$$\sin\theta = \cos\alpha$$

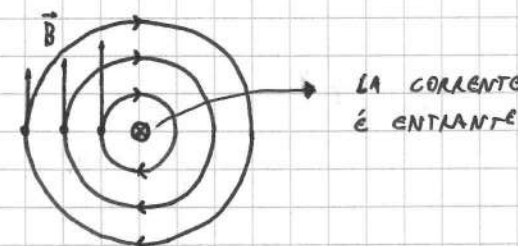
$$\frac{s}{R} = \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad s = \tan\alpha \cdot R \quad \Leftrightarrow \quad ds = \frac{R}{\cos^2\alpha}$$

LA CUI AVREMO L'INTEGRALE:

$$B = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{\underbrace{r^2}_{\frac{R^2}{\cos^2\alpha}}} \cdot \frac{R}{\cos^2\alpha} \cdot \cos\alpha \, d\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cos\alpha}{R} \, d\alpha$$

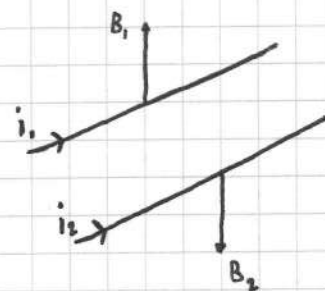
$$= \frac{2 \mu_0 i}{4\pi R} \left[\sin\alpha \right]_0^{\pi/2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

IN QUESTO CASO AVREMO CHE IL CAMPO MAGNETICO SARÀ COSTANTE IN
OGNI CERCHIO CONCENTRICO DI CENTRO IL FILO:

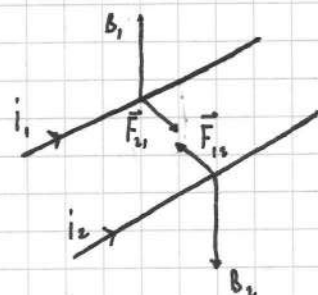


IL VERSO DEL CAMPO MAGNETICO È INDICATO CON LA REGOLA DELLA MANO
DESTRA.

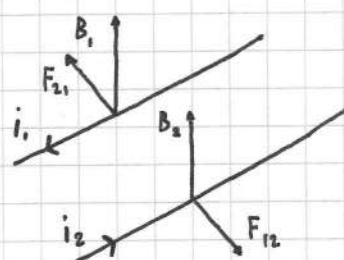
È UTILE OSSERVARE CHE PONENDO 2 FILI PARALLELAMENTE E
FACENDOLI SCORRERE DELLA CORRENTE NELLO STESSO VERSO SI OTTENGONO:



NOTO IL VERSO DEL CAMPO MAGNETICO E QUELLO DELLA CORRENTE SI PUÒ INDIVIDUARE QUELLO DELLA FORZA GENERATA SUI DUE FILI:



I 2 FILI SI ATTRAUONO A VICENDA. DIVERSO È IL CASO IN CUI LE CORRENTI SCORRONO IN VERSO OPPOSTO, A QUEL PUNTO I FILI SI RESPINGEREBBERO:



IN PARTICOLARE SI AVrà CHE P VALE:

$$F_{21} = F_{12} = i_2 \cdot L \cdot B_1 = i_2 \cdot L \cdot \frac{i_1 \mu_0}{2\pi d} = L \cdot \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

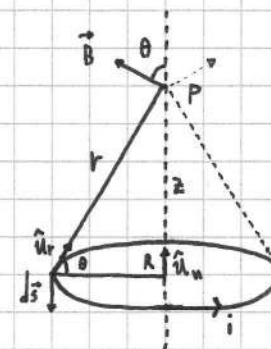
↳ DISTANZA TRA I 2 FILI

È UTILE ESPRIMERE LA FORZA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA:

$$F_{21} = F_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

CASO SPIRA CIRCOLARE

VOLIAMO CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO LUNGO L'ASSE CENTRALE DI UNA SPIRA CIRCOLARE AD UNA DISTANZA z DA ESSA:



IL CAMPO MAGNETICO IN P DA, DOVUTO AL TRATTO DI SPIRA ds , SARÀ:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot d\vec{s} \times \hat{u}_r$$

IL FATTO È CHE LA COMPONENTE ORIZZONTALE DI QUESTO CAMPO SI ANNULLA * CON QUELLA DEL TRATTO OPPOSTO SULLA SPIRA. È PER QUESTO MOTIVO CHE POSSIAMO USCIVERE IL CAMPO COME:

$$d\vec{B}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot \cos\theta \cdot ds \hat{u}_n$$

ALLO STESSO MODO DI PRIMA CI TORNA UTILE ESPRIMERE TUTTO IN FUNZIONE DELLA STESSA VARIABILE. ~~osserva~~ MI ACCORGO PERÒ CHE NON CI SONO VARIABILI, PERANTO OPERO SEMPLICEMENTE LE SEGUENTI SOSTITUZIONI:

$$r^2 = R^2 + z^2$$

$$r \cdot \cos\theta = R \Rightarrow \cos\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

OTTENGO QUINDI, INTEGRANDO TRA 0 E $2\pi R$, IL SEGUENTE RISULTATO

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{R^2+z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} \cdot ds = \frac{2\pi R \mu_0 i R}{4\pi (R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{R^2 \mu_0 i}{2(R^2+z^2)^{3/2}} = B(z)$$

AL CENTRO DELLA SPIRA AVREMO:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 i}{2R} \hat{u}_n$$

MENTRE PER $z \gg R$ AVREMO:

$$\vec{B}(z) = \frac{R^2 \mu_0 i}{2z^3} \hat{u}_n$$

VOLENDO SI PUÒ NOTARE CHE SONO PRESENTI GLI ALCUNI TERMINI DEL MOMENTO MAGNETICO DELLA SPIRA $i\vec{A} = i\pi R^2 \hat{u}_n = \vec{\mu}$ E DUNQUE $\vec{B}(z)$ PUÒ ESSERE RISCritto COME:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\vec{\mu}}{z^3}$$

DIPOLO ELETTRICO E MAGNETICO

SI POSSONO NOTARE LE SIMILITUDINI TRA L'ESPRESSIONE DEL CAMPO MAGNETICO A LUNGE DISTANZA E IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN DIPOLO:

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\mu}{z^3}$$

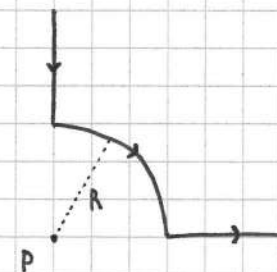
$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\overset{\text{MOMENTO DEL DIPOLO}}{q \cdot d}}{z^3}$$

LA PRINCIPALE DIFFERENZA STA NEL FATTO CHE LE LINEE DEL CAMPO B SONO CHIUSE MENTRE NON LO SONO QUELLE DEL CAMPO E . INOLTRE LA CIRCOLTAZIONE (CHE DERIVAREMO) DI B LUNGO UNA LINEA CHIUSA NON SEMPRE È ZERO, AL CONTRARIO DI E DOVE PRESA UNA QUALUNQUE LINEA CHIUSA LA CIRCOLTAZIONE SARÀ NULLA. TUTTAVIA SIA IL DIPOLO SIA LA SPIRA TENDONO AD ALLINEARSI AD UN EVENTUALE

CAMPO ESTERNO.

ESERCIZIO:

SI TROVI IL CAMPO MAGNETICO B NEL PUNTO P :



ANEITUTTO NOTIAMO CHE IL CONTRIBUTO DEI 2 TRATTI RETTILINEI È NULLO, INFATTI I VETTORI $d\vec{s}$ E $\hat{u}_n$ SONO PARALLELI ($\Rightarrow \sin\theta = 0$). IL CONTRIBUTO DEL TRATTO RETTILINEO È INVECE:

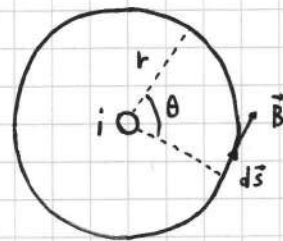
$$\int_0^{\frac{2\pi R}{4}} dB = \int_0^{\frac{2\pi R}{4}} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{R^2} \cdot ds = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i}{R^2} \cdot \frac{2\pi R}{4} = \frac{\mu_0 i}{8R}$$

IL VERSO DEL CAMPO MAGNETICO IN P È ENTRANTE, QUINDI POSSIAMO SCRIVERE:

$$\vec{B}_P = -\frac{\mu_0 i}{8R} \hat{u}$$

LEGGE DI AMPÈRE

LA LEGGE CHE STO PER INTRODURRE LEGA LE CORRENTI AI CAMPI MAGNETICI CHE GENERANO. PARTIAMO DA UN CASO CHE GIÀ CONOSCIAMO, IL FILO RETTILINEO INDEFINITO E PARTIAMOCI IN UNA CIRCONFERENZA CHE ABBIAMO PER CENTRO IL FILO:



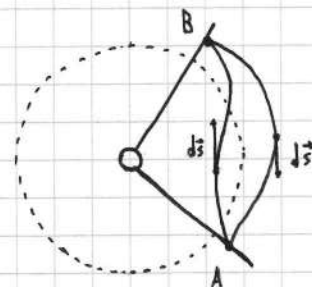
PROVIAMO ORA A CALCOLARE IL PRODOTTO SCALARE TRA CAMPO MAGNETICO E SPOSTAMENTO LUNGO LA CIRCONFERENZA (LINEA CHIUSA):

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot ds \cdot \cos \theta$$

OSSERVATO CHE $\cos \theta$ È SEMPRE 1 DAL MOMENTO CHE $d\vec{s} \parallel \vec{B}$, POSSIAMO INTEGRARE FRA 0 E $2\pi r$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

È POSSIBILE GENERALIZZARE QUESTO FATTO (NON NE VEDREMO LA DIMOSTRAZIONE) CONSIDERANDO LO SCHEMA:



È POSSIBILE INTUIRE CHE IL PRODOTTO SCALARE TRA $\vec{B}$ E $d\vec{s}$ LUNGO IL PERCORSO

$\vec{AB}$ CI DÀ UN RISULTATO UGUALE IN VALORE ASSOLUTO AL PRODOTTO

SCALARE CALCOLATO LUNGO $\vec{BA}$. PER INTUIRLO BASTA PENSARE CHE IL COSENO DELL'ANGOLO FORMATO DAI 2 VETTORI RENDE ININFLUENTE LA COMPONENTE $\parallel$ AL RAYNO DI $d\vec{s}$ E INUNQUE, IN UN CERTO SENSO, CAPIAMO CHE IL RISULTATO AVrà DIPENDERE SOLO DALLA POSIZIONE INIZIALE E FINALE.

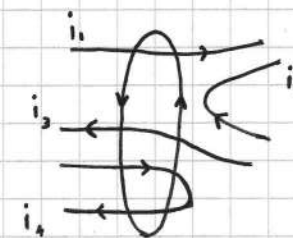
AD OGNI MODO LUNGO UNA LINEA CHIUSA AVREMO:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c$$

DOVE i_c RAPPRESENTA LA SOMMA DELLE CORRENTI CHE ATTRAVERSSANO I VANTAGGI DI FILO CHE FORMANO LA LINEA CHIUSA (i_c SARÀ CHIAMATA SOMMA DELLE **CORRENTI CONCATENATE**).

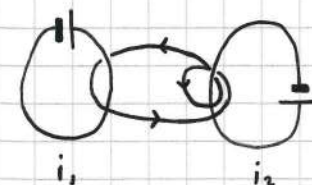
A SECONDA CHE ~~IN~~ I FILI ATTRAVERSSATI DA CORRENTE VEDANO CIRCOLARE LA LINEA ORIENTATA IN SENSO ANTICLOCKWISE / OROLOGIO SOMMEREMO TALE CORRENTE CON SEGNO + O -.

ESEMPLI:



$$i_c = i_1 - i_3 + i_4 - i_4 = i_1 - i_3$$

i_1 VEDE CIRCOLARE LA LINEA ORIENTATA IN SENSO ANTICLOCKWISE
 i_2 LA VEDE CIRCOLARE IN SENSO OROLOGIO
 i_4 ENTRA 2 VOLTE ATTRAVERSO LA LINEA CHIUSA



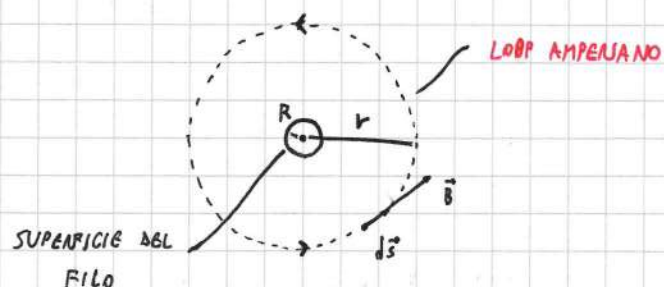
$$i_1 = 1A \quad i_2 = 2A$$

$$i_c = -i_1 + i_2 + i_2 = 3A \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c = 37,7 \cdot 10^{-7} Tm$$

DI SEGUITO VEDREMO COME SFRUTTARE LA LEGGE DI AMPERE PER CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO IN ALCUNI PUNTI.

FILO RETTILINEO

CONSIDERAMO INIZIALMENTE UN CASO CHE AVEVAMO GIÀ TRATTATO, IL FILO RETTILINEO INDEFINITO:



NEL CASO IN CUI $r \geq R$ IL CAMPO MAGNETICO SARÀ:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\pi r \cdot \cos 0$$

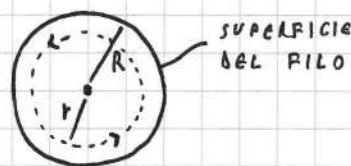
$$\downarrow$$

$$= B \cdot 2\pi r$$

DA CUI:

$$i_c \cdot \mu_0 = B \cdot 2\pi r \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{B = \frac{i_c \mu_0}{2\pi r}}$$

PASSANDO INVECE AL CASO IN CUI $r < R$, CI TROVAMO ALL'INTERNO DEL CAVO PERCORSO DA CORRENTE, AVREMO:



IN QUESTO CASO LA CORRENTE CONCATENATA, CIÒ QUELLA CHE ATTRAVERSA LA LINEA AMPERIANA NON SARÀ i MA UNA PARTE DI ESSA. IN PARTICOLARE

SARÀ PAR $\tilde{i}$:

$$i_c = j (\pi r^2)$$

$\swarrow$ $\searrow$
 DENSITÀ DI CORRENTE (UNIFORME) SUPERFICIE DI INTERESSE

DA CUI È POSSIBILE CALCOLARE:

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\pi r \cdot \cos 0$$

$$\downarrow$$

$$= B \cdot 2\pi r$$

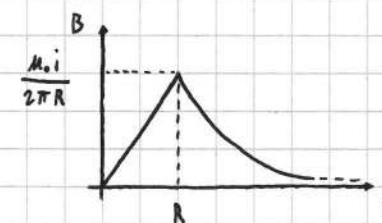
$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j (\pi r^2)$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot j \cdot r}{2}$$

MA DAL MOMENTO CHE $j = \frac{i}{\pi R^2}$ AVREMO:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i \cdot r}{2\pi R^2}}$$

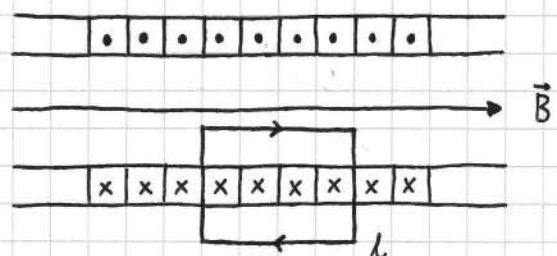
CON IL SEGUENTE GRAFICO METTO IN EVIDENZA L'ANDAMENTO DEL CAMPO MAGNETICO AL CRESCERE DELLA DISTANZA DAL CENTRO DEL FILO:



SOLENOIDE RETTILINEO

IL **SOLENOIDE** RETTILINEO INDEFINITO È UN INSIEME DI SPIRE CHE CONDIVIDONO TUTTE LO STESSO ASSE CENTRALE. L'UNIFORMITÀ NELLA DISTANZA TRA QUESTE SPIRE

PERMETTE DI ASSUMERE UNIFORME IL CAMPO MAGNETICO INTERNO E NULLO QUELLO ESTERNO, LA SEGUENTE FIGURA NE MOSTRA UNO SCHEMA:



CONSIDERANDO LA SUPERFICIE LINEA AMPERIANA l , SI OSSERVA SUBITO CHE IL PRODOTTO SCALARE TRA $\vec{B}$ E I 2 TRATTI DI l VERTICALI È NULLO ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$) E SIMILMENTE È NULLO ANCHE IL PRODOTTO SCALARE TRA $\vec{B}$ E IL TRATTO DI l ESTERNO ($\vec{B} = 0$ ESTERNAMENTE). AL CONTRARIO, IL TRATTO DI l INTERNO AL SOLENOIDE ATTRAVERSA UNA ZONA IMERSA IN UN CAMPO MAGNETICO, PERANTO CHIAMATA h LA LUNGHERIA DI TALE TRATTO AVREMO:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot h \cdot \cos 0 = B \cdot h$$

$$= \mu_0 i N$$

LA LINEA CAUSA l CONTIENE, AL SUO INTERNO, N SPIRE (NEL DISCORSO 4). PER SEMPLICITÀ

AVENDO:

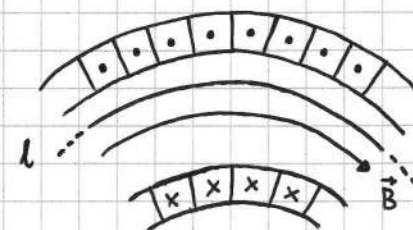
$$B \cdot h = \mu_0 i N \Leftrightarrow B = \mu_0 \frac{N}{h} i$$

DOVE $\frac{N}{h}$ RAPPRESENTA UNA SORTA DI DENSITÀ DI SPIRE PER UNITÀ DI LUNGHERIA.

SOLENOIDE CURVO

IL SOLENOIDE CURVO, ALTAMENTE DETTO TOROIDE, HA LE STESSA CARATTERISTICHE DEL SOLENOIDE RETTILINEO (CIOÈ È FORMATO DA SPIRE CIRCOLARI) CON LA

PECULIANTÀ DI ESSERE CIRCOLARE. DI SEGUITO NE RAPPRESENTO UNO SCHEMA, PER SEMPLICITÀ SOLO UNA PARTE:



CI PONIAMO CON LA NOSTRA LINEA AMPERIANA l ALL'INTERNO DEL TOROIDE, POICHÉ CIO IL CAMPO NON È NULLO, AL CONTRARIO DELL'AMBIENTE ESTERNO AL TOROIDE. SIMILMENTE A QUANTO ABBIAMO VISTO PRIMA, POSSIAMO SCRIVERE:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\pi r \cdot \cos 0 = B \cdot 2\pi r$$

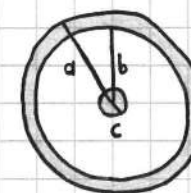
IL CAMPO MAGNETICO È SEMPRE TANGENTE ALLA LINEA AMPERIANA

PER LA LEGGE DI AMPERE AVREMO:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot N i \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

ESERCIZIO:

CONSIDERAMO IL CAVO COASSIALE IN FIGURA:



NELLE 2 ZONE VERDI SCORRE UNA CORRENTE UNIFORME i IN VERSI OPPOSTI, VOGLIAMO CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO B NEI SEGUENTI CASI:

$$\bullet r \geq a$$

IN QUESTO CASO LA LINEA AMPERIANA CONTENEREBBE 2 CORRENTI CONCATEMATE CHE SI ANNULLANO A VICENDA, DUNQUE IN QUESTO CASO IL CAMPO MAGNETICO SAREBBE NULLO

$$B_{r \geq a} = 0$$

$$\bullet r \leq c$$

CI TROVIAMO ORA NELLA STESSA CONDIZIONE CHE ABBIAMO STUDIATO PRIMA, DUNQUE IL CAMPO MAGNETICO SARÀ:

$$B_{r \leq c} = \frac{\mu_0 i}{2\pi c^2} r$$

$$\bullet c \leq r \leq b$$

IN QUESTO CASO POSSIAMO VEDERE IL CAVO CENTRALE COME UN FILO E SRAUTIAMO L'ESPRESSIONE DEL CAMPO MAGNETICO DOVUTO AD UN FILO UNIFORME E RETTILINEO AVREMO:

$$B_{c \leq r \leq b} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\bullet b \leq r \leq a$$

QUESTO È IL CASO PIÙ COMPLICATO, INFATTI DOVREMO CONSIDERARE SOLO PARZIALMENTE IL CONTRIBUTO DELLA GUAINA DAL MOMENTO CHE CI TROVEREMO AL SUO INTERNO:

$$i_c = i - j(\pi r^2 - \pi b^2)$$

CONTRIBUTO DEL
CAVO INTERNO

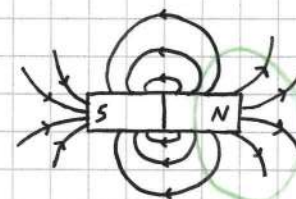
CONTRIBUTO DELLA
GUAINA ESTERNA

$$\begin{cases} B \cdot 2\pi r = \mu_0 (i - j(\pi r^2 - \pi b^2)) \\ j = \frac{i}{\pi a^2 - \pi b^2} \end{cases}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}$$

LEGGE DI GAUSS PER UN CAMPO MAGNETICO

IN PRECEDENZA ABBIAMO INTRODOTTO IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO, ORA VUOLIAMO DETERMINARE QUELLO DEL CAMPO MAGNETICO. OVVIAMENTE SARÀ DEFINITO COME PRODOTTO TRA CAMPO E AREA (COME AVEVAMO GIÀ VISTO). CONSIDERIAMO LA SEGUENTE ~~AREA~~ ~~PISTONATA~~ ~~PISTONATA~~ ~~PISTONATA~~ SUPERFICIE CHIUSA (DA INTENDERSI PER ESEMPIO COME SUPERFICIE SFERICA):



SICCOME LE LINEE DI CAMPO SONO CONTINUE POSSIAMO LÌ INTUIRE CHE IL CONTRIBUTO DI OGNUNA DI ESSE ATTRAVERSO LA SUPERFICIE VERDE (È UNA SUP. CHIUSA) SARÀ DOPPIO E CON SEGNO OPPOSTO.

CI ACCORGIAMO INFATTI CHE TANTE LINEE ENTRANO QUANTE NE ESCONO, IN OGNI CASO, E QUESTO È IMBABILMENTE DOVUTO AL FATTO CHE I MAGNETI COMPATTONO SEMPRE IN FORMA DI DIPOLO. MENTRE CON IL CAMPO ELETTRICO ERA POSSIBILE AVERE UN MONOPOLO ORA NON LO È PIÙ.

IN FORMULE ESPRIMEREMO QUESTO FATTO COSÌ:

$$\oint_B \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

QUESTA EQUAZIONE, INSIEME A QUELLA DEL CAMPO ELETTRICO, DIVENTERANNO 2 DELLE 4 FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO.

È OPPORTUNO A QUESTO PUNTO FARE UN PICCOLO RASSUNTO DELLE EQUAZIONI PIÙ IMPORTANTI INTRODOTTE FINORA, PRIMA DI FARLO OSSERVIAMO CHE IL LAVORO SVOLTO DALLA FORZA ELETTRICA IN UNA LINEA CHIUSA (PARTENDO E ARRIVANDO NELLO STESSO PUNTO) È NULLO, E QUINDI:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 = \oint \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

DI SEGUIVO UN RIPILOGO DELLE 4 GRANDIEZZE PIÙ IMPORTANTI:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

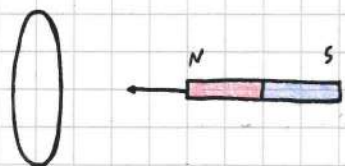
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot i_c$$

VEDREMO NEL PROSSIMO RIVISIO COME NEL CASO DI CAMPI VARIABILI NEL TEMPO QUESTE GRANDIEZZE SIANO LEGATE TRA LORO.

ESPERIENZE DI FARADAY

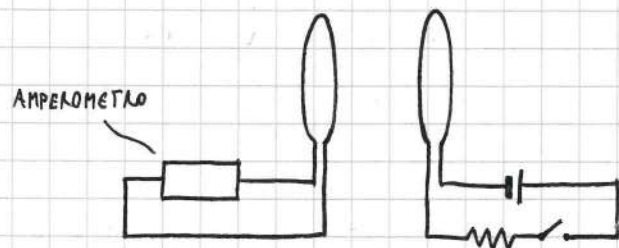
PRIMA DI INTRODURRE I RISULTATI CHE OTTENNE IL FISICO INGLESE MICHAEL FARADAY RIECONSTRUIAMO BREVEMENTE GLI ESISTIMENTI CHE FECE PER ARRIVARCI.

PER PRIMA COSA NOTÓ CHE DATI UN MAGNETE E UNA SPIRA CIRCOLARE NON PERCORSA DA CORRENTE:



MUOVENDO IL MAGNETE IN PROSSIMITÀ DELLA SPIRA SI GENERAVA DELLA CORRENTE AL SUO INTERNO. AL CONTRARIO, MUOVENDO IL MAGNETE NELL'ALTRO VERSO, SI GENERAVA DELLA CORRENTE IN VERSO OPPOSTO. SI SCELSE QUINDI CHE AL VARIARE DI $\vec{B}$ SI GENERAVA CORRENTE.

PER IL SECONDO ESPERIMENTO COSTAVI UN CIRCUITO SIMILE AL SEGUENTE:



CON QUESTO APPARECCHIO NOTÓ CHE AL VARIARE DELLA CORRENTE NEL SECONDO CIRCUITO NE VENIVA GENERATA NEL PRIMO, IN PARTICOLARE QUANDO L'INTERUTTORE VENIVA APERTO O CHIUSO (E QUINDI LA CORRENTE SCORREVA PRIMA IN UN VERSO POI NELL'ALTRO) SI GENERAVA DELLA CORRENTE CON VERSI OPPOSTI NEL PRIMO CIRCUITO.

LEGGE DI FARADAY - LENZ

LE ESPERIENZE CHE HO APPENA DESCRITTO PORTARONO IL FISICO INGLESE AD IPOTIZZARE CHE A GENERARE UNA CORRENTE NEI CIRCUITI CHE INIZIALMENTE NON NE AVEVANO (LA CORRENTE ERA GENERATA A PARTIRE DA UNA FORZA ELETTROMOTRICE) ERA PROPRIO LA VARIAZIONE DEL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO. IN FORMULE AUREMO:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

DOVE $\mathcal{E}_i$ RAPPRESENTA LA f.e.m. INDOTTA E CON IL SEGNO NASCIVAMO IL FATTO CHE LA f.e.m. INDOTTA È TALE DA OPPORSI ALLA CAUSA CHE L'HA INDOTTA, MA VEDREMO POI, PIÙ IN DETTAGLIO, QUESTO ASPETTO.

FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO E LINEA CHIUSA

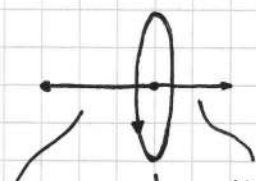
PRIMA ABBIAMO CONSIDERATO IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA, ORA PRENDIAMO UNA QUALUNQUE LINEA CHIUSA ED ESTIMIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO ATTRAVERSO QUALUNQUE SUPERFICIE CHE POGGI SULLA LINEA SCELTA COME:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot \hat{u}_n \cdot d\vec{A}$$

DOVE IL FLUSSO NON VARIA A SECONDA CHE SI CAMBI LA SUPERFICIE POGGIANTE SULLA LINEA CHIUSA. MISUREMO IL FLUSSO IN WEBER, Wb .

SIGNIFICATO DEL SEGNO "-"

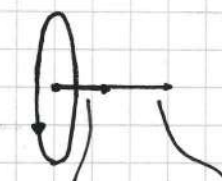
LA FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA È TALE DA OPPORSI ALLA CAUSA CHE L'HA GENERATA, QUESTO FATTO DEVE ESSERE CONSIDERATO UNA CONSEGUENZA FISICA CHE FAREMO TRA POCO. IN TUTTO QUELLO VEDIAMO IN CHE MODO SI OPpone:



SUPPONENDO CHE IL CAMPO FLUSSO AUMENTI IN QUESTA DIREZIONE

LA F.E.M. INDOTTA DEVE GENERARE UNA CORRENTE CHE GENERI UN CAMPO MAGNETICO IN QUESTA DIREZIONE

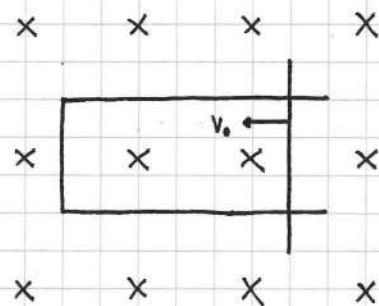
QUINDI IL VERSO DELLA CORRENTE SARÀ QUESTO



SUPPONENDO CHE IL CAMPO STA DIMINUENDO LUNGO QUESTA DIREZIONE

LA F.E.M. SI OPpone A QUESTA DIMINUIZIONE CON UNA CORRENTE CHE GENERA UN CAMPO LUNGO LA STESSA DIREZIONE

CONSIDERIAMO ORA UNA SBARRA LIBERA DI MUOVERSI SU UN BINARIO IMMERSO IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME:

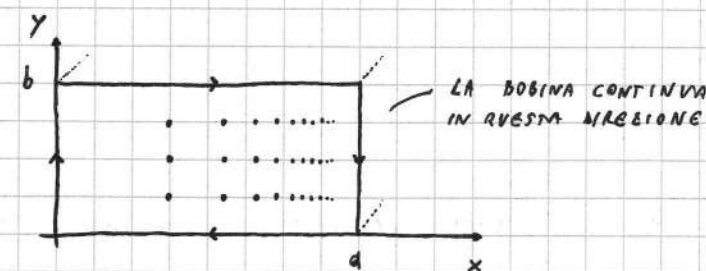


IMPRIMIAMO ALLA SBARRA UNA VELOCITÀ INIZIALE v_0 . SECONDO LE REGOLE APPENA VISTE, POICHÉ IL FLUSSO DIMINUISCE (L'AREA STA DIMINUENDO) E IL CAMPO MAGNETICO È ENTRANTE IL CIRCUITO DOVREBBE GENERARE UN CAMPO MAGNETICO INDOTTO ENTRANTE, FACENDO SCORRERE LA CORRENTE IN SENSO ORARIO. QUESTO FATTO GENEREREBBE ANCHE UNA FORZA CHE FRENEREBBE LA SBARRATA.

SE LA CORRENTE SCORRESSE IN SENSO ANTIORARIO SI GENEREREBBE INVECE UNA FORZA VERSO SINISTRA CHE FAREBBE ACCELERARE IMPERINITAMENTE LA SBARRATA, FATTO NON CONCILIABILE CON LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA.

ESERCIZIO:

SUPPONIAMO DI AVERE UNA BOBINA RETTANGOLARE DI LATI $a = 0,10 \text{ m}$ E $b = 0,05 \text{ m}$ COMPOSTA DA $N = 100$ SPIRE DI RESISTENZA TOTALE $R = 2 \Omega$. SU DI ESSA AGISCE UN CAMPO MAGNETICO $\vec{B}(x, t) = 5x^2(t^2 - 0,25) \hat{k} \text{ T}$. VUOLIAMO TROVARE LA F.E.M. INDOTTA $\mathcal{E}_i(t)$ E $i(t)$.



PER PRIMA COSA ESPRIMIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO INTERNO ALLA BOBINA:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= N \cdot \int_0^a B(t, x) b \, dx = N \cdot \int_0^a 5x^2(t^2 - 0,25) b \, dx \\ &= 5Nb(t^2 - 0,25) \cdot \int_0^a x^2 \, dx = 5Nb(t^2 - 0,25) \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

DERIVANDO ORA RISPETTO AL TEMPO OTTIENIAMO LA F.E.M. INDOTTA:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(t) &= - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(5Nb(t^2 - 0,25) \frac{a^3}{3} \right) = -5Nb \frac{a^3}{3} \cdot 2t \\ &= -16,7 \cdot 10^{-3} t \text{ V} = -16,7 \text{ mV} \cdot t \end{aligned}$$

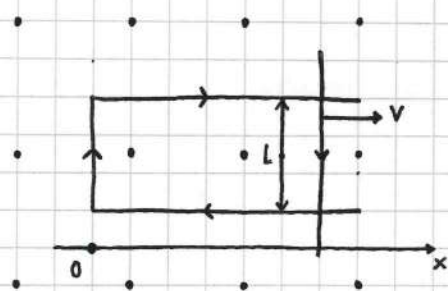
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} = 8,35 \text{ mA} \cdot t$$

VUOLIAMO ORA CALCOLARE LA CARICA q CHE CIRCOLA TRA GLI ISTANTI $t = 0 \text{ s}$ E $t = 0,5 \text{ s}$:

$$\Delta q = \int_0^{0,5} i(t) \, dt = \int_0^{0,5} 8,35 \cdot 10^{-3} t \, dt = 8,35 \cdot 10^{-3} \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{0,5} = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

ORIGINE DEL CAMPO ELETTRICO INDOTTO

CONSIDERIAMO DI NUOVO IL SISTEMA FORMATO DALLA SBAMETTA CONDUTTRICE POSTA SU UNA ROTAZIONE ANCH'ESSA CONDUTTRICE IMMERSO IN UN CAMPO MAGNETICO B UNIFORME:



ABBIAMO VISTO COME LA FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA POSSA ESSERE ESPRESSA DALLA VARIATIONE DEL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO:

$$\Phi_B = B \cdot Lx \cdot \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |E| = - \frac{d\Phi_B}{dt} = BL \frac{dx}{dt} = BLv$$

IN REALTÀ LA f.e.m. INDOTTA HA ORIGINE DALLA FORZA DI LORENTE, CHE SI OCCUPA DI SPOSTARE LE CARICHE NEGATIVE (e^-) NELLA SOSTANZA DELLA SBAMMA MOBILE:

$$\vec{F} = -e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

IL VERSO DEL PRODOTTO VETTORIALE PUNTA IN BASSO MA IL "meno" INVERTE IL VERSO E FA SÌ CHE GLI ELETTRONI SALLANO. IN PARTICOLARE DA QUESTA RELAZIONE È POSSIBILE RICAVARE DUELLA DEL CAMPO ELETTRICO INDOTTO:

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} = -vB \hat{j}$$

PUNTA
VERSO IL
BASSO

IL CHE SPIEGA PERCHÉ LA CORRENTE SCORRE IN SENSO ORARIO. DA ORANTO ABBIAMO APPENA VISTO SI PUÒ CALCOARE LA f.e.m. INDOTTA COME:

$$|E| = \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^L vB \cdot dl \cdot \cos 0^\circ = vBL$$

ABBIAMO OTTENUTO LA STESSA RELAZIONE DI PRIMA LUAMANDO ALL'ORIGINE DEL FENOMENO.

SI OSSERVI CHE PER MANTENERE LA SBAMETTA IN MOVIMENTO A VELOCITÀ COSTANTE OCCORRE IMPORRE UNA FORZA ESTERNA PAR A QUELLA CHE CERCA DI FARMALA:

$$\vec{F} = i \cdot \vec{L} \times \vec{B}$$

IN PARTICOLARE IL LAVORO SVOLTO NELL'UNITÀ DI TEMPO (POTENZA MECCANICA) SARÀ PAR A:

$$\begin{aligned} P &= \frac{dL}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} = F \cdot v = iLBv \\ &= \frac{Ei}{R} \cdot Lbv = \frac{vBL}{R} \cdot Lbv = \frac{v^2 B^2 L^2}{R} \\ &= i^2 \cdot R \end{aligned}$$

CHE È PROPRIO PAR ALLA POTENZA ELETTRICA SPESA (O DISSIPATA) DALLA RESISTENZA DEL CIRCUITO.

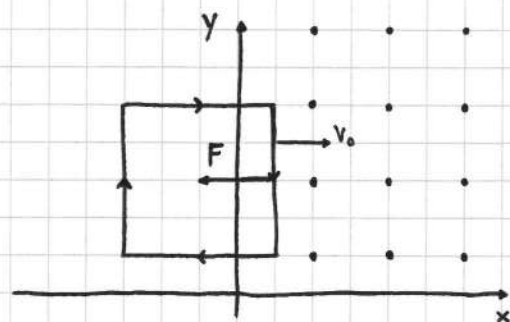
CORRENTI PARASSITE

CON IL TERMINE CORRENTI PARASSITE O CORRENTI DI **FOUCAULT** SI IDENTIFICANO LE CORRENTI INDOTTE. ESSE INFATTI POSSONO PRODURRE EFFETTI INTERESSANTI IN SISTEMI DOVE VARIA IL CAMPO MAGNETICO.

SONO PERÒ UTILIZZATE IN APPARECCHI COME METAL DETECTOR O FRENI MAGNETICI.

ESERCIZIO 1:

CON IL SEGUENTE ESERCIZIO INSENERO QUALCHE DATO IN UN SISTEMA A NOI GIÀ IN PARTE NOTO. CONSIDERIAMO UNA SPIRA CON $v_0 = 5 \frac{m}{s}$ CHE SI MUOVE VERSO UNA LAMA CON CAMPO MAGNETICO UNIFORME, COME NEL SEGUENTE LAMINO



$$l = 0,10 \text{ m}$$

$$m = 0,004 \text{ kg}$$

$$R = 0,64 \, \Omega$$

$$v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$B = 0,8 \text{ T}$$

ANZI TUTTO RICAVIAMO L'ESPRESSIONE DELLA VELOCITÀ v IN FUNZIONE DEL TEMPO:

$$\begin{cases} -F = i l B \\ |\mathcal{E}_i| = B \cdot v \cdot l \\ i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} \end{cases} \Rightarrow -F = \frac{B^2 l^2}{R} v$$

PER IL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA AVREMO:

$$m \cdot a = - \frac{B^2 l^2}{R} v \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = - \frac{B^2 l^2}{m R} v$$

ARRANGIANDO I TERMINI SI OTTIENE:

$$\frac{dv}{v} = - \frac{B^2 l^2}{m R} dt$$

LA CUI INTEGRAZIONE:

$$\ln v = - \frac{B^2 l^2}{m R} t + \text{costante}$$

FACENDO DIVENTARE I 2 TERMINI L'ESPONENTE DI e SI OTTIENE:

$$v = e^{\text{costante} - \frac{B^2 l^2}{m R} t} = e^{\text{costante}} \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{m R} t}$$

PER TROVARE IL VALORE DI e^{costante} È SUFFICIENTE PORRE LA CONDIZIONE INIZIALE

$$v(t=0) = v_0, \text{ quindi:}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{m R} t}$$

A QUESTO PUNTO, PER SAPERE IL TEMPO E LA VELOCITÀ DELLA SPIRA UNA VOLTA ENTRATA COMPLETAMENTE NEL CAMPO MAGNETICO, DOVREMO INTEGRARE $v(t)$ PER OTTENERE $s(t)$:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{m R} t} dt = v_0 \left(-\frac{m R}{B^2 l^2} e^{-\frac{B^2 l^2}{m R} t} + C \right)$$

PER TROVARE IL VALORE DELLA COSTANTE DI INTEGRAZIONE PONGO $s(t=0) = 0$:

$$0 = v_0 \left(-\frac{m R}{B^2 l^2} + C \right) \Leftrightarrow v_0 C = \frac{m R v_0}{B^2 l^2} \Leftrightarrow C = \frac{m R}{B^2 l^2}$$

OTTENIAMO QUINDI L'ESPRESSIONE DEL MOTO:

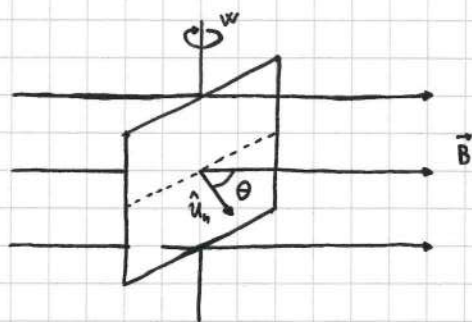
$$s(t) = v_0 \left(-\frac{m R}{B^2 l^2} e^{-\frac{B^2 l^2}{m R} t} + \frac{m R}{B^2 l^2} \right)$$

DA CUI SARI' POSSIBILE TROVARE IL TEMPO NECESSARIO AD ENTRARE TOTALMENTE NEL CAMPO MAGNETICO E LA VELOCITÀ DOPO TALE INTERVALLO.

GENERATORE DI CORRENTE ALTERNATA

QUELLO CHE STIAMO PER VEDERE È IL METODO PIÙ SFRUTTATO PER GENERARE DELLA CORRENTE ALTERNATA. PER **CORRENTE ALTERNATA** SI INTENDE UNA CORRENTE CHE CAMBIA CICLICAMENTE IL VERSO.

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE APPARECCHIO, COMPOSTO DA UNA SPIRA LIBERA DI RUOTARE POSTA IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME:



RUOTANDO VARI L'ANGOLO COMPRESO FM $\hat{u}_n$ E $\vec{B}$, VARIARE VARI IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO E SI GENERA UNA F.E.M. INDOTTA. ESPRIMAMO VARI Φ_B IN FUNZIONE DELL'ANGOLO θ :

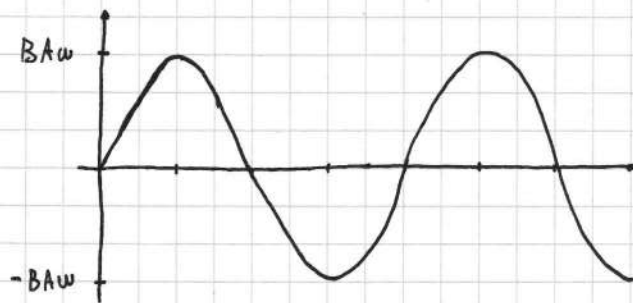
$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot \hat{u}_n \cdot dA = B A \cos \theta = B A \cos(\omega t)$$

SCRIVENDO θ COME ωt HO SUPPOSTO CHE ALL'ISTANTE INIZIALE θ FOSSE NULLO.

A QUESTO PUNTO DERIVANDO RISPETTO AL TEMPO IL FLUSSO OTTIENIAMO LA F.E.M. INDOTTA:

$$\begin{aligned} |E_i| &= - \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} (B A \cos(\omega t)) = + B A \sin(\omega t) \cdot \omega \\ &= + B A \omega \sin(\omega t) \end{aligned}$$

DAL CUI GRAFICO SI PUÒ OSSERVARE CARIATTERISTICAMENTE IL SUO CARATTERE ALTERNATO (o ONDULATO NO):

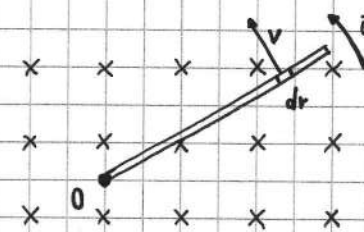


SE NEL CIRCUITO AVESSE ESSERE UNA QUALCUNA RESISTENZA A QUEL PUNTO LA CORRENTE POTREBBE ESSERE ESPRESSA COME:

$$i = \frac{E_i}{R} = \frac{B A \omega}{R} \sin(\omega t)$$

SBARRETTA CONDUTTRICE ROTANTE

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE SBARRETTA CONDUTTRICE ROTANTE:



PER ESPRIMERE LA F.E.M. INDOTTA CI BASTA OSSERVARE CHE IN UN TRATTO dr INFINITESIMO VALE:

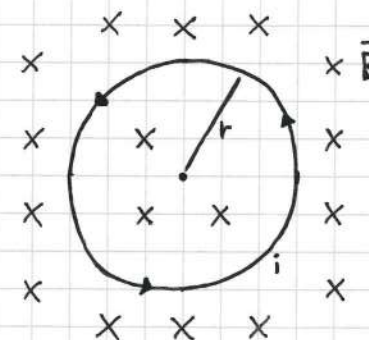
$$dE_i = B v \cdot dr$$

E ANCHE:

$$\begin{aligned} E_i &= \int_0^R dE_i = \int_0^R B v \cdot dr = \int_0^R B \omega r \cdot dr = B \omega \int_0^R r \cdot dr \\ &= B \omega \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} B \omega R^2 \end{aligned}$$

CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI VARIABILI

IN PRECEDENZA ABBIAMO VISTO COME UN CAMPO MAGNETICO STATICO NON SIA IN GRADO DI AUMENTARE O DIMINUIRE L'ENERGIA CINETICA DI UNA CARICA. CONSIDERIAMO ORA UN CAMPO MAGNETICO VARIABILE E UN CIRCUITO CIRCOLARE:



SULLA SPIRA CIRCOLARE INTERIENA A CIRCOLARE UNA CORRENTE i CHE GENERERÀ UN CAMPO MAGNETICO CHE SI OPPONE ALL'AUMENTO DI $\vec{B}$. IN PARTICOLARE DOBBIAMO OSSERVARE CHE IN QUESTO CASO NON CI TROVIAMO IN CONDIZIONI STATICHE, E QUINDI:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} \neq 0$$

$$= - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

DA CUI SI INTUISCE CHE IL CAMPO ELETTRICO INDOTTO HA VALORE NON NULLO E DUNQUE È IN GRADO DI FAR VARIARE L'ENERGIA CINETICA. PRIMA DI PROCEDERE SI OSSERVI CHE IL CAMPO ELETTRICO INDOTTO NON È CONSERVATIVO, INATTI, SE COSÌ FOSSE LA FORZA LAVORATA DA ESSO ~~NON~~ SAREBBE ZERO LUNGO UN PERCORSO CHIUSO:

$$\oint \vec{E}_i \cdot q \cdot d\vec{s} \neq 0 \Rightarrow \text{NO CONSERVATIVO}$$

PROVIAMO ORA A CALCOLARE IL VALORE DI QUESTO CAMPO ELETTRICO INDOTTO $\vec{E}_i$. DALLA LEGGE DI FARADAY-LENZ ABBIAMO:

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \pi r^2 \cdot \frac{dB}{dt} \quad [1]$$

MENTRE RISOLVENDO SEMPLICEMENTE L'INTEGRALE ABBIAMO:

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = E_i \cdot 2\pi r \quad [2]$$

OCCORRE PERÒ SOTTOLINEARE CHE IL VERSO DEL CAMPO ELETTICO SARÀ SEMPRE TANGENTE ALL'IPOTETICA SPIRA CIRCOLARE (IL CAMPO ELETTICO ESISTE ANCHE SENZA SPIRA) PER RAGIONI DI SIMMETRIA. ~~INRATTI~~ ^{LA} ~~NON~~ COMPONENTE RADIALE DEVE PER FORZA ANNULLARSI A CAUSA DELLA STESSA COMPONENTE ~~NON~~ OPPOSTA SPAZIALMENTE RISPETTO AL CENTRO DELLA SPIRA.

DALLA [1] E [2] È POSSIBILE RICAVARE IL MODULO DEL CAMPO ELETTICO:

$$|E_i| \cdot 2\pi r = - \pi r^2 \cdot \frac{dB}{dt} \Rightarrow |E_i| = \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} \quad [3]$$

SE QUINDI IMMETTIAMO UNA CARICA IN QUESTO CAMPO MAGNETICO E FACCIAMO AUMENTARE IL CAMPO MAGNETICO AUMENTERÀ LA FORZA CENTRIFUGA:

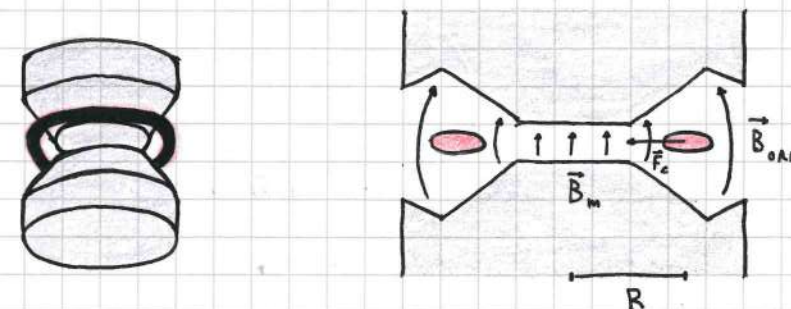
$$\vec{F}_c = q \vec{v} \times \vec{B} \neq q \vec{E}_i = \vec{F}_t \quad [4]$$

TANGENZIALE

ALL'AUMENTARE DI B AUMENTA E (COME SI VEE NELLA [3]) E DI CONSEGUENZA LA FORZA CENTRIFUGA. SE AUMENTA QUEST'ULTIMA AUMENTA ANCHE L'ENERGIA CINETICA DELLA CARICA, INRATTI PIÙ $\vec{F}_{cent}$ È INTENSA E PIÙ L'ORBITA SI RESTRINGE, CONSENTENDO ALLA FORZA $\vec{F}_{cent}$ LAVORATA DA $\vec{E}_i$ DI SVOLGERE DEL LAVORO LUNGO UNA COMPONENTE (QUELLA RADIALE) DELLO SPOSTAMENTO. IL CAMPO ELETTICO INDOTTO GENERA UNA FORZA TANGENZIALE?

IL BETATRONE

LE CONCLUSIONI A CUI SIAMO APPENA GIUNTI STANNO ALLA BASE DEL FUNZIONAMENTO DEL **BETATRONE**, UN ACCELERATORE DI PARTICELLE BASATO SUL CAMPO MAGNETICO VARIABILE. DI SEGUITO NE PROPONGO UNO SCHEMA:



ABBIAMO DETTO CHE AFFINCHÉ AUMENTI L'ENERGIA CINETICA DELLE CARICHE DEVE AUMENTARE L'INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO, QUINDI B_m DOVrà ESSERE MAGGIORE DI $B_{0,05}$, MA DI QUANTO?

PER RISPONDERE A QUESTA DOMANDA CALCOLIAMO LA FORZA CENTRIFUGA SFRUTTANDO LE 2 ULTIMAZIONE DELLA [4]:

$$F_c = q v B \quad \left(\begin{smallmatrix} \text{I VETTORI SONO } \perp \\ \text{A. DI MOTO} \end{smallmatrix} \right) = m a_c = m \frac{v^2}{r} = (mv) \frac{v}{r} = p \cdot \frac{v}{r} \Rightarrow p = q r B_{0,05}$$

$$F_t = q E_i \quad \left(\begin{smallmatrix} \text{DALLA [3]} \end{smallmatrix} \right) = q \cdot \frac{r}{2} \frac{dB_m}{dt} = m \cdot a_t = \frac{dp}{dt} \Rightarrow dp = q \frac{r}{2} dB_m$$

QUINDI AFFINCHÉ LE CARICHE VENGANO ACCELERATE PUR MANTENENDO IN ORBITA ^{A MINO R} V DEVE VALERE LA SEGUENTE RELAZIONE:

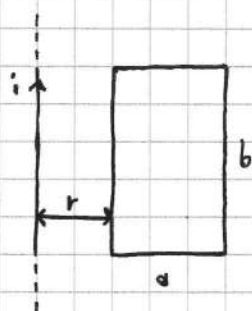
$$q r dB_{0,05} = q \frac{r}{2} dB_m \Rightarrow B_{0,05} = \frac{1}{2} B_m$$

IL CAMPO MAGNETICO MEDIO INTERNO ALL'ORBITA DEVE ESSERE LA METÀ DI QUELLO SULL'ORBITA, QUESTO PERMETTE DI FAR MANTENERE AD UNA DISTANZA R DAL CENTRO IL RASCHIO DI CARICHE. INRATTI NON APPENA IL RASCHIO ACCELERA SI ALLONTANA DAL CENTRO, DOVE INCANIMA IN

CAMPO MAGNETICO PIÙ INTENSO CHE LO RISPONDA VERSO IL CENTRO, MA C'È ANCHE UNA VARIAZIONE DI FLUSSO DI B E QUINDI IL RASCIO TORNA AD ACCELERARE. IL PROCESSO CONTINUA COSÌ ACCELERANDO IL RASCIO

ESERCIZIO:

ABBIAMO UN FILO RETTILINEO PERCORSO DA CORRENTE VICINO AL QUALE È POSTA UNA SPIRA:



$$a = 0,06 \text{ m} \quad b = 0,12 \text{ m}$$

$$r = 0,04 \text{ m} \quad i_0 = 10 \text{ A}$$

$$\tau = 5 \text{ s} \quad R = 2 \Omega$$

SULLA CORRENTE i SAPPIAMO CHE VARIA IN FUNZIONE DEL TEMPO SECONDO LA LEGGE:

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

VOLENDO ORA CALCOLARE LA F.E.M. INDOTTA IN FUNZIONE DEL TEMPO. DALLA LEGGE DI FARADAY - LENZ ABBIAMO:

$$|\mathcal{E}_i| = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

MA OCCORRE PRIMA STABILIRE QUALE SIA IL FLUSSO. PER FARLO ESPRIMIAMO IL CAMPO MAGNETICO CHE ATTRAVERSA LA SPIRA IN FUNZIONE DELLA DISTANZA l DAL FILO E DEL TEMPO:

$$B(l, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi l} = \frac{\mu_0 i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{2\pi l}$$

ORA ESPRIMIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO CHE ATTRAVERSA UNA PICCOLA STRISCIA

VERTICALE A DISTANZA l DAL FILO (IN QUESTO MOMENTO IL CAMPO MAGNETICO VARIA SOLO IN FUNZIONE DEL TEMPO):

$$d\Phi_B = B \cdot dA = \frac{\mu_0 i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{2\pi l} \cdot b dl$$

A QUESTO PUNTO, PER CALCOLARE IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO, CI BASTERÀ INTEGRARE PER l E $l+d$:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int_r^{r+d} d\Phi_B = \int_r^{r+d} \frac{\mu_0 i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{2\pi l} \cdot b dl = \frac{\mu_0 i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} b}{2\pi} \int_r^{r+d} \frac{dl}{l} \\ &= \frac{\mu_0 i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} b}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{r+d}{r} \right| \end{aligned}$$

MA NON CI RESTA CHE DERIVARE IN FUNZIONE DEL TEMPO PER AVERE L'ESPRESSIONE DELLA F.E.M. IN FUNZIONE DEL TEMPO:

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_i(t)| &= \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\mu_0 i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} b}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{r+d}{r} \right| \\ &= 0,44 \cdot 10^{-7} e^{-\frac{t}{5}} \text{ V} \end{aligned}$$

VOLENDO ORA CALCOLARE LA CARICA CHE ATTRAVERSA LA SPIRA NELL'INTERVALLO DI TEMPO CHE VA DA ZERO A $+\infty$ (LA CORRENTE DIMINUISCE LUNGO IL FILO E QUINDI ANCHE O POI CESSERÀ ANCHE QUELLA INDOTTA), DOVREMO:

QUESTA È LA CORRENTE INDOTTA! $\rightarrow i_i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$

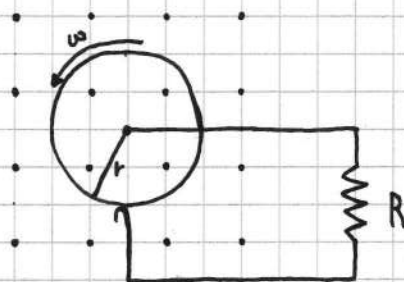
DA CUI:

$$\begin{aligned} \Delta q &= \int_0^{+\infty} dq = \int_0^{+\infty} \frac{\mathcal{E}_i}{R} dt = \int_0^{+\infty} \frac{0,44 \cdot 10^{-7} \cdot e^{-\frac{t}{5}}}{2} dt = \frac{5}{2} \cdot 0,44 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \text{ C} \\ &= 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ C} \end{aligned}$$

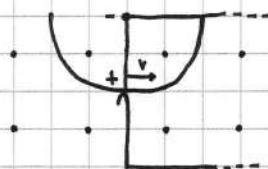
ESERCIZIO:

SUPPONIAMO DI AVERE UN DISCO ROTANTE IMMERSO IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME

A CUI VIENE ATTACCATO IL SEGUENTE CIRCUITO:



IL CIRCUITO OVVIAMENTE TENDE A FRENARE IL DISCO. IN PARTICOLARE POICHÉ LA SBARRETTA CHE CHIUDE IL CIRCUITO RUOTA IN SENSO ANTIORARIO SIAMO IN GRADO DI DETERMINARE IL VERSO DELLA FORZA DI COULOMB DI CUI NASCONO LE CANCHE DEL CIRCUITO, CON LA REGOLA DELLA MANO DESTRA OTTIENIAMO:



LE CANCHE SCORRONO QUINDI IN SENSO ORARIO ATTRAVERSO IL CIRCUITO. A QUESTO PUNTO, DATO CHE LA SBARRETTA È IN MOVIMENTO POSSIAMO RICAVARE L'INTENSITÀ DELLA F.E.M. INDOTTA:

$$|\varepsilon| = \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^r v B \, dl = \int_0^r B \omega l \, dl = B \omega \frac{r^2}{2}$$

ESPRIMIAMO ORA IL VALORE DELLA FORZA FRENANTE CHE IL CIRCUITO (LA SBARRETTA) ESERCITA SUL DISCO:

$$d\vec{F} = i \, d\vec{l} \times \vec{B} \Leftrightarrow dF = i B \, dl \cdot \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow dF = i B \, dl$$

A QUESTO PUNTO POSSIAMO RICAVARE IL MOMENTO TORCENTE CHE AGISCE SULLA SBARRETTA (E ANCHE SUL DISCO):

$$d\tau = i B \, dl \cdot r \Leftrightarrow \tau = \int_0^r d\tau = \int_0^r i B r \, dr = \frac{i B r^2}{2} \quad [1]$$

IL MOMENTO TORCENTE È ANCHE UGUALE A:

$$\tau = I \alpha = I \frac{d\omega}{dt} \quad [2]$$

PER POTER RICAVARE $\omega(t)$ NON CI RESTA CHE CALCOLARE $i(t)$, MA DALL'EQUAZIONE DEL CIRCUITO SI HA:

$$\varepsilon - iR = 0 \Leftrightarrow i = \frac{B \omega r^2}{2R} \quad [3]$$

VALUTANDO ORA LA [1] E LA [2], DOPO AVER SOSTITUITO IN [3] NELLA [1], AVREMO:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \frac{B^2 r^4}{4R} \omega$$

DA CUI:

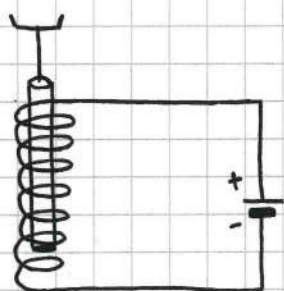
STA DECORRENDO

$$\frac{B^2 r^4}{4RI} dt = - \frac{d\omega}{\omega} \Leftrightarrow \ln \omega = - \frac{B^2 r^4}{4RI} t + \text{cost}$$

$$\omega = A \cdot e^{-\frac{B^2 r^4}{4RI} t} \quad \begin{matrix} \text{CONDIZIONE} \\ \text{INIZIALE} \\ \omega(0) = \omega_0 \end{matrix} \Leftrightarrow \omega(t) = \omega_0 \cdot e^{-\frac{B^2 r^4}{4RI} t}$$

PROPRIETÀ MAGNETICHE DELLA MATERIA

SI PUÒ OSSERVARE SPERIMENTALMENTE CHE MATERIALI DIVERSI SUBISCONO FORZE DIVERSE SE INSERITI ALL'INTERNO DI SOLENOIDI PERCORSI DA CORRENTE (CAMPI MAGNETICI UNIFORMI):



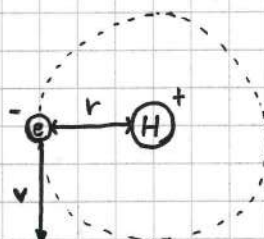
IN PARTICOLARE ALCUNI MATERIALI USCENTO DI UNA FORZA REPULSIVA MENTRE ALTRI ATTRATTIVA. QUESTO FENOMENO SI PUÒ INTERPRETARE DICENDO CHE LE SOSTANZE ACQUISTANO UN MOMENTO MAGNETICO $\vec{\mu}$ CHE PUÒ ESSERE CONCORDO O DISCORDARE RISPETTO AL CAMPO MAGNETICO.

IN PRECEDENZA ABBIAMO DEFINITO IL MOMENTO TORCENTE DOVUTO ALL'AZIONE DELLA FORZA DI LORENTE COME:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

MA È QUESTO IL MOTIVO CHE TENDE A FAR ALLINEARE IL MOMENTO MAGNETICO E IL CAMPO MAGNETICO.

SE I MATERIALI HANNO UN MOMENTO MAGNETICO ESSO È LA CAUSA DEI MOMENTI MAGNETICI DEGLI ATOMI CHE LO COMpongONO. CONSIDERIAMO UN MODELLO ATOMICO SEMPLICE:



SAPPIAMO CHE L'ELETTRONE PERCORRE L'ORBITA DI RAGGIO r A VELOCITÀ v E POICHÉ ABBIAMO DEFINITO IL MOMENTO MAGNETICO COME $\vec{\mu} = i A \hat{u}_n$ AVREMO:

$$\vec{\mu} = i A \hat{u}_n = \frac{v e}{2\pi r} \cdot \pi r^2 \cdot \hat{u}_n = \frac{v e r}{2} \hat{u}_n$$

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{v e}{2\pi r}$$

SAPENDO CHE $v \cdot m_e = p$ POSSIAMO RISCRIVERE $\vec{\mu}$ COME:

$$\vec{\mu} = \frac{e r}{2 m} \cdot p \hat{u}_n$$

IL FATTO CHE OGNI ATOMO ABBA UN MOMENTO MAGNETICO È UN FATTO OSSERVABILE SPERIMENTALMENTE, SI NOTA INOLTRE CHE QUESTO MOMENTO È QUANTIZZATO (NEL SENSO CHE PUÒ ASSUMERE PRECISI VALORI).

CHIAMEREMO $\vec{\mu}_o$ MOMENTO MAGNETICO ORBITALE E $\vec{\mu}_s$ (IL MOMENTO DOVUTO AL FATTO CHE GLI E- CIRCOLO SU SE STESSI) MOMENTO MAGNETICO DI SPIN. IL MOMENTO MAGNETICO TOTALE SARÀ LA SOMMA DI QUESTI DUE.

MAGNETIZZAZIONE

IN GENERALE I MATERIALI (AD ECCEZIONE DI ALCUNI, CHE DEFINIREMO POI) NON PRESENTANO UN MOMENTO MAGNETICO NETTO, QUESTO PERCHÉ GLI ATOMI SONO DISPOSTI IN MANIERA CASUALE E TENDONO AD ANNULLARSI IL CONTRIBUTO LUNGO LE DIREZIONI CHE POTREBBE AVERE IL MOMENTO MAGNETICO A VICENDA. QUANDO QUESTI MATERIALI SONO INVESTITI DA UN CAMPO MAGNETICO I DIPOLI MAGNETICI (GLI ATOMI) TENDONO AD ALLINEARSI (VEDI ESEMPIO FATTO SUL MOMENTO MAGNETICO) A B , CHIAMEREMO QUESTO FENOMENO MAGNETIZZAZIONE DEL MATERIALE.

CONSIDERIAMO ORA UN MATERIALE E CHIAMIAMO $\vec{\mu}$ IL MOMENTO MAGNETICO DEI SUOI ATOMI (CHE NON SARANNO ALLINEATI), DEFINIAMO LUNGO IL

VEETTORE MAGNETIZZAZIONE $\vec{M}$ COME IL MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO PER UNITÀ DI VOLUME:

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}}{V} \left[\frac{A}{m} \right]$$

SUPPONENDO ORA DI IMMERGERE UN MATERIALE IN UN CAMPO MAGNETICO ESTERNO CHE CHIAMEREMO $\vec{B}_{est}$, I DIPOLI MAGNETICI, ALLINEANDOSI, FORMERANNO A LORO VOLTA UN CAMPO MAGNETICO $\vec{B}_{mat}$, PERTANTO IL CAMPO MAGNETICO TOTALE SARÀ:

$$\vec{B}_{TOT} = \vec{B}_{est} + \vec{B}_{mat}$$

IN LINGUALE SI OSSERVA CHE IL CAMPO MAGNETICO GENERATO DALL'ALLINEAMENTO DEI DIPOLI SI PUÒ ESPRIMERE IN FUNZIONE DEL VETTORE MAGNETIZZAZIONE.

$$\vec{B}_{mat} = \mu_0 \vec{M}$$

MENTRE SPERIMENTALMENTE SI OSSERVA CHE $\vec{B}_{est} \propto \vec{M}$, PERTANTO:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{TOT} &= \vec{B}_{est} + \vec{B}_{mat} = \vec{B}_{est} + \mu_0 \vec{M} = \cancel{\vec{B}_{est} + \mu_0 \vec{M}} \\ &= \vec{B}_{est} + \mu_0 \cdot K \cdot \vec{B}_{est} = (1 + \mu_0 \cdot K) \vec{B}_{est} = \mu_r \vec{B}_{est} \end{aligned}$$

CAMPO ESTERNO
PERMEABILITÀ
MAGNETICA RELATIVA

A QUESTO PUNTO POSSIAMO SCRIVERE LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$\vec{B}_{est} + \mu_0 \vec{M} = \mu_r \vec{B}_{est} \Leftrightarrow \mu_0 \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{B}_{est}$$

IL VALORE ~~STABILIZZATO~~ DI μ_r INDICA L'INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO GENERATO

DAI DIPOLI MAGNETICI RISPETTO AL CAMPO MAGNETICO ESTERNO (GENERALMENTE HA VALORI MOLTO VICINI A 1, STANDO AD INDIRICARE CHE I B_{mat} SONO MOLTO DEBOLI RISPETTO AI B_{est}). IL VALORE DI $(1 + \mu_r)$ INDICA IL CONTRIBUTO, CIÒ È PIÙ È ALTO IN VALORE ASSOLUTO PIÙ È ALTO IL CONTRIBUTO DEL CAMPO MAGNETICO DOVUTO AL MATERIALE, CHIAMEREMO QUESTO VALORE **SUSCETTIVITÀ MAGNETICA** E LA INDICHEREMO CON: χ_m

IN LINGUE IL CONTRIBUTO AL CAMPO MAGNETICO TOTALE DA PARTE DEI MATERIALI È POCO, ESSO È DOVUTO AL MOMENTO MAGNETICO DEGLI ATOMI (SE QUESTO È BASSO ALLORA SARÀ BASSO ANCHE IL CONTRIBUTO DEL MATERIALE). AD OGNI MODO POSSIAMO DISTINGUERE 3 TIPI DI MATERIALI.

DIAMAGNETISMO

LE SOSTANZE **DIAMAGNETICHE** HANNO LA PARTICOLARITÀ DI AVERE UN MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO ATOMICO NULLO, IN ALTRE PAROLE LA SOMMA DEI MOMENTI MAGNETICI DEGLI ATOMI DEL MATERIALE È NULLA, IN PARTICOLARE NON SONO PRIMO PRESENTI CAMPI MAGNETICI INTINSECI. IL CAMPO MAGNETICO IN CUI VENGONO IMERSI QUESTI MATERIALI LINGUE, PER LA LINGUE DI LINGUE, UNA CORRENTE INDOTTA CHE A SUA VOLTA LINGUE UN CAMPO MAGNETICO CHE SI DEVE OPPORRE A QUELLO ESTERNO. IL RISULTATO È CHE IL CAMPO MAGNETICO TOTALE SARÀ PIÙ BASSO DI QUELLO ESTERNO (CI ABBIAMO SOTTRATTO QUALCOSA) E QUINDI μ_r SARÀ LEGGERMENTE MINORE DI 1 PORTANDO LA SUSCETTIVITÀ MAGNETICA AL NEGATIVO, IN PARTICOLARE NEL RANGE:

$$-10^{-6} \leq \chi_m \leq -10^{-3}$$

PARAMAGNETISMO

LE SOSTANZE **PARAMAGNETICHE** HANNO PICCOLI CAMPI MAGNETICI NON NULLI (IN ALTRE PAROLE HANNO UN MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO NON NULLO E

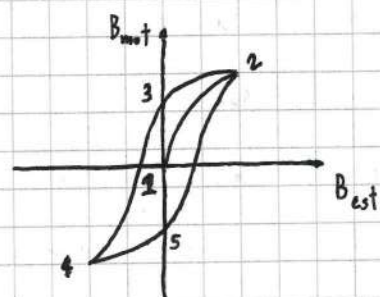
PERMANENTE). IN ASSENZA DI CAMPO MAGNETICO ESTERNO QUESTI MOMENTI MAGNETICI HANNO ORIENTAZIONE CASUALE. IN PRESENZA PERÒ DI UN CAMPO MAGNETICO ESTERNO QUESTI DIPOLI, COME ABBIAMO VISTO NEL CAPITOLO ABOMI MECCANICHE SU CIRCUITI, SI ORIENTANO SECONDO LE LINEE DEL CAMPO E ANCHE AGGIUNGO IL PROPRIO CONTRIBUTO A B_{est} . IN QUESTO MODO $B_{tot} > B_{est}$ E QUINDI $\frac{B_{tot}}{B_{est}} = \mu_r > 1$ E QUINDI $\mu_r - 1 = \chi_m > 1$. AD ALUN MODO LA SUSCETTIBILITÀ MAGNETICA RIMANE COMunque MOLTO BASSA:

$$10^{-5} \leq \chi_m \leq 10^{-3}$$

SI OSSERVI CHE UNA VOLTA RMOSSO IL CAMPO MAGNETICO CHE AVEVA MAGNETIZZATO IL MATERIALE I DIPOLI, A CAUSA DELL'AGITAZIONE TERMICA E DELLA RESISTENZA DELLE FORZE MAGNETICHE CHE LI HANNO ALLINEATI, SI TORNANO AD ORIENTARE CASUALMENTE.

FERROMAGNETISMO

NEI MATERIALI **FERROMAGNETICI** ANCHE IN ASSENZA DI CAMPO MAGNETICO ESTERNO CI SONO ALCUNE REGIONI IN CUI I MOMENTI MAGNETICI RISULTANO GIÀ ALLINEATI. SE ALLINEIAMO QUESTI DIPOLI CON UN CAMPO MAGNETICO ESTERNO B_{est} NOTEREMO UN CONSIDEREBILE AUMENTO DELL'INTENSITÀ DEL CAMPO ($10^3 / 10^4$ VOLTE B_{est}). ALLA PRESSIONE DI B_{est} IL MATERIALE FERROMAGNETICO RIMANE MAGNETIZZATO, QUESTO ENTRO UNA CERTA TEMPERATURA CRITICA OLTRE LA QUALE L'AGITAZIONE TERMICA RENDE CASUALE L'ORIENTAZIONE DEI DIPOLI. CHIAMIAMO QUESTA TEMPERATURA **T di CURIE**. È INOLTRE IMPORTANTE SOTTOLINEARE CHE LA MAGNETIZZAZIONE NON AUMENTA IN MANIERA LINEARE CON IL CAMPO ESTERNO B_{est} , MA SEGUE LE **CURVE DI ISTESIS**:



NEL PUNTO 3 SI OSSERVA QUELLO CHE HO APPENA DESCRITTO, CIÒ CHE UNA VOLTA RMOSSO IL CAMPO ESTERNO IL MATERIALE RIMANE MAGNETIZZATO.

CAMPO H

SPESSE IN AMBITO INGEGNERISTICO VIENE USATA LA SEGUENTE DEFINIZIONE DI CAMPO. IL **CAMPO H** È LA PARTE DI CAMPO MAGNETICO CHE RIMANDE DOVUTA SOLO ALLE CORRENTI DI CONDUZIONE (CIÒ È QUELLE CHE CONTROLLIAMO NOI, NON QUELLE INDOTTE). PRIMA ABBIAMO DEFINITO B_{tot} COME $\mu_0 \cdot \vec{M}$, MA ALLUNGANDO QUESTA MANIERA AVEREMO:

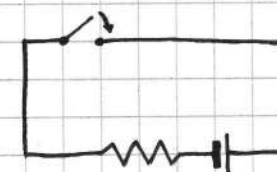
$$\vec{B}_{tot} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

DOVE $\mu_0 \vec{H}$ RAPPRESENTA IL CAMPO MAGNETICO ESTERNO B_{est} E $\mu_0 \vec{M}$ IL CAMPO MAGNETICO DEL MATERIALE $\vec{B}_{mat}$.

INDUTTANZA

IN PRECEDENZA ABBIAMO UTILIZZATO IL CONDENSATORE PER IMMAGAZINARE ENERGIA SOTTO L'AZIONE DEL CAMPO ELETTRICO, MA VEDREMO COME IMMAGAZINARNE SOTTO L'AZIONE DEL CAMPO MAGNETICO.

ANZITUTTO SI OSSERVI CHE QUANDO UN CIRCUITO VIENE CHIUSO, PER ESEMPIO:



LA CORRENTE NON RAGGIUNGE SUBITO IL SUO VALORE DI REGIME $\frac{V_0}{R}$ MA CI SI AVVICINA NEL TEMPO. USANDO IL FATTO CHE IN PRESENZA DI CORRENTE SI GENERA UN CAMPO MAGNETICO (E QUINDI UN FLUSSO) E CHE LA CORRENTE VARIA NEL TEMPO DEDUCIAMO CHE VIENE INDOTTA UNA FORZA ELETTROMOTRICE NELLO STESSO CIRCUITO. PRIMA DI ESPRIMERLA RICORDO CHE PER LA LEGGE DI BIOT-SAVART IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO È PROPORTIONALE ALLA CORRENTE CHE ANDAVERA

IL CIRCUITO, CHIAMEREMO IL COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITÀ TRA QUESTE 2
GRANDEZZE **INDUTTANZA**:

$$\Phi_B = L i$$

E DAL MOMENTO CHE i VARIA NEL TEMPO AVREMO:

$$\mathcal{E}_L = - \frac{d\Phi_B}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

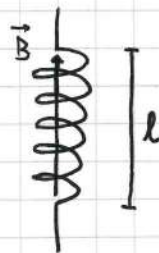
L'INDUTTANZA È UNA CARATTERISTICA CHE CONDIVIDONO TUTTI I MATERIALI CON I QUALI
SONO COSTRUITI I CIRCUITI, STA AD INDICARE L'INTENSITÀ CON CUI IL CIRCUITO
SI OPPONE ALLO SCAMBIAMENTO DELLA CORRENTE (ALLA VARIAZIONE DI CORRENTE).

UTILizzeremo L' **HENRY** (H) COME UNITÀ DI MISURA.

DI FATTO IN OGNI CIRCUITO LA CORRENTE GENERA UN CAMPO MAGNETICO CHE A SUA
VOLTA ~~NE~~ GENERA UNO FLUSSO NEL CAMPO MAGNETICO, LA VARIAZIONE DI CORRENTE
PORTA AD UNA VARIAZIONE DEL FLUSSO E QUINDI AD UNA f.e.m. INDOTTA NEL
CIRCUITO CHE SI OPPONE AL CAMPO CHE L'HA GENERATA. POSSIAMO PENSARE CHE
CI SIA UN PUNTO NEL CIRCUITO DOVE IL CAMPO MAGNETICO SI INTENSIFICA A
TAL PUNTO DA RENDERE INFLUENTE QUELLO CHE ABBIAMO NEL RESTO DEL CIRCUITO.
CHIAMEREMO QUESTA ZONA **INDUTTORE** E POTREMO AVERNE DI DIVERSI TIPI.

CASO SOLENOIDE:

IL SOLENOIDE LINEARE È UN OTTIMO DISPOSITIVO DI ACCUMULO DEL CAMPO MAGNETICO,
CONSIDERIAMO LO SCHEMA:



GIÀ CONOSCIAMO IL VALORE DEL CAMPO MAGNETICO INTERNO DATO IL NUMERO DI
SPIRE CHE COSTITUISCONO IL SOLENOIDE:

$$B = \mu_0 n i$$

$\nearrow$ SPIRE/m

DA CUI CI È POSSIBILE RICAVARE IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO:

$$\Phi_B = \underbrace{n \cdot l}_{N \text{ SPIRE}} \cdot A \cdot B = n l A \mu_0 n i$$

$$= L \cdot i$$

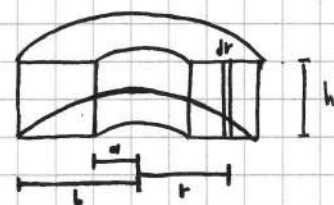
PERTANTO RICAVIAMO L'INDUTTANZA COME:

$$L = \mu_0 A n^2 l$$

DA CUI OSSERVIAMO LA SOMIGLIANZA CON IL CONDENSATORE, INFATTI ANCHE IN
QUESTO CASO L DIPENDE SOLO DALLE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELL'OGGETTO E DAL
MATERIALE (μ_0).

CASO TOROIDE:

CONSIDERIAMO ORA UN SOLENOIDE CIRCOLARE E CALCOLIAMO L'INDUTTANZA. ANCHE
IN QUESTO CASO NE CONOSCIAMO GIÀ IL CAMPO MAGNETICO B :



$$B(r) = \frac{\mu_0 N i}{2 \pi r}$$

$\nearrow$ N SPIRE

PERTANTO POSSIAMO RICAVARE IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO ATTRAVERSO LA SPIRA
INTERNA QUELLO CHE PASSA ATTRAVERSO I PICCOLI RETTANGOLINI $dr \cdot h$:

$$\Phi_B = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b B \cdot h \cdot dr = \frac{\mu_0 N i h}{2 \pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N i h}{2 \pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

PERANTO ATTRAVERSO N SPIRE AVREMO:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N^2 i h}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

E L'INDUTTANZA IN QUESTO CASO SARÀ:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

PER CUI VALGONO LE STESSIE CONSIDERAZIONI FATTE PER IL SOLENOIDE LINEARE.

INDUTTORI CON MATERIALI MAGNETICI

ABBIAMO VISTO COME L'INSERIMENTO DI MATERIALI MAGNETICI ALL'INTERNO DI CAMPI MAGNETICI NE PROVOCA UNA VARIAZIONE TAN A:

$$B_{TOT} = \mu_r \cdot B_{est}$$

E VNENDO IL FATTO CHE $B \propto \Phi_B$ E CHE $\Phi_B \propto L$ OTTENIAMO UNA RELAZIONE TRA L'INDUTTANZA TOTALE (Dovuta ALL'INDUTTORE E AL MATERIALE MAGNETICO) E L'INDUTTANZA DELL'INDUTTORE SENZA MATERIALE MAGNETICO ALL'INTERNO:

$$L_{TOT} = \mu_r \cdot L_{est}$$

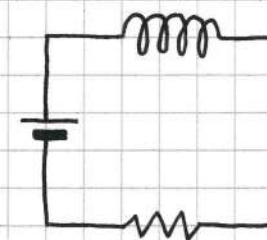
IN LENERE VENGONO UTILIZZATI MATERIALI FERROMAGNETICI PER AUMENTARE DI FATTORI NOTEVOLI ($10^3, 10^4$) L'INDUTTANZA.

CIRCUITI RL

ORA CHE ABBIAMO INTRODOTTO QUESTO NUOVO DISPOSITIVO PROVAMO A STUDIARE IL COMPORTAMENTO DI UN CIRCUITO CON RESISTENZA E INDUTTORE. DISTINGUEREMO TRA LA FASE DI APERTURA DEL CIRCUITO (Rimozione DELLA BATTERIA) E CHIUSURA (INSERIMENTO DELLA BATTERIA).

CHIUSURA:

IL CIRCUITO SCHEMATICAMENTE SARÀ:



ESSO SARÀ DESCRITTO DALL'EQUAZIONE:

$$\mathcal{E} - iR - \underbrace{L \cdot \frac{di}{dt}}_{\mathcal{E}_L} = 0$$

L'INDUTTORE SI OPpone ALLO SPOSTAMENTO

LA SOLITA EQUAZIONE DIFFERENZIALE CHE SI RISOLVE COME:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - Ri}{L} \Leftrightarrow -\frac{1}{R} \ln(\mathcal{E} - Ri) = \frac{1}{L} \cdot t + \text{cost} \Leftrightarrow$$

$$\ln(\mathcal{E} - Ri) = -\frac{R}{L} t + \text{cost} \Leftrightarrow \mathcal{E} - Ri = e^{-\frac{R}{L} t} \cdot A \Leftrightarrow$$

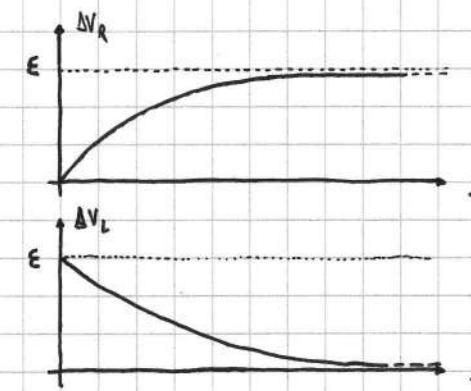
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - A e^{-\frac{R}{L} t} \Leftrightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t})$$

CONDIZIONI INIZIALI $i(0) = 0$

INCAVATA QUESTA ESPRESSIONE POSSIAMO SUBITO ESPRIMERE LA DIFFERENZA DI POTENZIALE CHE C'È AI CAPI DELLA RESISTENZA E DELL'INDUTTORE COME:

$$|\Delta V_R| = iR = \mathcal{E} (1 - e^{-\frac{R}{L} t})$$

$$|\Delta V_L| = L \frac{di}{dt} = \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L} t}$$



IL CHE CI RACCONTA UN'IMPORTANTE VENTÀ, L'INDUTTORE PROVOCA UNA BRUSCA CADUTA DI TENSIONE QUANDO LA VARIAZIONE DI CORRENTE È MASSIMA, CIOÈ NEL MOMENTO INIZIALE; MENTRE IL RESISTORE HA BISOGNO CHE INIZIA A SCORRERE PIÙ CORRENTE PER OFFRIRE PIÙ RESISTENZA.

SI NOTI CHE SIMILMENTE A QUANTO ABBIAMO VISTO PER IL CONDENSATORE DA IL RAPPORTO $\frac{L}{R}$ RAPPRESENTA UNA COSTANTE DI TEMPO (DETTA **COSTANTE DI TEMPO INDUTTIVA**).

CONFRONTO CON CIRCUITI RC

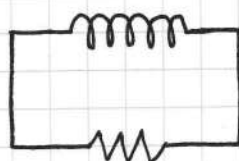
PROPONIAMO ORA L'EQUAZIONE CHE ESPRIME LA CORRENTE E LA CARICA IN FUNZIONE DEL TEMPO NEL CASO DI CIRCUITI RC E RL:

$$q(t) = C \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{L}} \right)$$

È IMMEDIATO TROVARE LE SOMIGLIANZE.

APERTURA:

NEL MOMENTO IN CUI TOLLIAMO LA BATTERIA IN ASPETTO CHE LA CORRENTE DIMINUISCA NEL TEMPO FINO AD AZZERARSI:



L'EQUAZIONE DEL CIRCUITO IN QUESTO CASO SARÀ:

$$\mathcal{E}_L - Ri = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

↑
I SOLI POTENZIALI
ANCHE ESSERE OPPOSTI

PROCEDENDO SI OTTIENE:

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln i = -\frac{R}{L} t + \text{cost} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$$

↳ CONDIZIONE INIZIALE
 $i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow A = \frac{\mathcal{E}}{R}$

EQUAZIONE MOLTO SIMILE A QUELLA TROVATA PER I CIRCUITI RC:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L} t} \quad i(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

MUTUA INDUTTANZA

PER ADESSO, IN TUTTI GLI ESEMPLI CHE ABBIAMO TRATTATO, I CIRCUITI ERANO PRESI SINGOLARMENTE E QUINDI RISPONDEVANO SOLO DEL FLUSSO CHE GENERAVANO DA SÉ STESSI (DA CUI AUTOMAGNETISMO / AUTOINDUTTANZA).

POTREMMO PERÒ AVERE UN CIRCUITO CHE RISPONDE DEL FLUSSO, OLTRE CHE PROPRIO, ANCHE DI UN CIRCUITO VICINO. SI OSSERVA SPOREMENTALMENTE CHE DATI 2 CIRCUITI IL FLUSSO DI CUI RISPONDE IL CIRCUITO 1 È DOVUTO ~~ALLA QUANTITÀ~~ AL CAMPO MAGNETICO DEL CIRCUITO 2 E ALL'AREA DEL CIRCUITO 1 E AL SUO NUMERO DI SPIRE:

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N_1 \int_{A_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1 = M_{2 \rightarrow 1} i_2$$

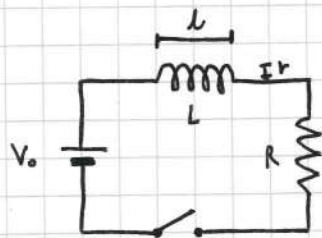
↳ VIENE ALLA FORMA DEI CIRCUITI E ALLA LORO POSIZIONE RELATIVA

DOVE $M_{2 \rightarrow 1}$ È DETTO **COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE**.

VALE UN RAGIONAMENTO ANALOGO CON $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ E SI DIMOSTRA CHE $M_{2 \rightarrow 1} = M_{1 \rightarrow 2}$.

ESERCIZIO:

DI SEGUITO LO SCHEMA DEL CIRCUITO INSIEME AI DATI INIZIALI:



$$R = 100 \, \Omega \quad l = 0,5 \, \text{m} \quad r = 0,02 \, \text{m}$$

$$V_0 = 15 \, \text{V} \quad t_1 = 5 \, \mu\text{s} \quad i(t_1) = 70 \, \text{mA}$$

VOLIAMO ORA TROVARE IL VALORE DELL'INDUTTANZA. PER FARLO SFRUTTiamo IL FATTO CHE CONOSCIAMO IL VALORE CHE LA CORRENTE ASSUME IN t_1 :

$$i(t_1) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t_1} \right) \Leftrightarrow \ln \left(-\frac{i(t_1) R}{\mathcal{E}} + 1 \right) = -\frac{R}{L} t_1$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{-R t_1}{\ln \left(-\frac{i(t_1) R}{\mathcal{E}} + 1 \right)} = 0,80 \cdot 10^{-3} \, \text{H} = 0,80 \, \text{mH}$$

A QUESTO PUNTO VUOLIAMO CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO B_1 GENERATO DALL'INDUTTORE ALL'ISTANTE t_1 . POICHÉ PER CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO B_1 ABBIAMO BISOGNO DI SAPERE QUALE SIA IL NUMERO DI SPIRE n PER UNITÀ DI LUNGHEZZA REALIZATO NELLA WIRE:

$$L = \mu_0 n^2 A l \Leftrightarrow n = \sqrt{\frac{L}{\mu_0 A l}} = 10^3 \frac{\text{SPIRE}}{\text{m}}$$

DA CUI, CONOSCENDO L'ESPRESSIONE DEL CAMPO MAGNETICO INTERNO AD UNA SPIRA (SOLENOIDE) RICAVIAMO:

$$B_1 = \mu_0 \cdot n \cdot i = 88 \cdot 10^{-6} \, \text{T} = 88 \, \mu\text{T}$$

UN UTILE CONTROVERIFICA PUÒ ESSERE QUELLA DI CONFRONTARE I DATI OTTENUTI CON QUELLI NOTI (RELESTRE, RISONANZE MAGNETICHE, ...).

ENERGIA MAGNETICA

NEL CAPITOLO PRECEDENTE ABBIAMO VISTO COME L'INDUTTORE SIA IN GRADO DI GENERARE UNA F.E.M. INDOTTA AL SUO INTERNO CHE SI OPPONE A QUELLA DELLA BATTERIA, IN PARTICOLARE ABBIAMO RICAVATO LA SEGUENTE FORMULA:

$$\mathcal{E} = Ri + L \frac{di}{dt} \quad [1]$$

QUELLO CHE VUOLIAMO FARE ORA È RICAVARE LA POTENZA SVILUPPATA DALLA BATTERIA E CONSEGUENTEMENTE L'ENERGIA DISSIPATA E ACCUMULATA RISPETTIVAMENTE NELLA RESISTENZA E NELL'INDUTTORE.

DALLA DEFINIZIONE DI POTENZA ELETTRICA

$$P = \frac{dU}{dt} = \mathcal{E} \frac{dq}{dt} \quad [2]$$

POSSIAMO TRASCRIVERE LA [1] NELL'ESPRESSIONE CHE METTE IN RELAZIONE LE DUE POTENZE.

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \quad [3]$$

IN PARTICOLARE NOI SIAMO INTERESSATI ALL'ENERGIA ACCUMULATA NELL'INDUTTORE E QUINDI CI CONCENTRIAMO NELL'ULTIMO TERMINE DELLA [3], CHE SOSTITUIREMO AL POSTO DELLA POTENZA GENERATA NELLA [2]

$$Li \frac{di}{dt} = \frac{dU}{dt} \quad [4]$$

SEMPLICIANDO dt SI OTTIENE L'ENERGIA ACCUMULATA NELL'INDUTTORE IN UN INTERVALLO INFINITESIMO:

$$L i di = dU \quad [5]$$

VOLENDO ORA CALCOLARE L'ENERGIA ACCUMULATA NELL'INDUTTORE TRA UN IPOTETICO ISTANTE INIZIALE (QUANDO INIZIA A SCOMPARRE NEL CIRCUITO LA CORRENTE) E UN ISTANTE IN CUI LA CORRENTE HA RAGGIUNTO IL VALORE DI REGIME (DOPO INFINITO TEMPO) DOVREMO INTEGRARE IL RISULTATO OTTENUTO NELLA [5] FRA 0 E $+\infty$

$$U = \int_0^{+\infty} dU = \int_0^{+\infty} L i di = \frac{1}{2} L i^2 \quad [6]$$

DECIDIAMO ORA DI PORCI NEL CASO PIÙ COMUNE, CIOÈ QUELLO DEL SOLENOIDE LINEARE, IL CHE CI PERMETTE DI SOSTITUIRE NELLA [6] I RISULTATI GIÀ OTTENUTI (L'INDUTTANZA IN UN SOLENOIDE E IL CAMPO MAGNETICO LEGATO DA UN SOLENOIDE, CHE INVECEMMO CI DÀ LA CORRENTE IN FUNZIONE DI B)

$$U = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 A L) \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2 \mu_0} (A L) \quad [7]$$

È INTERESSANTE PORRE L'ATTENZIONE SULLA GRANDezza CHE OTTENIAMO DIVIDENDO L'ENERGIA IMMAGAZINATA NELL'INDUTTORE PER IL SUO VOLUME, INFATTI IL RISULTATO (CHE CHIAMEREMO **DENSITÀ DI ENERGIA MAGNETICA**) CHE OTTENIAMO NOI DOPO AVER SUPPOSTO DI AVERE A CHE FARE CON UN SOLENOIDE LINEARE È IN REALTÀ LO STESSO CHE SI OTTERREBBE CON UNA QUALSIASI ALTRA CONFIGURAZIONE

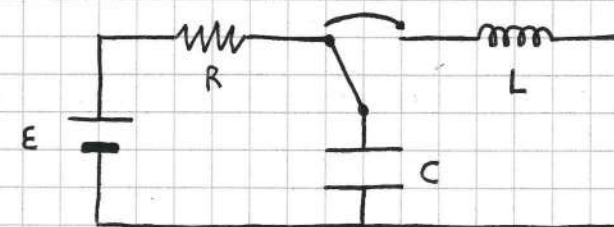
$$u_B = \frac{U}{V_0} = \frac{B^2}{2 \mu_0} \left[\frac{J}{m^3} \right] \quad [8]$$

IN SOSTANZA OGNI VOLTA CHE SIAMO IN PRESENZA DI UN CAMPO MAGNETICO B SAPPIAMO CHE ESSO COMPORTERÀ LA PRESENZA DI ENERGIA E LA [8] NE ESPRIME IL VALORE PER UNITÀ DI VOLUME.

OSCILLAZIONI ELETTROMAGNETICHE

IN QUESTO CAPITOLO VEDREMO COME VARIA LA CORRENTE ALL'INTERNO DI UN CIRCUITO COMPOSTO DA 2 OGGETTI AMPIAMENTE STUDIATI IN QUESTO CORSO: IL CONDENSATORE E L'INDUTTORE.

IMMAGINIAMO DI CARICARE IL CONDENSATORE C CON LA PRIMA MAGLIA, COMMUTANDO POI L'INTERUTTORE DALL'ALTRO LATO



NEL MOMENTO IN CUI SPOSTIAMO IL PICCOLO INTERUTTORE INIZIERÀ A SCOMPARRE DELLA CORRENTE NELLA SECONDA MAGLIA, INFATTI IL CONDENSATORE AGIRÀ COME UNA PICCOLA BATTERIA. PER CAPIRE MEGLIO COSA SUCCEDERÀ ALL'INTERNO DI QUESTO CIRCUITO SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DEL CIRCUITO

$$V_C - L \frac{di}{dt} = 0 \quad [1]$$

DOVE HO INDICATO CON V_C LA DIFFERENZA DI POTENZIALE AI CAPI DEL CONDENSATORE, CHE POSSIAMO ESPRIMERE IN FUNZIONE DELLA CARICA ACCUMULATA SULLE ARMATURE E DELLA CAPACITÀ DEL CONDENSATORE

$$\frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt} = 0 \quad [2]$$

AL MOMENTO PERÒ, NELLA [2], CI SONO 2 INCONGITE: $q(t)$ E $i(t)$. È OPPORTUNO RICORDARE LA RELAZIONE TRA CORRENTE E CARICA

$$\frac{dq}{dt} = i \quad [3]$$

CHE SOSTITUITA NELLA [2] CI PERMETTE DI AVERE UN'EQUAZIONE IN UNA SOLA INCOGNITA. PRIMA DI EFFETTUARE LA SOSTITUZIONE BISOGNA OSSERVARE CHE LA CARICA q SUL CONDENSATORE VA DIMINUENDO NEL TEMPO E ANCHE LA DERIVATA SAREBBE NEGATIVA, MA POICHÉ LA CORRENTE PUÒ ASSUMERE VALORI POSITIVI E BASTA AGGIUNGIAMO IL SEGNO "MENO"

$$-\frac{dq}{dt} = i \quad [4]$$

A QUESTO PUNTO DERIVANDO RISPETTO AL TEMPO LA RELAZIONE [2] OTTIENIAMO

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} - L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} = 0 \quad [5]$$

SOSTITUENDOCI LA [4] AVREMO

$$\frac{1}{C} \cdot i + L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} = 0 \quad [6]$$

RIORDINANDO I TERMINI SI OTTIENE

$$\frac{i}{LC} + \frac{d^2 i}{dt^2} = 0 \quad [7]$$

QUESTA È L'EQUAZIONE DEL MOTO ARMONICO SEMPLICE, E DAL MOMENTO CHE È GIÀ STATA STUDIATA NEL CASO DEL MOTO ARMONICO DELL'OSCILLATORE ARMONICO SEMPLICE, NE PRESENTO DI SEGUITO LA SOLUZIONE PIÙ GENERALE

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad [8]$$

$s(t)$ RAPPRESENTA LA SOLUZIONE DELLA [7] PUNCHÉ ω SIA PAR A $\sqrt{\frac{1}{LC}}$ E A, φ SIANO DETERMINATI A PARTIRE DALLE CONDIZIONI INIZIALI DEL SISTEMA.

IN PARTICOLARE POICHÉ A È UNA COSTANTE E L'ARGOMENTO DEL SENO VARIA AVREMO CHE IN CORRISPONDENZA DI $(\omega t + \varphi) = \pi/2$ IL VALORE DELLA CORRENTE SARÀ MASSIMO E PAR A A , DUNQUE CHIAMEREMO A CON IL SIMBOLO $i_{\max}$. LA SOLUZIONE DELLA [7] SARÀ QUINDI

$$i(t) = i_{\max} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t + \varphi\right) \quad [9]$$

PER ESSERE SICURI CHE QUESTA SIA EFFETTIVAMENTE LA SOLUZIONE È UNA BUONA IDEA DERIVARE LA [6] E VERIFICARE SE RISOLVE O MENO LA [7]

$$\frac{di(t)}{dt} = s'(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \omega \quad [10]$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = s''(t) = -A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \omega^2 = -i(t) \cdot \omega^2 \quad [11]$$

FACENDO LE OPPORTUNE SOSTITUZIONI A ω^2 POSSIAMO VERIFICARE COME VENGA VERAMENTE RISOLTA LA [7]

$$\frac{i(t)}{LC} - i(t) \cdot \omega^2 = 0 \quad [12]$$

IN REALTÀ ANCHE SENZA FARE LA SOSTITUZIONE CI SI ACCORRE CHE AFFINCHÉ LA [8] SIA SOLUZIONE DELLA [7] ω^2 DEVE PER FORZA ESSERE PAR A $1/LC$. POTREMMO OIA CHIEDERCI COSA SUCCEDEREBBE SE SOSTITUISSIMO IL SENO CON IL COSENO, EBBENE È POSSIBILE FARLO A CONDIZIONE ~~SENZA~~ DI MODIFICARE OPPORTUNAMENTE IL PARAMETRO φ . PARTENDO DAL FATTO CHE LA CORRENTE ALL'ISTANTE INIZIALE DEVE ESSERE 0 CI NTROVEREMO NEI DUE SEGUENTI CASI

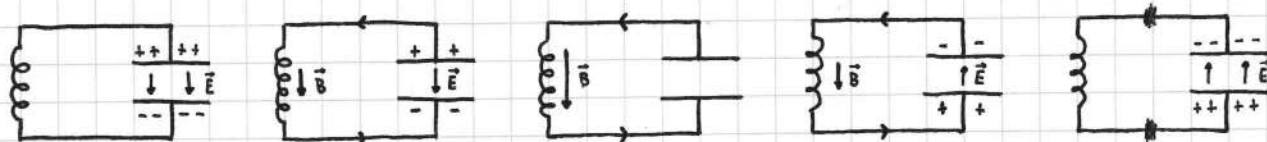
$$i(0) = 0 \Leftrightarrow i_{\max} \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

$$i(0) = 0 \Leftrightarrow i_m \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

DA QUESTE RELAZIONI E DALLA CONSERVAZIONE RITTA POCO FA SUL VALORE CHE DEVE ASSUMERE ω PER RISOLVERE LA [7] POSSIAMO CONCLUDERE CHE

- ω DIPENDE DALLE CARATTERISTICHE DEL SISTEMA
- φ , i_m DIPENDONO DALLE CONDIZIONI INIZIALI DEL SISTEMA

ORA CHE ABBIAMO VISTO COME VARIA NEL TEMPO LA CORRENTE DAL PUNTO DI VISTA ANALITICO VEDIAMO BREVEMENTE COSA SUCCEDERÀ A LIVELLO FISICO ALL'INTERNO DI UN CIRCUITO LC. PER SPIEGARLO MI SERVIRÒ DEI SEGUENTI 5 DISEGNI



INIZIALMENTE IL CONDENSATORE È CARICO E NEL CIRCUITO LA CORRENTE È NULLA, APPENA INIZIA A SCARICARE OGGETTA CORRENTE SI CREA UN CAMPO MAGNETICO ALL'INTERNO DELL'INDUTTORE. DAL MOMENTO CHE LA CORRENTE AUMENTA IL CAMPO MAGNETICO (E QUINDI IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO) AUMENTA. NEL MOMENTO IN CUI IL CONDENSATORE SI SCARICA LA CORRENTE DIMINUISCE E COSÌ DIMINUISCE IL CAMPO MAGNETICO (E QUINDI IL FLUSSO), PORTANDO ALLA GENERAZIONE DI UNA F.E.M. INDOTTA CHE SI OPPONE ALLA DIMINUIZIONE DI $\vec{B}$. QUESTO PORTA LA CORRENTE A CONTINUARE A SCARICARE NELLO STESSO VERSO, CARICANDO IL CONDENSATORE AL CONTRARIO, FINO A QUANDO SI AVVIÀ VARIAZIONE DI FLUSSO. DURANTE IL CONDENSATORE SARÀ CARICO LA CORRENTE NEL CIRCUITO SARÀ NULLA E QUINDI NON SI SARÀ VANTAGGIOSE DI FLUSSO E IL CAMPO MAGNETICO INTERNO ALL'INDUTTORE SARÀ NULLO.

NON HO RIPORTATO I DISEGNI CHE RICONDUCONO ALLA PRIMA SITUAZIONE PERCHÉ ANALOGHI A QUELLI GIÀ PRESENTI CON LE CARICHE CONTRARIE.

DI FATTO SENZA RESISTENZE NON VI È DISSIPAZIONE DI ENERGIA, QUESTO PORTA A PENSARE CHE QUINDI ~~LA~~ L'ENERGIA TOTALE RESTI COSTANTE. PROVIAMO QUINDI AD ESPRIMERLA

$$U(t) = U_E(t) + U_B(t) \quad [13]$$

ESPANDENDO I TERMINI A DESTRA DELL'UGUALE AVREMO

$$U(t) = \frac{1}{2} C V_c^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t) \quad [14]$$

RICORDANDO LA RELAZIONE [1] POSSIAMO RISCIVERE $V_c(t)$, MENTRE $i(t)$ INI ESSERE SOSTITUITA NELLA FORMA DELLA [9]

$$U(t) = \frac{1}{2} C \left(L \frac{di}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} L i^2(t) \quad [15]$$

ESPANDENDO

$$U(t) = \frac{1}{2} C L^2 i_{\max}^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \omega^2 + \frac{1}{2} L i_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad [16]$$

RACCOLLIENDO E RICORDANDO CHE $\omega^2 = 1/LC$ AVREMO

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{2} L i_{\max}^2 \left(CL \cdot \frac{1}{LC} \cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) \right) \\ &= \frac{1}{2} L i_{\max}^2 \left(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) \right) \\ &= \frac{1}{2} L i_{\max}^2 \end{aligned} \quad [17]$$

DA CUI CONCLUDIAMO CHE IN ASSENZA DI RESISTENZE L'ENERGIA TOTALE NEL CIRCUITO SI CONSERVA E IL SUO VALORE È DATO DALLA [17].

CONSIDERANDO ORA IL CASO IN CUI SIA PRESENTE NEL CIRCUITO UNA RESISTENZA NON TRASCURABILE, AVREMO QUINDI UN CIRCUITO RLC E LA CORRENTE NON OSCILLERÀ PER SEMPRE MA AD UN CERTO PUNTO, A CAUSA DELL'ENERGIA DISSIPATA DALLA RESISTENZA, SI FERMERÀ. SCRIVIAMO QUINDI L'EQUAZIONE DEL CIRCUITO SUPPONENDO DI AVER GIÀ CARICATO IL CONDENSATORE

$$\frac{Q}{C} - Ri - L \frac{di}{dt} = 0 \quad [18]$$

DIVIDENDO PER L E DERIVANDO RISPETTO AL TEMPO OTTENIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE IN UN'INCÓGNITA

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad [19]$$

ESSENDO L'EQUAZIONE COMPLICATA E QUESTO NON UN CORSO DI MATEMATICA NE PRESENTO DI SEGUITO LA SOLUZIONE, IL NUOVO, LA PIÙ GENERALE

$$i(t) = A e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega' t + \varphi) \quad [20]$$

DOVE, UNA VOLTA IMPOSTE LE CONDIZIONI INIZIALI, OTTENIAMO I SEGUENTI VALORI PER LE COSTANTI

$$A = i_{\max} \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad \gamma = \frac{R}{2L}$$

INOLTRE CHIAREMO TENENDO ESCLINANTE IL SECONDO FATTORE DELLA [20] È FATTORE DI SMORZAMENTO IL PRIMO.

È POSSIBILE DISTINGUERE 3 CASI A SECONDA DEL VALORE DI γ , MA NOI VEDREMO SOLO QUELLO IN CUI $\gamma < \omega_0$, OVVERO LE OSCILLAZIONI SMORZATE LEBILI.

IN QUESTO CASO IL SISTEMA OSCILLA CON AMPIEZZA A (CIOÈ CORRENTE MASSIMA) CHE DECRESCE ESPONENZIALMENTE.

IN BREVE PARLÓ ORA UN CENNO ALLE OSCILLAZIONI FORZATE. NEL CASO IN CUI IL CIRCUITO RLC VENGA ALIMENTATO CON UNA f.e.m. PERIODICA

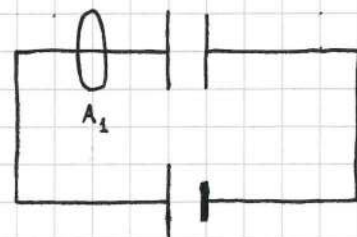
$$E = E_{\max} \sin(\omega_0 t) \quad [21]$$

SI POTREBBE VERIFICARE IL FENOMENO DELLA RISONANZA, SECONDO CUI QUANDO LA FREQUENZA ω_0 È UGUALE O MOLTO VICINA ALLA FREQUENZA ω CON LA QUALE OSCILLEREBBE IL CIRCUITO LC (SENZA ALIMENTAZIONE E RESISTENZA) ALLORA IL SISTEMA INIZIA AD OSCILLARE CON AMPIEZZE SEMPRE MAGGIORI.

LEGGE DI AMPERE - MAXWELL

IN QUEST'ULTIMO CAPITOLO VEDREMO COME LA LEGGE DI AMPERE, COSÌ COME L'ABBIAMO DEFINITA, PRESENTA UN PROBLEMA E VEDREMO ANCHE COME ESSO POTRÀ ESSERE RISOLTO.

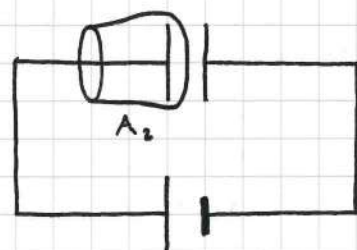
IMMAGINIAMO UN CIRCUITO ELETTRICO CON UN CONDENSATORE CARICATO DA UNA BATTERIA



CON A_1 HO INDICATO UNA LINEA ~~SUPERFICIE~~ ^{LINEA} CHIUSA ATTRAVERSA DAL CAVO DEL CIRCUITO. PER LA LEGGE DI AMPERE SAPIAMO CHE LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO ATTRAVERSO A_1 È

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c \quad [1]$$

E QUESTO RISULTATO VALE ANCHE PER QUALSIASI SE SI CONSIDERANO LE CORRENTI CHE ATTRAVERSA UNA QUALSIASI SUPERFICIE AVENTE COME BORDO LA LINEA CHIUSA A_1 . IN PARTICOLARE DOVRÀ VALERE ANCHE PER LA SEGUENTE SUPERFICIE



SORGE PERÒ UN PROBLEMA, IN QUESTO CASO LA SUPERFICIE A_2 , NONOSTANTE ABBA COME BORDO LA LINEA A_1 , NON È ATTRAVERSA DA CORRENTE (PASSA INFATTI ATTRAVERSO LE ARMATURE DEL CONDENSATORE) E QUINDI HA CIRCUITAZIONE NULLA DIVERSA DA QUELLA

DELLA LINEA CHIUSA SCELTA ALL'INIZIO. SEMBREREBBE QUINDI CHE CI SIA UN PROBLEMA NELLA LEGGE DI AMPERE. IN REALTÀ LE MANCA QUALCOSA, INFATTI PREVEDE CORRETTAMENTE IL VALORE DEL CAMPO MAGNETICO NEI CASI SIMILI AL PRIMO CHE HO PRESENTATO, MENTRE NON SI PUÒ APPLICARE AI CASI COME IL SECONDO. PARTIAMO QUINDI DA CIÒ CHE GIÀ SAPIAMO, ALL'INTERNO DI UN CONDENSATORE SI GENERA IL CAMPO ELETTRICO

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [2]$$

DA CUI, ESPLODENDO σ IN CARICA SU SUPERFICIE E Moltiplicando i termini OTTIENIAMO

$$Q = \epsilon_0 E A \quad [3]$$

DOVE OSSERVIAMO SUBITO CHE IL PRODOTTO $E \cdot A$ RAPPRESENTA IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA A CHE SUPPONIAMO PERPENDICOLARE AL CAMPO ELETTRICO E NELLA

$$Q = \epsilon_0 \Phi_E \quad [4]$$

DERIVANDO AM RISPETTO AL TEMPO OTTIENIAMO UNA MANAGLIA CHE AVrà LE DIMENSIONI DI UNA CORRENTE

$$i_s = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad [5]$$

LA CHIAMEREMO **CORRENTE DI SPOSTAMENTO** NONOSTANTE NON ABBA NULLA A CHE FARE CON LO SPOSTAMENTO DI CARICHE (MA LO FAREMO PER MOTIVI STORICI).

IN SINTESI QUANDO ABBIAMO INTRODOTTO LA LEGGE DI FARADAY ABBIAMO VISTO COME UNA VARIAZIONE DEL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO POSSA IN UNO O L'ALTRO CASO GENERARE UN CAMPO ELETTRICO.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad [6]$$

CON LE OSSERVAZIONI FATTE FINORA (IN RIFERIMENTO ALLA [5]) CI STIAMO PROPONENDO DI DIMOSTRARE CHE LA VARIAZIONE DI UN CAMPO ~~MAGNETICO~~ ELETTRICO È IN GRADO DI GENERARE UN CAMPO MAGNETICO. È PER QUESTI MOTIVI, E IN VIRTÙ DI UN COMPORTAMENTO SIMMETRICO NELLA NATURA, CHE JAMES MAXWELL ARRIVASSE IN TENENDO ALLA LEGGE DI AMPERE

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i_c + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad [7]$$

QUESTA EQUAZIONE, CHE PRESE IL NOME DI **LEGGE DI AMPERE-MAXWELL**, TENE CONTO ANCHE DI UNA EVENTUALE VARIAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO.

IL CAMPO MAGNETICO INDOTTO AVrà LA FORZA DIREZIONE E VERSO INFINITO NOSTRO AL CAMPO ELETTRICO IN QUANTO SOLO COSÌ CI SI ASSICURA CHE ~~MAI~~ LE LINEE DI CAMPO NON CONVERGANO IN UN SOLO PUNTO, DIMOSTRANDO LA IMPOSSIBILITÀ ESISTENZA DI UN MONOPOLO MAGNETICO.

IN PARTICOLARE AL CONTRARIO DI QUANTO SUCCEDEVA CON IL CAMPO ELETTRICO INDOTTO, NON È PIÙ PRESENTE IL "MINUS" DAVANTI ALLA DERIVATA E QUINDI IL CAMPO MAGNETICO INDOTTO È CONCORRE ALL'EVENTUALE INCREMENTO O DIMINUIZIONE DEL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO.

LE EQUAZIONI DI MAXWELL

DI SEGUITO SONO RIPORTATE LE QUATTRO LEGGI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO CHE DESCRIVONO LA FISICA DEI CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i_c + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

INFIN, SE A QUESTE QUATTRO AGGIUNGIAMO LA LEGGE CHE DESCRIVE LA FORZA CHE AGISCE SU UNA CARICA OTTENIAMO UNA DESCRIZIONE COMPLETA DEL COMPORTAMENTO DELLE CARICHE IN PRESENZA DI CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

SI CONCLUDE QUI IL CORSO SULL'ELETTROSTATICA E PARTE DELL'ELETTRODINAMICA.